Комбинирование отношений порядка для восстановления предпочтения на наборе объектов

М. П. Кузнецов, В. В. Стрижов
Московский физико-технический институт

Всероссийская конференция
«Математические методы распознавания образов»
Светлогорск, 24 сентября 2015.

Задача восстановления предпочтения

Цель исследования

Решение задачи восстановления отношения предпочтения на наборе объектов, заданных порядковым признаковым описанием.

Методика

Предлагается подход на основе конусного представления предпочтений, заданных на наборе объектов.

Задачи

1. Разработать метод построения суммы конусов предпочтений для восстановления отношения предпочтения.
2. Предложить метод восстановления предпочтения с использованием порождающего представления конусов.
3. Разработать метод снижения пространства параметров конусной модели.

Постановка задачи восстановления предпочтений

Дано

- Набор объектов $x_1, \ldots, x_m \in X$.
- Набор предпочтений $z_1, \ldots, z_n$ на X: $z_j(x_i, x_k) = \mathbb{I}[x_i \succeq_j x_k]$, z_j — отношение частичного или линейного порядка.
- Целевое отношение предпочтения $z_0(x_i, x_k) = \mathbb{I}[x_i \succeq x_k]$.

Требуется

Построить агрегированное отношение предпочтения z_f, задаваемое отображением $f(x_i) \in \mathbb{R}$,

- Удовлетворяющее условию монотонности по всем $z_1, \ldots, z_n$,

$$x_i \succeq_1 x_k, \ldots, x_i \succeq_n x_k \quad \to \quad f_i \geq f_k,$$

- наилучшим образом приближающее целевое предпочтение z_0:

$$S(X, z_f, z_0) \ \to \ \min,$$

где $S(X, z_f, z_0)$ — функция ошибки, описывающая различие между отношениями z_f и z_0.

Предметная область

- Область социального выбора: X — множество кандидатов, $z_1, \ldots, z_n$ — избиратели.
- Задача комбинирования ранжирований: X — множество документов, $z_1, \ldots, z_n$ — ответы поисковых систем.
- Обучение ранжированию: z_0 — оценки асессоров поисковой системы.
- Порядковая классификация: X — множество объектов, z_0 задается конечным множеством меток классов.

Задача категоризации видов Красной книги РФ

Данные: экспертная анкета

Вид	Численность	Площадь ареала	Генетическое разнообразие	Категория
Зеленый осетр	2	2	0	1
Ладожский сиг	0	2	1	2
Длиннопёрая палия	3	1	0	3
Полярный медведь	3	3	0	4
Канадский песочник	2	1	0	3
Азовская белуга	1	3	1	1
Водяной орех	3	3	2	2
Омфалина гудзонская	2	2	0	3
Сахалинский осетр	1	2	1	1
Гадюка Динника	3	3	2	2
Амурский тигр	2	2	1	2
Тропический лишайник	2	1	1	5

Описание признаков

Признак	Шкала
Численность	3 — высокая 2 — низкая 1 — критически низкая 0 — неизвестно
Площадь ареала	3 — большая 2 — ограниченная 1 — крайне ограниченная 0 — неизвестно
Генетическое разнообразие	3 — высокое 2 — низкое 1 — неизвестно
Категория	5 — наименее угрожаемые 4 — в уязвимости 3 — под угрозой исчезновения 2 — в критическом состоянии 1 — вымершие в дикой природе

Попарное доминирование признаков

	Численность	Площадь ареала	Генетическое разнообразие
Численность	1	1	1
Площадь ареала	0	1	0
Генетическое разнообразие	0	0	1

Методы восстановления предпочтения

Для множества объектов X и отношения z_j определена матрица предпочтений $\mathbf{Z}_j$: $\mathbf{Z}_j(i,k) = z_j(x_i, x_k)$.
Методы, основанные на построении комбинации матриц $\mathbf{Z}_1, \dots, \mathbf{Z}_n$:

1. [Cohen et al., 1999]: линейная оценка матрицы предпочтений $\hat{\mathbf{Z}} = \sum\limits_{j=1}^{n} w_j \mathbf{Z}_j$,
   восстановление линейного порядка $\mathbf{f}$ по матрице $\hat{\mathbf{Z}}$.
2. [Liu et al., 2007]: построение взвешенной комбинации $f(x_i) = \sum\limits_{j=1}^{n} w_j r_{ij}$,
   $r_{ij} = \#\{k \mid x_i \succeq_j x_k\} = \sum\limits_{k=1}^{m} \mathbf{Z}(i,k)$.
3. [Volkovs et al., 2012]: построение признакового пространства на основе SVD-разложения $\mathbf{Z}_j = \mathbf{U}_j \mathbf{\Sigma}_j \mathbf{V}_j^{\mathsf{T}}$.

Конусное представление предпочтений

Дано

- Набор объектов $x_1, \dots, x_m \in X$.
- Набор предпочтений $z_1, \dots, z_n$ на X: $z_j(x_i, x_k) = \mathbb{I}[x_i \succeq_j x_k]$
- Целевое отношение предпочтения $z_0(x_i, x_k) = \mathbb{I}[x_i \succeq x_k]$.

Определение: конус предпочтений

$\mathcal{X}$ — конус предпочтений, задаваемый полиэдральным представлением с матрицей $\mathbf{A}$ размера $m^2 \times m$:

$$\mathcal{X} = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{0}\},$$

где строка матрицы $\mathbf{A}$ вида $[0, \dots, 0, -1_i, 0, \dots, 0, 1_k, 0, \dots, 0]$ соответствует неравенству $x_i \succeq x_k$.

1. $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_n$ — конусы, соответствующие предпочтениям $z_1, \dots, z_n$.
2. $\mathcal{Y}_0$ — конус, соответствующий целевому предпочтению z_0.

Построение суммы конусов предпочтений

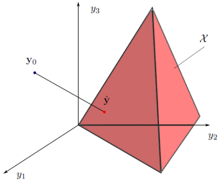
Конусная модель восстановления предпочтений

$$\mathbf{f} \in \mathcal{X}_f = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{X}_n, \quad S(X, z_f, z_0) = d(\mathcal{X}_f, \mathcal{Y}_0) \to \min.$$

Решение: проекция на допустимое множество значений

$$\hat{\mathbf{f}} = \mathop{\arg\min}_{\mathbf{f} \in \mathcal{X}_f,\ \mathbf{y}_0 \in \mathcal{Y}_0} \|\mathbf{f} - \mathbf{y}_0\|_2,$$

$$\hat{\mathbf{f}} = P_{\mathcal{X}_f}(\mathbf{y}_0).$$



Алгоритм построения суммы конусов

Суммой Минковского полиэдральных конусов $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{X}_n$, заданных матрицами $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_n$, является конус

$$\mathcal{X}_f = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}^{(n)}\mathbf{x} \leqslant \mathbf{0}\},$$

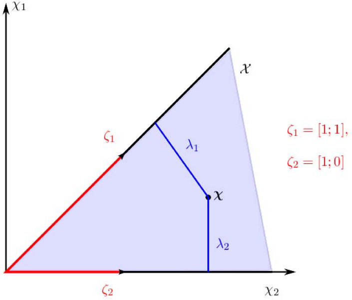
задаваемый матрицей $\mathbf{A}^{(n)} = \mathbf{V}_{n-1}^{\mathsf{T}}\mathbf{A}^{(n-1)}$, где $\mathbf{V}_{n-1}$— часть ФСР для уравнения с матрицей $\begin{pmatrix} -\mathbf{A}^{(n-1)} \\ \mathbf{A}_n \end{pmatrix}$.

Порождающее представление конуса

Порождающее представление конуса

Полиэдральный конус $\mathcal{X}$ допускает представление через конечный набор порождающих элементов $\zeta_1, \dots, \zeta_k$:

$$\mathcal{X} = \left\{ \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \zeta_k \mid \lambda_k \geq 0 \right\}.$$



Теорема (о порождающем представлении конуса)

Столбцы матрицы предпочтений $\mathbf{Z}(i, k) = \mathbb{I}[x_i \succeq x_k]$ являются порождающими элементами конуса предпочтений,

$$\mathcal{X} \supset \{\mathbf{Z}\boldsymbol{\lambda} \mid \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m_+\}.$$

Оценка параметров порождающего представления

Конусная модель восстановления предпочтений

$$\mathbf{f} \in \mathcal{X}_f = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{X}_n, \quad S(X, z_f, z_0) = d(\mathcal{X}_f, \mathcal{Y}_0) \to \min .$$

Использование порождающего представления

Линейная конусная модель: $\mathcal{X}_j = \{\mathbf{Z}_j \boldsymbol{\lambda}_j \mid \boldsymbol{\lambda}_j \in \mathbb{R}^m_+\}$,

$$\mathbf{f}(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{Z}_j \boldsymbol{\lambda}_j, \quad \boldsymbol{\lambda}_j \geq \mathbf{0}.$$

Минимизация расстояния между конусами:

$$(\hat{\boldsymbol{\lambda}}_1, \ldots, \hat{\boldsymbol{\lambda}}_n) = \mathop{\arg\min}_{\boldsymbol{\lambda}_1, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_n \geq \mathbf{0}} \|\mathbf{Z}_0 \mathbf{1} - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{Z}_j \boldsymbol{\lambda}_j\|_2.$$

Итеративный алгоритм оценки параметров

Шаг алгоритма — последовательное решение задач неотрицательной линейной регрессии

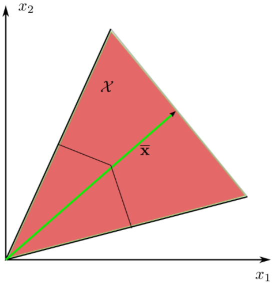
$$\hat{\boldsymbol{\lambda}}_j^t = \mathop{\arg\min}_{\boldsymbol{\lambda}_j \geq \mathbf{0}} \|\mathbf{Z}_0 \mathbf{1} - \sum_{j'=1}^{j-1} \mathbf{Z}_{j'} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{j'}^t - \sum_{j'=j+1}^{m} \mathbf{Z}_{j'} \hat{\boldsymbol{\lambda}}_{j'}^{t-1} - \mathbf{Z}_j \boldsymbol{\lambda}_j\|_2.$$

Регуляризация конусной модели

Линейная конусная модель:

$$\mathbf{f}(X) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{Z}_j \boldsymbol{\lambda}_j, \quad \boldsymbol{\lambda}_j \geq \mathbf{0}.$$

Рассмотрим в конусе $\mathcal{X}$ центральную точку $\overline{\mathbf{x}} = \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \mathbf{z}_j$.



Теорема (о регуляризации конусной модели)

В случае замены каждого конуса $\mathcal{X}_k = \{\sum \lambda_{jk} \mathbf{z}_{jk} \mid \boldsymbol{\lambda}_k \geq \mathbf{0}\}$ его центральной точкой конусная модель представима в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) = \hat{\mathbf{Z}} \boldsymbol{\lambda}, \quad \hat{\mathbf{Z}} = \sum_{j=1}^{n} w_j \mathbf{Z}_j,$$

при ограничениях $w_j \geq 0, \ \sum\limits_{k=1}^{m} \lambda_k = 1, \ \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}.$

Оценка параметров регуляризованной модели

Минимизация расстояния между конусами

Для регуляризованной модели задача минимизация расстояния между конусами $\rho(\mathcal{X}_f, \mathcal{Y}_0)$ сводится к минимизации нормы разности матриц $\hat{\mathbf{Z}}$, $\mathbf{Z}_0$:

$$\hat{\mathbf{w}} = \arg\min_{\mathbf{w}} \|\hat{\mathbf{Z}} - \mathbf{Z}_0\|_F^2 \propto -\tau(z_f, z_0).$$

Алгоритм восстановления предпочтения

Алгоритм основывается на построении взвешенного графа предпочтений, описываемого матрицей смежности $\hat{\mathbf{Z}}$:

1. Оценка весов w_j в модели $\hat{\mathbf{Z}} = \sum\limits_{j=1}^{n} w_j \mathbf{Z}_j$.
2. Оценка параметров $\boldsymbol{\lambda}$ и построение оценок объектов $\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) = \hat{\mathbf{Z}}\boldsymbol{\lambda}$.

Задача категоризации видов Красной книги РФ

Данные: экспертная анкета

Вид	Численность	Площадь ареала	Генетическое разнообразие	Категория
Зеленый осетр	2	2	0	1
Ладожский сиг	0	2	1	2
Длиннопёрая палия	3	1	0	3
Полярный медведь	3	3	0	4
Канадский песочник	2	1	0	3
Азовская белуга	1	3	1	1
Водяной орех	3	3	2	2
Омфалина гудзонская	2	2	0	3
Сахалинский осетр	1	2	1	1
Гадюка Динника	3	3	2	2
Амурский тигр	2	2	1	2
Тропический лишайник	2	1	1	5

Описание признаков

Признак	Шкала
Численность	3 — высокая 2 — низкая 1 — критически низкая 0 — неизвестно
Площадь ареала	3 — большая 2 — ограниченная 1 — крайне ограниченная 0 — неизвестно
Генетическое разнообразие	3 — высокое 2 — низкое 1 — неизвестно
Категория	5 — наименее угрожаемые 4 — в уязвимости 3 — под угрозой исчезновения 2 — в критическом состоянии 1 — вымершие в дикой природе

Попарное доминирование признаков

	Численность	Площадь ареала	Генетическое разнообразие
Численность	1	1	1
Площадь ареала	0	1	0
Генетическое разнообразие	0	0	1

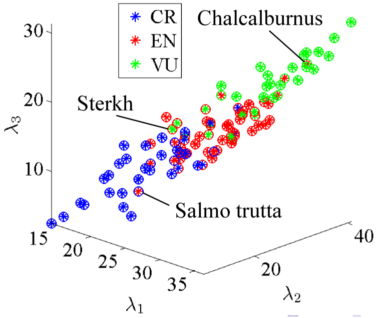
Результаты категоризации

Ошибка — средняя потеря Хэмминга

$$L_H(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} |y_i - \hat{y}_i|_H.$$

Категоризация Красной книги: сравнение алгоритмов.
OW — регуляризованная конусная модель.

Алгоритм	L_H
OW	**0.52***
Копулы	0.59
CR	0.71
Trees	0.55
SVM	0.66
kNN	0.72



Порядковая классификация, данные UCI

Функция ошибки:

1. Средняя абсолютная ошибка, $L_a(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}}) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[y_i \neq \hat{y}_i]$,
2. Средняя ошибка Хэмминга, $L_H(\mathbf{y}, \hat{\mathbf{y}})$.

Результаты на данных UCI: линейные признаки

	Средняя абсолютная ошибка (± 0.01)					Средняя ошибка Хэмминга (± 0.01)				
Данные	SVM	POF	Trees	OW	KNN	SVM	POF	Trees	OW	KNN
Pyr	**0.50***	0.62	0.61	0.54	0.55	**0.64***	0.90	0.84	0.75	0.75
CPU	0.44	0.44	0.47	**0.42***	0.51	0.53	0.53	0.53	**0.49***	0.61
Boston	**0.38***	0.48	0.41	**0.39***	0.47	**0.46***	0.65	**0.47***	**0.46***	0.62
Computer	**0.32***	0.71	0.38	0.34	0.60	**0.35***	1.36	0.41	0.39	0.90
Abalone	**0.53***	0.59	0.57	0.56	0.60	**0.78***	0.92	**0.77***	0.81	0.88

Результаты на данных UCI: порядковые признаки

	Средняя абсолютная ошибка (± 0.01)					Средняя ошибка Хэмминга (± 0.01)				
Данные	SVM	POF	Trees	OW	KNN	SVM	POF	Trees	OW	KNN
Pyr	0.57	0.58	0.60	0.62	**0.49***	**0.71***	0.77	0.79	0.79	0.76
CPU	0.51	**0.39***	0.47	**0.40***	0.43	0.65	**0.45***	0.56	0.47	0.51
Boston	**0.40***	0.48	**0.40***	0.43	**0.41***	0.49	0.68	**0.46***	0.50	0.51
Computer	0.44	0.69	0.41	**0.37***	0.45	0.53	1.38	**0.45***	**0.44***	0.55
Abalone	0.78	**0.59***	**0.57***	**0.58***	**0.59***	1.78	0.92	**0.76***	0.85	0.89
Cars	0.19	0.19	0.08	0.16	**0.06***	0.24	0.26	**0.08***	0.19	**0.07***
RedBook	0.56	0.61	**0.50***	**0.49***	0.59	0.66	0.74	**0.55***	0.59	0.72

Заключение

Основные результаты

1. Предложен метод построения суммы конусов предпочтений для решения задачи восстановления отношения предпочтения на множестве объектов, заданных порядковым признаковым описанием.
2. Предложен метод восстановления предпочтения с использованием порождающего представления конусов.
3. Предложен метод снижения размерности пространства параметров конусной модели.
4. Решена прикладная задача категоризации таксонов Красной книги по экспертным оценкам, предоставленным министерством природных ресурсов РФ.

Публикации по теме работы

1. M.P. Kuznetsov, V.V. Strijov. Methods of expert estimations concordance for integral quality estimation // Expert Systems with Applications, 41(4):1988-1996, 2014.
2. М. П. Кузнецов, В. В. Стрижов, М.М Медведникова. Алгоритм многоклассовой классификации объектов, описанных в ранговых шкалах. // Научно-технический вестник СПб ГПУ. Информатика. Телекоммуникации. Управление, 5, 2012.