# РАВНОВЕСИЯ НЭША И ШТАКЕЛЬБЕРГА В ЗАДАЧАХ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ И РАЗМЕЩЕНИЯ ХАБОВ

**Ю.А. Кочетов, А.В. Плясунов, Д.Д. Чвокич**

Институт математики СО РАН

17-я Всероссийская конференция
«Математические методы распознавания образов»
г. Светлогорск, Калининградская область, 19-25 сентября 2015

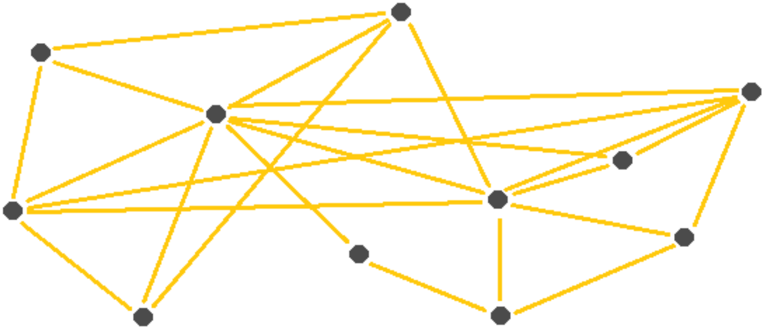

Рис.: Связанный граф. Хабов нет.

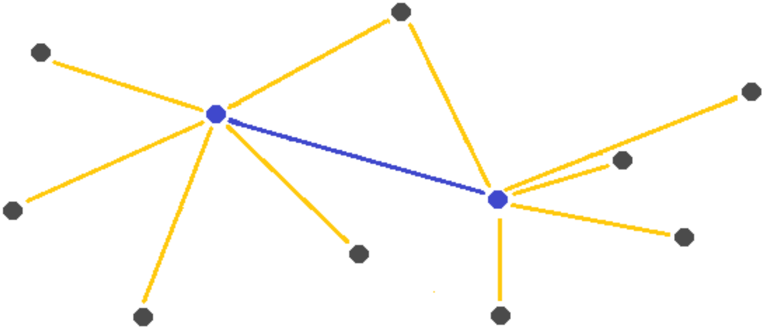

Рис.: Хабы и радиальная сеть.

# Конкуренция & Ценообразование

## Задача конкурента размещения хабов

Marianov V., Serra D., ReVelle Ch. (1999) *Location of hubs in a competitive environment.* European Journal of Operational Research **114(2)**:363-371.

## Задача конкурента размещения хабов & ценообразования

Marianov V., Luer-Villagra A, (2013) *A competitive hub location and pricing problem.* European Journal of Operational Research **231(3)**:734-744

# Игровые сценарии

## Игра Штакельберга

Первым выбирает хабы, сеть и цены лидер, затем конкурент.

## Игра Штакельберга + ценовая война

Первым выбирает хабы и сеть лидер, затем конкурент. При выборе цен игроки могут поочередно их менять.

# Обозначения

N — множество вершин;

A — множество дуг;

$K_{ij}$ — стоимость образования спицы (spoke) $(i, j) \in N^2$;

$c_{ij}$ — стоимость передачи единицы потока по дуге $(i, j) \in N^2$;

$\alpha$ — дисконт при передаче между хабами;

$F_h$ — стоимость размещения хаба в вершине $h \in N$;

$w_{ij}$ — спрос на дуге $(i, j)$;

$\Theta$ — чувствительность модели логистической регрессии.

# Переменные лидера и конкурента:

$x_k = 1$, если лидер размещает хаб в вершине $k \in N$; $0$ иначе;

$x_{ij} = 1$, если лидер связывает вершину $i \in N$ с вершиной $j \in N$, $(i, j) \in A$; $0$ иначе;

$p_{ij/kl}$ — цена лидера за передачу единицы потока между вершинами $i \in N$ и $j \in N$ через хабы $k, l \in N$;

$u_{ij/kl}$ — доля потока из $i \in N$ в $j \in N$ через хабы лидера в вершинах $k, l \in N$;

$y_k = 1$, если конкурент размещает хаб в вершине $k \in N$; $0$ иначе;

$y_{ij} = 1$, если конкурент связывает вершину $i \in N$ с вершиной $j \in N$, $(i, j) \in A$; $0$ иначе;

$q_{ij/kl}$ — цена конкурента за передачу единицы потока между вершинами $i \in N$ и $j \in N$ через хабы $k, l \in N$;

$v_{ij/kl}$ — доля потока из $i \in N$ в $j \in N$ через хабы конкурента в вершинах $k, l \in N$.

# Задача лидера: LFHLPP

$$\max \sum_{i,j,k,l \in N} (p_{ij/kl} - c_{ij/kl}) w_{ij} u_{ij/kl} - \sum_{i \in N} f_i x_i - \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} x_{ij} \quad (1)$$

$$\sum_{s,t \in N} x_s x_t x_{is} x_{st} x_{tj} \geq 1, \qquad \forall i, j \in N \quad (2)$$

$$u_{ij/kl} = \frac{x_k x_l x_{ik} x_{kl} x_{lj} e^{-\Theta p_{ij/kl}}}{\sum_{s,t \in N} x_s x_t x_{is} x_{st} x_{tj} e^{-\Theta p_{ij/st}} + \gamma^*_{ij}}, \qquad \forall i, j, k, l \in N \quad (3)$$

$$\gamma^*_{ij} = \sum_{s,t \in N} y^*_s y^*_t y^*_{is} y^*_{st} y^*_{tj} e^{-\Theta q^*_{ij/st}}, \qquad \forall i, j \in N \quad (4)$$

$$((y^*_i), (y^*_{ij}), (v^*_{ij/kl}), (q^*_{ij/st})) \in F^*((x_i), (x_{ij}), (u_{ij/kl}), (p_{ij/kl})) \quad (5)$$

$$p_{ij/kl} \geq 0, \qquad \forall i, j, k, l \in N \quad (6)$$

$$x_i \in \{0, 1\}, \qquad \forall i \in N \quad (7)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall (i, j) \in A \quad (8)$$

# Задача конкурента

$$\max \sum_{i,j,k,l \ \in \ N} (q_{ij/kl} - c_{ij/kl}) w_{ij} v_{ij/kl} - \sum_{i \ \in \ N} f_i y_i - \sum_{(i,j) \ \in \ A} f_{ij} y_{ij} \tag{9}$$

$$\sum_{s,t \in N} y_s y_t y_{is} y_{st} y_{tj} \geq 1, \qquad \forall i, j \in N \tag{10}$$

$$v_{ij/kl} = \frac{y_k y_l y_{ik} y_{kl} y_{lj} e^{-\Theta q_{ij/kl}}}{\sum_{s,t \in N} y_s y_t y_{is} y_{st} y_{tj} e^{-\Theta q_{ij/st}} + \eta_{ij}}, \quad \forall i, j, k, l \in N \tag{11}$$

$$\eta_{ij} = \sum_{s,t \in N} x_s x_t x_{is} x_{st} x_{tj} e^{-\Theta p_{ij/st}} \qquad \forall i, j \in N \tag{12}$$

$$q_{ij/kl} \geq 0, \qquad \forall i, j, k, l \in N \tag{13}$$

$$y_i \in \ \{0, 1\}, \quad \forall i \in N \tag{14}$$

$$y_{ij} \in \ \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A \tag{15}$$

# Равновесие Штакельберга

## Теорема 1.

Если хабы и сети лидера и конкурента заданы, то оптимальная цена лидера $p^*_{ij/kl}$ для каждого маршрута $i \to k \to l \to j$ определяется подходящей неотрицательной маржой $r_{ij}$:

$$p^*_{ij/kl} = c_{ij/kl} + r_{ij}.$$

## Теорема 2.

Если хабы и сети игроков фиксированны, то существует единственное равновесие Штакельберга в терминах цен.

## Теорема 3.

В задаче LFHLPP существует равновесие Штакельберга как для кооперативного, так и некооперативного взаимодействия игроков.

**Теорема 4.**

Если хабы и сети игроков фиксированны, то существует единственное равновесие Нэша в терминах цен, которое не лучше соответствующего равновесие Штакельберга.

# СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ