СПЕЦКУРС
Логический анализ данных в распознавании
(Logical data analysis in recognition)

лектор д.ф.-м.н. Елена Всеволодовна Дюкова

Спецкурс посвящён вопросам применения аппарата дискретной математики в задачах интеллектуального анализа данных. Излагаются общие принципы, лежащие в основе логического подхода к задачам машинного обучения. Описываются методы конструирования процедур классификации по прецедентам с использованием понятий теории булевых функций и теории покрытий булевых матриц. Рассматриваются основные модели логических процедур классификации, вопросы сложности их реализации и качества решения прикладных задач.

Спецкурс для бакалавров 2-4 курсов ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

По спецкурсу издано учебное пособие:
http://www.ccas.ru/frc/papers/djukova03mp.pdf

Лекция 4
Основные понятия теории дизъюнктивных нормальных форм

- При построении логических процедур распознавания наравне с комбинаторным аппаратом используется аппарат логических функций. Имеются в виду прежде всего функции алгебры логики и один специальный класс функций k -значной логики. Вспомним ряд известных определений из алгебры логики.
- Пусть $\boldsymbol{E^n}$ – множество всех векторов (наборов) вида $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{\alpha_1}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n})$, где $\boldsymbol{\alpha_i} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Множество $\boldsymbol{E^n}$ называется единичным n -мерным кубом. Набор $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$ называется вершиной куба $\boldsymbol{E^n}$. Функция $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n})$, определенная на наборах из $\boldsymbol{E^n}$ и принимающая значения из $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, называется булевой функцией. Если функция принимает значения из $\{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ и задана не на всем множестве наборов из $\boldsymbol{E^n}$, то она называется частичной или не всюду определенной булевой функцией.
- Пусть $\boldsymbol{P_n}$ – множество всех булевых функций, зависящих от $\boldsymbol{n}$ переменных. Имеют место равенства:

  а) $|\boldsymbol{E^n}| = \mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}$; б) $|\boldsymbol{P_n}| = \mathbf{2}^{\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}}}$ (здесь и далее $|\boldsymbol{M}|$ – мощность множества $\boldsymbol{M}$).

- Множество наборов $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \in \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{n}}$, таких, что $\boldsymbol{F}(\tilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbf{1}$, в дальнейшем обозначается $\boldsymbol{N_F}$. Аналогично, множество $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} \in \boldsymbol{E}^{\boldsymbol{n}}$, на которых функция $\boldsymbol{F}$ равна $\mathbf{0}$, обозначается $\boldsymbol{N_{\overline{F}}}$.
- ***Элементарной конъюнкцией (ЭК) над множеством переменных*** $\{\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}\}$ называется функция вида $\boldsymbol{x_{j_1}^{\sigma_1}} \,\&\dots\&\, \boldsymbol{x_{j_r}^{\sigma_r}}$, где $\boldsymbol{\sigma_i} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$ при $\boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{x^0} = \overline{\boldsymbol{x}}$, $\boldsymbol{x^1} = \boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{j_u} \neq \boldsymbol{j_t}$ при $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{t} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{r}\}$. Очевидно, $\boldsymbol{x^\sigma} = \mathbf{1}$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\sigma}$.
- Для краткости знак & опускается. Число $\boldsymbol{r}$ называется рангом конъюнкции. Две ЭК не считаются различными, если они различаются только порядком символов $\boldsymbol{x^\sigma}$.
- Пусть $\boldsymbol{K_r^n}$ – множество всех ЭК ранга $\boldsymbol{r}$ над множеством переменных $\{\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_r}\}$, $\boldsymbol{K^n} = \bigcup_{\boldsymbol{r}=\mathbf{1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{K_r^n}$. Имеют место равенства:

  а) $|\boldsymbol{K_r^n}| = \boldsymbol{C_n^r} \mathbf{2}^{\boldsymbol{r}}$; б) $|\boldsymbol{K^n}| = \mathbf{3}^{\boldsymbol{n}}$.
- ЭК $\boldsymbol{x_{j_1}^{\sigma_1}} \,\&\dots\&\, \boldsymbol{x_{j_r}^{\sigma_r}}$ обращается в $\mathbf{1}$ на тех и только тех наборах $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, для которых $\boldsymbol{a_{j_i}} = \boldsymbol{\sigma_i}, , \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \dots, \boldsymbol{r}$.

- Множество всех наборов из $\boldsymbol{E^n}$, на которых ЭК $\boldsymbol{B}$ равна **1,** обозначается $\boldsymbol{N_B}$ и называется **интервалом истинности конъюнкции** $\boldsymbol{B}$.
- Очевидно, что

  а) $|\boldsymbol{N_B}| = \boldsymbol{2^{n-r}}$;

  б) если ЭК $\boldsymbol{B'}$ является сомножителем $\boldsymbol{B}$, то $\boldsymbol{N_{B'} \supset N_B}$**,** и наоборот, если $\boldsymbol{N_{B'} \supset N_B}$, то $\boldsymbol{B'}$ является сомножителем $\boldsymbol{B}$.
- ***Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)*** называется булева функция вида $\boldsymbol{D(x_1, \dots, x_n) = K_1 \vee \dots \vee K_m}$**,** где $\boldsymbol{K_i}$ **,** $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, m}$, – ЭК. Конъюнкции $\boldsymbol{K_1, \dots, K_m}$ называются ***слагаемыми.*** Число слагаемых $\boldsymbol{m}$ в ДНФ $\boldsymbol{D}$ называется её ***длиной***. ДНФ $\boldsymbol{D(x_1, \dots, x_n)}$ принимает значение **0** на наборе $\boldsymbol{\widetilde{\alpha}}$ из $\boldsymbol{E^n}$ тогда и только тогда, когда каждое слагаемое $\boldsymbol{K_1, \dots, K_m}$ принимает значение **0** на наборе $\boldsymbol{\widetilde{\alpha}}$.
- Наборы $\boldsymbol{\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)}$ и $\boldsymbol{\widetilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)}$ из $\boldsymbol{E^n}$ называются ***сравнимыми,*** если $\boldsymbol{\alpha_i \leq \beta_i}$ при $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}$ **(**говорят, что $\boldsymbol{\widetilde{\alpha}}$ предшествует $\boldsymbol{\widetilde{\beta}}$, если $\boldsymbol{\alpha_i \leq \beta_i}$ при $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, n}$, или $\boldsymbol{\widetilde{\beta}}$ охватывает $\boldsymbol{\widetilde{\alpha}}$). Например, набор $\boldsymbol{\widetilde{\alpha} = (0, 1, 0, 1)}$ предшествует набору $\boldsymbol{\widetilde{\beta} = (1, 1, 0, 1)}$. Пишут $\boldsymbol{\widetilde{\alpha} \preccurlyeq \widetilde{\beta}}$.

- Булева функция $\boldsymbol{F(x_1, \dots, x_n)}$ называется ***монотонной***, если для любых двух наборов $\boldsymbol{\tilde{\alpha}}$ и $\boldsymbol{\tilde{\beta}}$ таких, что $\boldsymbol{\tilde{\alpha} \preccurlyeq \tilde{\beta}}$, выполнено $\boldsymbol{F(\tilde{\alpha}) \leq F(\tilde{\beta})}$.
- Простейшими примерами монотонных булевых функций являются функции: $\boldsymbol{0, 1, x, x_1x_2, x_1 \vee x_2}$. Функция $\bar{x}$ – **п**ростейший пример функции, не являющейся монотонной.
- ЭК $\boldsymbol{B}$ называется ***допустимой*** для булевой функции $\boldsymbol{F}$, если $\boldsymbol{N_B \cap N_{\bar{F}} = \emptyset}$. Из определения следует, что $\boldsymbol{N_B \cap N_F \neq \emptyset}$ и $\boldsymbol{N_B \cap N_F = N_B}$.
- ЭК $\boldsymbol{B}$ называется ***почти допустимой*** для булевой функции $\boldsymbol{F}$, если $\boldsymbol{N_B \cap N_F \neq \emptyset}$.
- Очевидно, что допустимая конъюнкция является почти допустимой.
- ЭК $\boldsymbol{B}$ называется ***максимальной*** для булевой функции $\boldsymbol{F}$, если выполнены два следующих условия: 1)$\boldsymbol{N_B \cap N_{\bar{F}} = \emptyset}$; 2) не существует ЭК $\boldsymbol{B'}$ такой, что $\boldsymbol{N_{B'} \supset N_B}$ и $\boldsymbol{N_{B'} \cap N_{\bar{F}} = \emptyset}$. Условие 1) является условием допустимости ЭК $\boldsymbol{B}$.

- ЭК $\boldsymbol{B}$ называется ***неприводимой*** для булевой функции $\boldsymbol{F}$, если не существует ЭК $\boldsymbol{B'}$ такой, что $\boldsymbol{N_{B'}} \supset \boldsymbol{N_B}$ и $\boldsymbol{N_{B'}} \cap \boldsymbol{N_{\overline{F}}} = \boldsymbol{N_B} \cap \boldsymbol{N_{\overline{F}}}$.
- Рассмотрим пример. Пусть

$\boldsymbol{N_F} = \{(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}),(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{1}),(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1})\},$

$\boldsymbol{N_{\overline{F}}} = \{(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{0}),(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}),(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{1}),(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{0})\}.$

Проверить, правильно ли даны ответы «да» и «нет» в приведенной ниже таблице.

ЭК	допустимая	почти допустимая	максимальная	неприводимая
$\boldsymbol{x_1x_2x_3}$	Да	Да	Нет	Нет
$\boldsymbol{x_2x_3}$	Да	Да	Да	Да
$\boldsymbol{\overline{x}_2x_3}$	Нет	Да	Нет	Нет
$\boldsymbol{\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3}$	Нет	Нет	Нет	Нет
$\boldsymbol{x_1}$	Нет	Да	Нет	Да
$\boldsymbol{x_1x_2}$	Нет	Да	Нет	Да

- В теории дизъюнктивных нормальных форм основной задачей является задача построения для произвольной функции алгебры логики $\boldsymbol{F}$ минимальной по сложности ДНФ.

- Под сложностью ДНФ понимают либо число символов вида $\boldsymbol{x^{\sigma}}$ (сумму рангов конъюнкций), которые содержит эта ДНФ, либо число входящих в нее элементарных конъюнкций, то есть ее длину. Соответственно, ***минимальная*** ДНФ – это ДНФ, содержащая наименьшее число символов переменных по сравнению с другими ДНФ, реализующими функцию $\boldsymbol{F}$. ***Кратчайшая*** ДНФ реализует $\boldsymbol{F}$ и содержит наименьшее число элементарных конъюнкций по сравнению с другими ДНФ, реализующими $\boldsymbol{F}$.

- Существует тривиальный алгоритм для задачи минимизации, который заключается в последовательном построении ДНФ в порядке возрастания сложности, например, длины. Первая по порядку ДНФ, реализующая функцию $\boldsymbol{F}$, и является искомой. Однако такой способ ведет к перебору большого числа дизъюнктивных нормальных форм. Например, если кратчайшая ДНФ имеет длину $\boldsymbol{l}$, то при указанном решении задачи минимизации число построенных ДНФ будет равно $\boldsymbol{C_{3^n}^{l-1}}$. При $\boldsymbol{n = 10}$ существуют функции, при минимизации которых пришлось бы строить более $\boldsymbol{10^{500}}$ ДНФ. Целый ряд факторов свидетельствует о невозможности устранения перебора в задаче минимизации.

- Важная роль в задаче минимизации принадлежит сокращенной ДНФ. ДНФ называется ***сокращенной*** для булевой функции $\boldsymbol{F}$, если она составлена из всех максимальных конъюнкций функции $\boldsymbol{F}$.

Несложно доказываются приводимые ниже утверждения 1 и 2.

- **Утверждение 1.** *Минимальную ДНФ можно получить из сокращенной путём отбрасывания некоторых элементарных конъюнкций.*
- Для кратчайшей ДНФ утверждение аналогичное утверждению 1 неверно. Например, функция $\boldsymbol{F(x,y)=x\vee y}$ имеет сокращенную ДНФ $\boldsymbol{x\vee y}$ и кратчайшие ДНФ

$$\boldsymbol{D_1=x\vee y,\ D_2=x\bar{y}\vee y,\ D_3=x\vee \bar{x}y.}$$

Нетрудно видеть, что ДНФ $\boldsymbol{D_2}$ и $\boldsymbol{D_3}$ нельзя получить из сокращенной ДНФ. $\boldsymbol{x\vee y}$ удалением некоторых элементарных конъюнкций.

- **Утверждение 2.** *Для всякой функции $\boldsymbol{F}$ существует кратчайшая ДНФ, которая получается из сокращенной ДНФ функции $\boldsymbol{F}$ путем удаления некоторых элементарных конъюнкций.*
- Сокращенная ДНФ может не быть ни минимальной, ни кратчайшей. Однако существует класс функций, для которого эти понятия совпадают.

- Известным фактом является
- **Утверждение 3.** *Сокращенная ДНФ монотонной функции не содержит отрицательных переменных и является ее единственной минимальной (кратчайшей) ДНФ.*
- Существует целый ряд методов синтеза сокращенной ДНФ. Большинство из них рассчитано на определенный способ задания функции. Например, если функция задана ДНФ, то одним из наиболее известных методов построения сокращенной ДНФ является алгоритм Блейка.
- ***Элементарной дизъюнкцией (ЭД) над множеством переменных*** $\{\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n}\}$ называется функция вида $\boldsymbol{x_{j_1}^{\sigma_1}} \vee \dots \vee \boldsymbol{x_{j_r}^{\sigma_r}}$, где $\boldsymbol{\sigma_i} \in \{\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}\}$ при $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, r}$, $\boldsymbol{x^0 = \bar{x}}, \boldsymbol{x^1 = \mathrm{x}}$ и $\boldsymbol{j_u \neq j_t}$ при $\boldsymbol{u \neq t}$, $\boldsymbol{u, t \in \{1, 2, \dots, r\}}$.
- Две ЭД не считаются различными, если они различаются только порядком символов $\boldsymbol{x^\sigma}$.
- ЭД $\boldsymbol{x_{j_1}^{\sigma_1}} \vee \dots \vee \boldsymbol{x_{j_r}^{\sigma_r}}$ обращается в **0** на тех и только тех наборах $(\boldsymbol{\alpha_1}, \dots, \boldsymbol{\alpha_n})$, для которых $\boldsymbol{a_{j_i} \neq \sigma_i}$, , $\boldsymbol{i = 1, 2, \dots, r}$.

- ***Конъюнктивной нормальной формой (КНФ)*** называется булева функция вида $\boldsymbol{K(x_1, \ldots, x_n) = D_1 \& \ldots \& D_u}$, где $\boldsymbol{D_i}$ – ЭД , $\boldsymbol{i = 1, 2, \ldots, u}$. Дизъюнкции $\boldsymbol{D_1, \ldots, D_u}$ называют ***множителями***. Если каждая из этих дизъюнкций содержит в точности $\boldsymbol{n}$ слагаемых, то КНФ $\boldsymbol{K}$ называют ***совершенной***.
- Задание множества нулей $\boldsymbol{N_{\overline{F}}}$ булевой функции $\boldsymbol{F}$ равносильно заданию совершенной КНФ функции $\boldsymbol{F}$.
- Действительно, пусть $\boldsymbol{N_{\overline{F}} = \{(\sigma_1^1, \ldots, \sigma_n^1), (\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2), \ldots, (\sigma_1^m, \ldots, \sigma_n^m)\}}$. Тогда $\boldsymbol{F = \left(x_1^{\overline{\sigma_1^1}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma_n^1}} \right) \& \left(x_1^{\overline{\sigma_1^2}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma_n^2}} \right) \& \ldots \& \left(x_1^{\overline{\sigma_1^m}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma_n^m}} \right)}$, в чем убеждаемся непосредственной проверкой.
- Нас особенно будет интересовать следующая задача. Пусть задана некоторая КНФ $\boldsymbol{K}$ реализующая булеву функцию $\boldsymbol{F_K}$. Требуется построить сокращенную ДНФ функции $\boldsymbol{F_K}$. Эта задача называется дуализацией КНФ и подробно будет рассмотрена в следующих лекциях.

УПРАЖНЕНИЯ

- 1. Пусть $\boldsymbol{B}$ – максимальная конъюнкция всюду определенной булевой функции $\boldsymbol{F}$. Является ли конъюнкция $\boldsymbol{B}$ максимальной для не всюду определенной булевой функции, у которой множество нулей совпадает с множеством нулей функции $\boldsymbol{F}$?

- 2. Пусть булева функция $\boldsymbol{F}$ задана множеством наборов $\boldsymbol{N_F}$, на которых она равна $\mathbf{1}$, а именно, $\boldsymbol{N_F} = \{(\mathbf{1},\mathbf{1},\mathbf{1}),\ (\mathbf{0},\mathbf{1},\mathbf{1}),(\mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{1})\ \}$. Для функции $\boldsymbol{F}$ построить неприводимую конъюнкцию ранга $\boldsymbol{r} > \mathbf{1}$, которая не являлась бы максимальной.