

# Сравнение двух подходов к разложению критериев качества решающих функций

Неделько В. М.

Институт математики СО РАН, г. Новосибирск  
nedelko@math.nsc.ru

Работа выполнена при поддержке РФФИ 18-07-00600-а, 19-29-01175.

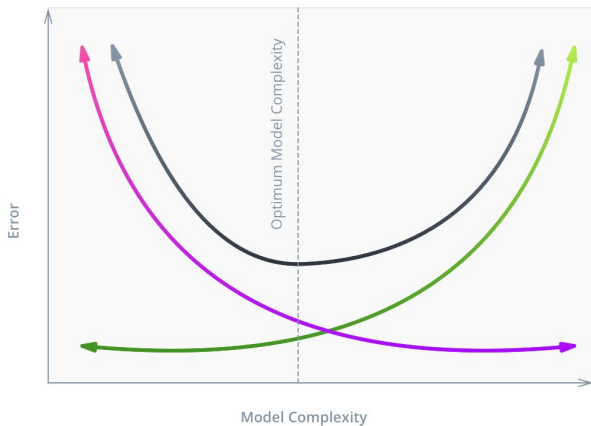
«Математические методы распознавания образов»  
(ММРО-19), г. Москва, 26–29 ноября 2019 г.

# Разложение критерия качества решающих функций

Проводится сравнительный анализ двух подходов к разложению критерия качества решающих функций.

- Разложение на смещение и разброс (bias-variance decomposition).
- Разложение на меру адекватности и меру статистической устойчивости (Г. С. Лбов, Н. Г. Старцева, 1989)

# Типичная иллюстрация



- Total Error
- Bias<sup>2</sup>
- Variance

## Смещение и разброс

Для независимых случайных величин  $y$  и  $u$  имеет место

$$E(y - u)^2 = Dy + (Ey - Eu)^2 + Du$$

«Шум», смещение и разброс.

# Логарифмическая функция потерь

Логарифмическая функция потерь

$$L(y, u) = -\ln u_y$$

Критерий эквивалентен функции правдоподобия выборки.  
Можно свести к дивергенции Кульбака-Лейблера.

# Универсальное разложение

Имеет место

$$EL(y, u) = H(p) + L(p, \bar{u}) + EL(\bar{u}, u)$$

Здесь  $\bar{u}$  – «главное предсказание», но на самом деле это распределение, при котором прогноз оптимален.

## Меры адекватности и устойчивости

Идея подхода в том, чтобы разложить ошибку на погрешность аппроксимации и статистическую погрешность. Асимптотическое значение среднего качества (риска)

$$R = \lim_{N \rightarrow \infty} EL(y, u)$$

Мера адекватности есть разность между асимптотическим средним риском и байесовским уровнем ошибки.

Мера статистической устойчивости есть разность между средним риском и асимптотическим.

## Отступ как мера сложности

В качестве универсальной меры сложности решения использован отступ (ненормированный).

Нормированный отступ фигурирует в оценках обобщающей способности.

Ненормированный отступ характеризует степень обучения (и переобучения).

Отступ вычисляется на основе оценок вероятности.



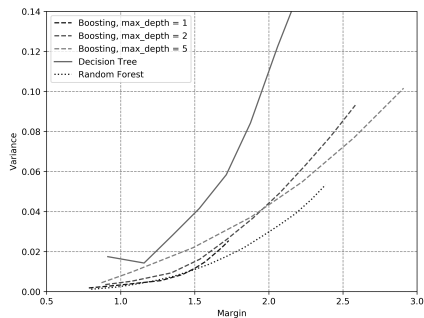
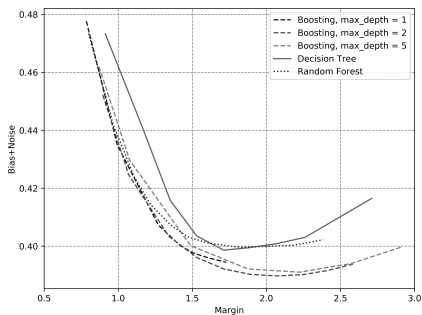
## Схема эксперимента

Как правило, поведение компонент разложения исследуется на синтетических данных.

В данной работе использованы реальные данные (Adult UCI, Kaggle).

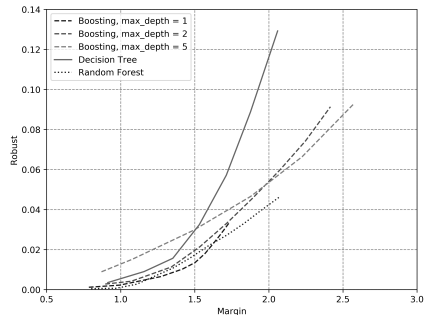
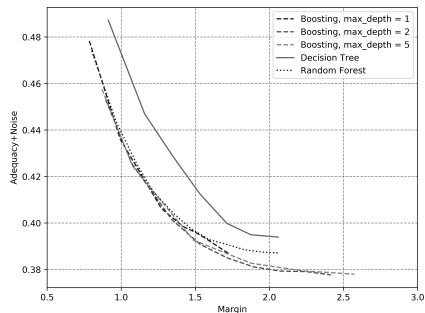
Идея в использовании данных большого объёма, половина которого используется в качестве тестовой выборки, а половина разбивается на большое число обучающих выборок.

# Результаты экспериментов



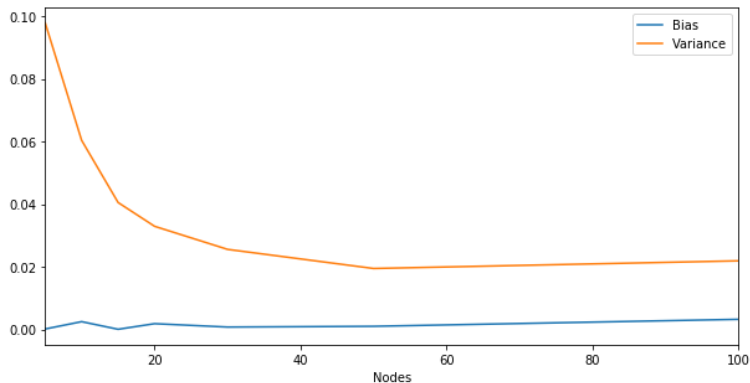
Смещение может возрастать с ростом сложности (А.Г. Дьяконов)

# Результаты экспериментов



Меры адекватности и устойчивости всегда монотонны.

# Пример разложения



Кусочно-постоянное решение в задаче регрессии.

## Выводы

Результаты исследования показывают значительное качественное сходство между поведением смещения и меры адекватности и между разбросом и мерой статистической устойчивости.

Вместе с тем, между рассмотренными разложениями имеется принципиальное различие, в частности, при увеличении сложности мера адекватности не может увеличиваться, в то время как смещение сначала уменьшается, однако при очень больших значениях сложности обычно начинает расти.

Разложение на смещение и разброс не является удовлетворительным объяснением процесса обучения, поскольку смещение и разброс лишь косвенно характеризуют аппроксимационную способность и статистическую устойчивость метода построения решающих функций.