

Многокритериальная регуляризация вероятностных тематических моделей коллекций текстовых документов

Воронцов Константин Вячеславович

ВЦ РАН • МФТИ

Семинар «Стохастический анализ в задачах» НМУ–МФТИ
19 апреля 2014

Содержание

- 1 Матричные разложения и тематическое моделирование**
 - Задачи матричного разложения
 - Вероятностное тематическое моделирование
 - Тематические модели PLSA и LDA, EM-алгоритм
- 2 Аддитивная регуляризация тематических моделей**
 - Регуляризация в EM-алгоритме
 - Примеры регуляризаторов
 - Методология APTM
- 3 Регуляризация интерпретируемости тем**
 - Формализация требований интерпретируемости
 - Эксперименты, результаты, выводы
 - Открытые проблемы, перспективы

Задачи матричного разложения

Дано: матрица $Z = \|z_{ij}\|_{n \times m}$.

Найти: матрицы $X = \|x_{it}\|_{n \times k}$ и $Y = \|y_{tj}\|_{k \times m}$ такие, что

$$\|Z - XY\|_D = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m D\left(z_{ij}, \sum_t x_{it} y_{tj}\right) \rightarrow \min_{X, Y}$$

Типы задач:

- различные нормы D : Фробениуса, KL-дивергенция, ...
- неотрицательные матричные разложения: $x_{it} \geq 0$, $y_{tj} \geq 0$
- стохастические матричные разложения: $\sum_i x_{it} = 1$, $\sum_t y_{tj} = 1$
- разреженные данные: известны только z_{ij} , $(i, j) \in \Omega$:

$$\sum_{(i,j) \in \Omega} D\left(z_{ij}, \sum_t x_{it} y_{tj}\right) \rightarrow \min_{X, Y}$$

Примеры прикладных задач матричного разложения

1 Анализ данных жидкостной хроматографии

$$z(t, \lambda) = \sum_i X_i(t) Y_i(\lambda)$$

дано: $z(t, \lambda)$ — выход сканирующего УФ-детектора;

найти: $X_i(t)$ — хроматограмма i -го вещества, t — время

$Y_i(\lambda)$ — спектр i -го вещества, λ — длина волны.

2 Анализ данных ДНК-микрочипов

$$I(p, k) = \sum_g a_{pg} C_{gk}$$

дано: $I(p, k)$ — интенсивность свечения p -й пробы на k -м чипе;

найти: a_{pg} — коэффициент сродства p -й пробы g -му гену,

C_{gk} — концентрация g -го гена на k -м чипе.

Примеры прикладных задач матричного разложения

3 Коллаборативная фильтрация

$$R_{iu} = \sum_t p_i(t)q_u(t)$$

дано: R_{iu} — рейтинги товаров i , поставленные пользователем u ;

найти: $p_i(t)$ — профиль интересов товара i ;

$q_u(t)$ — профиль интересов пользователя u .

4 Тематическое моделирование текстовых коллекций

$$p(w|d) = \sum_t p(w|t)p(t|d)$$

дано: $p(w|d)$ — частоты слов w в документах d ;

найти: $p(w|t)$ — распределения слов w в темах t ,

$p(t|d)$ — распределения тем t в документах d .

Цели вероятностного тематического моделирования (ВТМ)

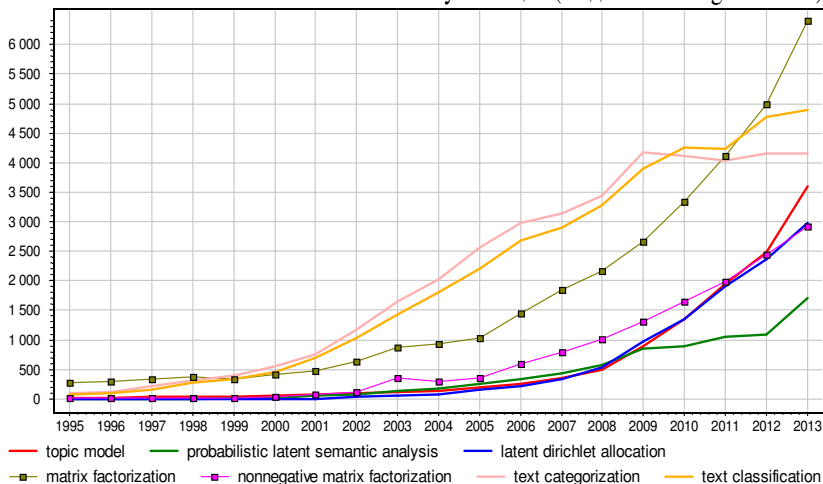
- Тематический поиск документов $p(t|d)$ и объектов $p(t|x)$ по тексту любой длины или по любому объекту
- Категоризация, классификация, аннотирование, суммаризация, сегментация текстовых документов

Приложения:

- Поиск научной информации
- Выявление трендов и фронта исследований
- Поиск специалистов (expert search), рецензентов, проектов
- Анализ и агрегирование новостных потоков
- Рубрикация документов, изображений, видео, музыки
- Рекомендующие системы, коллаборативная фильтрация
- Аннотация генома и другие задачи биоинформатики
- Анализ дискретизированных биомедицинских сигналов

Матричные разложения и тематическое моделирование

Число публикаций (по данным Google Scholar)



Проблемы матричных разложений

- Неединственность решения

$$XY = (XS)(S^{-1}Y) = X'Y'$$

- Неустойчивость решения — следствие неединственности
- Сходимость к локальным экстремумам
- Сходимость к нестационарным точкам

Способы решения:

- Проблемно-ориентированные регуляризации
(будут рассмотрены для тематического моделирования)
- Подбор начальных приближений
- Модификации итерационных алгоритмов
(в следующем докладе Евгения Рябенко)

Задача вероятностного тематического моделирования (VTM)

Базовые предположения:

- каждое слово в документе связано с некоторой темой $t \in T$
- $D \times W \times T$ — дискретное вероятностное пространство
- выборка $(d_i, w_i, t_i)_{i=1}^n \sim p(d, w, t)$ случайная, независимая
- d_i, w_i — наблюдаемые, темы t_i — скрытые
- гипотеза условной независимости: $p(w|d, t) = p(w|t)$

Вероятностная модель порождения документов:

$$p(w|d) = \sum_{t \in T} \underbrace{p(w|t)}_{\phi_{wt}} \underbrace{p(t|d)}_{\theta_{td}}$$

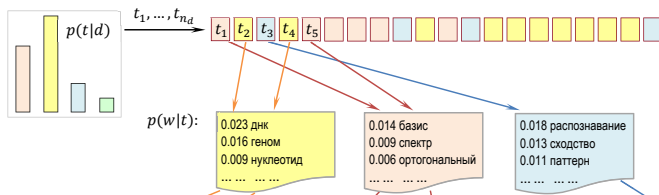
- $\phi_{wt} \equiv p(w|t)$ — распределение терминов в темах $t \in T$;
- $\theta_{td} \equiv p(t|d)$ — распределение тем в документах $d \in D$.

Прямая задача: по ϕ_{wt}, θ_{td} сгенерировать документ d .

Обратная задача: по $\hat{p}(w|d) \equiv \frac{n_{dw}}{n_d}$ найти параметры ϕ_{wt}, θ_{td} .

Прямая задача ВТМ: порождение коллекции

Порождение слов документа d из $p(w|d) = \sum_{t \in T} p(w|t)p(t|d)$



w_1, \dots, w_{n_d} :

Разработан спектрально-аналитический подход к выявлению размытых протяженных повторов в геномных последовательностях. Метод основан на разномасштабном оценивании сходства нуклеотидных последовательностей в пространстве коэффициентов разложения фрагментов кривых GC- и GA-содержания по классическим ортогональным базисам. Найдены условия оптимальной аппроксимации, обеспечивающие автоматическое распознавание повторов различных видов (прямых и инвертированных, а также тандемных) на спектральной матрице сходства. Метод одинаково хорошо работает на разных масштабах данных. Он позволяет выявлять следы сегментных дупликаций и мегасателлитные участки в геноме, районы синтении при сравнении пары геномов. Его можно использовать для детального изучения фрагментов хромосом (поиска размытых участков с умеренной длиной повторяющегося паттерна).

Обратная задача ВТМ: стохастическое матричное разложение

Дано:

W — словарь, множество терминов (слов, словосочетаний),

D — множество (коллекция, корпус) текстовых документов,

n_{dw} — сколько раз термин $w \in W$ встретился в документе $d \in D$.

$\hat{p}(w|d) \equiv \frac{n_{dw}}{n_d}$ — эмпирические частоты терминов в документах

Найти: матричное разложение

$$F_{W \times D} \approx \Phi_{W \times T} \cdot \Theta_{T \times D}$$

$F = \|\hat{p}(w|d)\|_{W \times D}$ — известная матрица частот,

$\Phi = \|\phi_{wt}\|_{W \times T}$ — искомая матрица терминов тем $\phi_{wt} = p(w|t)$,

$\Theta = \|\theta_{td}\|_{T \times D}$ — искомая матрица тем документов $\theta_{td} = p(t|d)$.

Принцип максимума правдоподобия

Задача: максимизировать логарифм правдоподобия

$$\mathcal{L}(\Phi, \Theta) = \sum_{d \in D} \sum_{w \in d} n_{dw} \ln \sum_{t \in T} \phi_{wt} \theta_{td} \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}$$

при ограничениях неотрицательности и нормировки

$$\phi_{wt} \geq 0; \quad \sum_{w \in W} \phi_{wt} = 1; \quad \theta_{td} \geq 0; \quad \sum_{t \in T} \theta_{td} = 1$$

Это взвешенная сумма дивергенций Кульбака–Лейблера между

$\hat{p}(w|d) = \frac{n_{dw}}{n_d}$ — эмпирическими частотами и

$p(w|d) = \sum_t \phi_{wt} \theta_{td}$ — тематическими моделями документов:

$$\text{KL}(\hat{p}||p) = \sum_{d \in D} n_d \sum_{w \in d} \hat{p}(w|d) \ln \frac{\hat{p}(w|d)}{p(w|d)} \rightarrow \min_{\Phi, \Theta}$$

Probabilistic Latent Semantic Analysis [Hofmann, 1999]

Теорема

Если Φ, Θ — решение задачи максимизации правдоподобия, то оно удовлетворяет системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{E-шаг: } p_{tdw} = \frac{\phi_{wt}\theta_{td}}{\sum_{s \in T} \phi_{ws}\theta_{sd}}; \quad \text{— вспомогательные переменные} \\ \text{M-шаг: } \phi_{wt} = \frac{n_{wt}}{n_t}; \quad n_{wt} = \sum_{d \in D} n_{dw}p_{tdw}; \quad n_t = \sum_{w \in W} n_{wt}; \\ \theta_{td} = \frac{n_{td}}{n_d}; \quad n_{td} = \sum_{w \in D} n_{dw}p_{tdw}; \quad n_d = \sum_{t \in T} n_{td}; \end{array} \right.$$

EM-алгоритм — чередование E- и M-шага до сходимости.
Это решение системы уравнений методом простых итераций.

✓ *Идея на будущее: можно использовать и другие методы!*

Вероятностная интерпретация шагов EM-алгоритма

E-шаг — это формула Байеса:

$$p_{tdw} = p(t|d, w) = \frac{p(w, t|d)}{p(w|d)} = \frac{p(w|t)p(t|d)}{p(w|d)} = \frac{\phi_{wt}\theta_{td}}{\sum_{s \in T} \phi_{ws}\theta_{sd}}$$

$n_{dwt} = n_{dw}p(t|d, w)$ — оценка числа троек (d, w, t) в коллекции

M-шаг — это частотные оценки условных вероятностей:

$$\phi_{wt} = \frac{n_{wt}}{n_t} \equiv \frac{\sum_{d \in D} n_{dwt}}{\sum_{d \in D} \sum_{w \in d} n_{dwt}}, \quad \theta_{td} = \frac{n_{td}}{n_d} \equiv \frac{\sum_{w \in d} n_{dwt}}{\sum_{w \in W} \sum_{t \in T} n_{dwt}}$$

Краткая запись через знак пропорциональности \propto :

$$p(t|d, w) \propto \phi_{wt}\theta_{td}; \quad \phi_{wt} \propto n_{wt}; \quad \theta_{td} \propto n_{td};$$

Рациональный EM-алгоритм

Идея: E-шаг встраивается внутрь M-шага

Вход: коллекция D , число тем $|T|$, число итераций i_{\max} ;

Выход: матрицы терминов тем Θ и тем документов Φ ;

1 инициализация ϕ_{wt}, θ_{td} для всех $d \in D, w \in W, t \in T$;

2 **для всех** итераций $i = 1, \dots, i_{\max}$

3 $n_{wt}, n_{td}, n_t, n_d := 0$ для всех $d \in D, w \in W, t \in T$;

4 **для всех** документов $d \in D$ и всех слов $w \in d$

5
$$p_{tdw} = \frac{\phi_{wt}\theta_{td}}{\sum_s \phi_{ws}\theta_{sd}} \text{ для всех } t \in T;$$

6
$$n_{wt}, n_{td}, n_t, n_d += n_{dw}p_{tdw} \text{ для всех } t \in T;$$

7
$$\phi_{wt} := n_{wt}/n_t \text{ для всех } w \in W, t \in T;$$

8
$$\theta_{td} := n_{td}/n_d \text{ для всех } d \in D, t \in T;$$

Эвристики

Разреживание распределений $p(t|d, w)$

- пропорциональное распределение без разреживания
- сэмплирование Гиббса: $t \sim p(t|d, w)$ для каждой позиции w_i
- сэмплирование: $t \sim p(t|d, w)$ для каждого слова (d, w)
- максимизация (оптимальный байесовский классификатор):
 $t = \arg \max_t p(t|d, w)$ для каждого слова (d, w)

Чередование сэмплирования и максимизации приводит к лучшему локальному максимуму правдоподобия [Д. Елшин]

Частое обновление параметров ϕ_{wt}, θ_{td} :

- после каждого прохода всей коллекции
- после каждого документа
- после каждого слова (самая быстрая сходимость)

Онлайновый EM-алгоритм (для больших коллекций)

- 1 инициализировать ϕ_{wt} для всех $w \in W$, $t \in T$;
- 2 $n_{wt} := 0$, $n_t := 0$ для всех $w \in W$, $t \in T$;
- 3 для всех пачек документов D_j , $j = 1, \dots, J$
- 4 $\tilde{n}_{wt} := 0$, $\tilde{n}_t := 0$ для всех $w \in W$, $t \in T$;
- 5 для всех документов d из пачки D_j
- 6 инициализировать θ_{td} для всех $t \in T$;
- 7 повторять
- 8 $p_{tdw} = \frac{\phi_{wt}\theta_{td}}{\sum_s \phi_{ws}\theta_{sd}}$ для всех $w \in d$, $t \in T$;
- 9 $\theta_{td} := \frac{1}{n_d} \sum_{w \in d} n_{dw} p_{tdw}$ для всех $t \in T$;
- 10 пока θ_d не сойдётся;
- 11 $\tilde{n}_{wt}, \tilde{n}_t += n_{dw} p_{tdw}$ для всех $w \in d$, $t \in T$;
- 12 $n_{wt} := \rho_j n_{wt} + \tilde{n}_{wt}$; $n_t := \rho_j n_t + \tilde{n}_t$ для всех $w \in W$, $t \in T$;
- 13 $\phi_{wt} := n_{wt} / n_t$ для всех $w \in W$, $t \in T$;

От PLSA к LDA (Latent Dirichlet Allocation)

Недостатки PLSA:

- Плохо оцениваются $p(w|t)$ и $p(t|d)$ редких слов и тем
- Переобучение при малых $\frac{|D|}{|T|}$

Способы устранения этих недостатков:

- Увеличить объём коллекции
- Наложить «естественные» ограничения на Φ и Θ

David Blei, Andrew Ng, Michael Jordan. Latent Dirichlet allocation
Journal of Machine Learning Research, 2003. — No. 3. — Pp. 993–1022.

Yi Wang. Distributed Gibbs Sampling of Latent Dirichlet Allocation:
The Gritty Details. 2011.

Asuncion A., Welling M., Smyth P., Teh Y. W. On smoothing and inference for
topic models // Int'l conf. on Uncertainty in Artificial Intelligence, 2009.

Латентное размещение Дирихле, LDA

Вероятностная тематическая модель: $p(w|d) = \sum_{t \in T} \underbrace{p(w|t)}_{\phi_{wt}} \underbrace{p(t|d)}_{\theta_{td}}$

Гипотеза об априорных распределениях Дирихле:

- $\theta_d = (\theta_{td})_{t \in T} \in \mathbb{R}^{|T|}$ — случайные векторы из распределения Дирихле с параметром $\alpha \in \mathbb{R}^{|T|}$:

$$\text{Dir}(\theta_d|\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha_0)}{\prod_t \Gamma(\alpha_t)} \prod_t \theta_{td}^{\alpha_t - 1}, \quad \alpha_0 = \sum_t \alpha_t, \quad \sum_t \theta_{td} = 1;$$

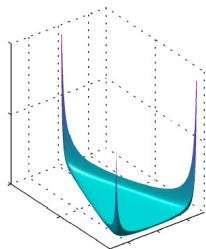
- $\phi_t = (\phi_{wt})_{w \in W} \in \mathbb{R}^{|W|}$ — случайные векторы из распределения Дирихле с параметром $\beta \in \mathbb{R}^{|W|}$:

$$\text{Dir}(\phi_t|\beta) = \frac{\Gamma(\beta_0)}{\prod_w \Gamma(\beta_w)} \prod_w \phi_{wt}^{\beta_w - 1}, \quad \beta_0 = \sum_w \beta_w, \quad \sum_w \phi_{wt} = 1;$$

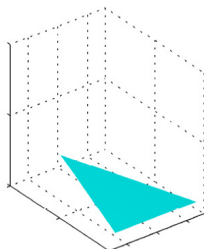
Почему именно распределение Дирихле?

- Является сопряжённым к мультиномиальному распределению
- Может порождать сглаженные или разреженные векторы
- Неплохо описывает кластерные структуры на симплексе

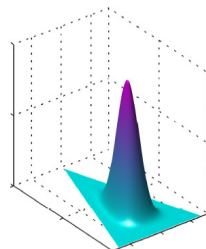
Пример. $\text{Dir}(\theta|\alpha)$ при $|T| = 3$, $\theta, \alpha \in \mathbb{R}^3$:



$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.1$$



$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$$



$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 10$$

Байесовская оценка параметров $\theta_{td} \equiv p(t|d)$

Пусть темы слов в документах $d \in D$ выбираются из θ_d :

$$X_d = \{t_1, \dots, t_{n_d}\} \sim \theta_d.$$

Тогда вероятность встретить каждую из тем t ровно n_{td} раз подчиняется мультиномиальному распределению:

$$p(X_d|\theta_d) = \text{Mult}(n_{1d}, \dots, n_{Td}|\theta_d) = \frac{n_d!}{\prod_t n_{td}!} \prod_t \theta_{td}^{n_{td}}.$$

Если предположить, что $\theta_d \sim \text{Dir}(\alpha)$, то по формуле Байеса апостериорное распределение также из $\text{Dir}(\alpha')$, $\alpha'_t = \alpha_t + n_{td}$:

$$p(\theta_d|X_d) = \frac{p(X_d|\theta_d) \text{Dir}(\theta_d|\alpha)}{\int p(X_d|\theta) \text{Dir}(\theta|\alpha) d\theta} \propto \prod_t \theta_{td}^{n_{td}} \theta_{td}^{\alpha_t - 1} = \text{Dir}(\theta_d; \alpha').$$

Распределение Дирихле — сопряжённое к мультиномиальному, что упрощает байесовское оценивание параметров ϕ_{wt} и θ_{td} .

Байесовская оценка параметров $\theta_{td} \equiv p(t|d)$

Оценка θ_{td} при априорном распределении:

$$E p(t|d, \alpha) = \int \theta_{td} \text{Dir}(\theta_d | \alpha) d\theta_d = \frac{\alpha_t}{\alpha_0}.$$

Пусть известна выборка тем $X_d = \{t_1, \dots, t_{n_d}\} \sim \theta_d$.

Оценка θ_{td} при апостериорном распределении:

$$E p(t|d, X_d, \alpha) = \int \theta_{td} \text{Dir}(\theta_d | \alpha') d\theta_d = \frac{n_{td} + \alpha_t}{\sum_{t'} n_{t'd} + \alpha_{t'}} = \frac{n_{td} + \alpha_t}{n_d + \alpha_0},$$

n_{td} — сколько раз слово документа d было отнесено к теме t ,
 n_d — длина документа в словах.

Замечание. Эта оценка переходит в МП-оценку при $\alpha_t \equiv 0$,
хотя при $\alpha_t = 0$ распределение Дирихле не определено.

Байесовская оценка параметров $\phi_{wt} \equiv p(w|t)$

Оценка ϕ_{wt} при априорном распределении:

$$E p(w|t, \beta) = \int \phi_{wt} \text{Dir}(\phi_t | \beta) d\phi_t = \frac{\beta_w}{\beta_0}.$$

Коллекция порождается двумя распределениями $p(t|d)$, $p(w|t)$.

Часть коллекции, порождённая темой t :

$$X_t = \{(d, w, t) : d \in D, w \sim \phi_t\}.$$

Апостериорное распределение для ϕ_t по формуле Байеса:

$$p(\phi_t | X_t, \beta) = \frac{p(X_t | \phi_t) \text{Dir}(\phi_t | \beta)}{\int p(X_t | \phi) \text{Dir}(\phi | \beta) d\phi} = \text{Dir}(\phi_t | \beta'), \quad \beta'_w = \beta_w + n_{wt}.$$

Оценка ϕ_{wt} через апостериорное распределение:

$$E p(w|t, X_d, \beta) = \int \phi_{wt} \text{Dir}(\phi_t | \beta') d\phi_t = \frac{n_{wt} + \beta_w}{n_t + \beta_0}.$$

Главное отличие LDA от PLSA

Оценки условных вероятностей $\phi_{wt} \equiv p(w|t)$, $\theta_{td} \equiv p(t|d)$:

- в PLSA — несмещённые оценки максимума правдоподобия:

$$\phi_{wt} = \frac{n_{wt}}{n_t}, \quad \theta_{td} = \frac{n_{td}}{n_d}$$

- в LDA — сглаженные байесовские оценки:

$$\phi_{wt} = \frac{n_{wt} + \beta_w}{n_t + \beta_0}, \quad \theta_{td} = \frac{n_{td} + \alpha_t}{n_d + \alpha_0}.$$

Различия между LDA и PLSA практически исчезают

- на больших данных
- при игнорировании редких слов (робастные алгоритмы)

Воронцов К.В., Потапенко А.А. Модификации EM-алгоритма для вероятностного тематического моделирования // Машинное обучение и анализ данных, 2013. — Т. 1, № 6. — С. 657–686.

Недостатки LDA

- 1 распределение Дирихле удобно математически, но не имеет лингвистических обоснований
- 2 сглаживание вместо разреживания
- 3 байесовский вывод требует интегрирования по пространству параметров модели, которое только в базовом варианте LDA элементарно
- 4 построение композитных и многофункциональных моделей становится громоздкой математической задачей
- 5 на больших данных почти нет различий между LDA и PLSA
- 6 переобучение PLSA связано только с редкими словами, и это отнюдь не главный недостаток PLSA (плохо поняли суть проблемы и боремся не с тем врагом)

Предлагается перерыв и пофилософствовать за чашкой чая...

Две знаменитые цитаты:

Представляется важной задача освобождения всюду, где это возможно, от излишних вероятностных допущений

— *А. Н. Колмогоров*

Теория информации и теория алгоритмов, 1987.

Математика — часть физики. Физика — экспериментальная, естественная наука, часть естествознания. Математика — это та часть физики, в которой эксперименты дёшевы.

— *В. И. Арнольд.*

Неустойчивость! Эксперимент на модельных данных

Модельные коллекции порождаются заданными матрицами Φ_0 и Θ_0 при $|D| = 500$, $|W| = 1000$, $|T| = 30$, $n_d \in [100, 600]$.

Отклонение восстановленных распределений $p(i|j)$ от исходных модельных распределений $p_0(i|j)$ измеряются средним расстоянием Хеллингера:

$$H(p, p_0) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{p(i|j)} - \sqrt{p_0(i|j)} \right)^2},$$

как для самих матриц Φ и Θ , так и для их произведения:

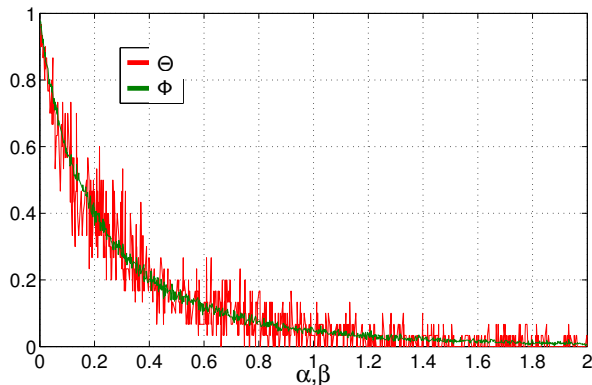
$$D_\Phi(\Phi, \Phi_0) = H(\Phi, \Phi_0);$$

$$D_\Theta(\Theta, \Theta_0) = H(\Theta, \Theta_0);$$

$$D_{\Phi\Theta}(\Phi\Theta, \Phi_0\Theta_0) = H(\Phi\Theta, \Phi_0\Theta_0).$$

Генерация модельных данных различной степени разреженности

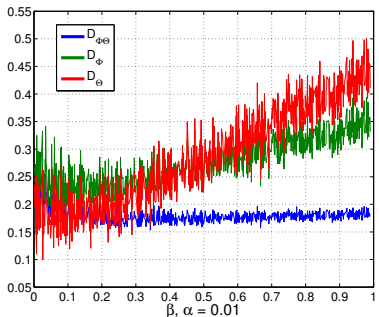
Зависимость разреженности (доли почти нулевых элементов) распределений $\theta_d^0 \sim \text{Dir}(\alpha)$ и $\phi_t^0 \sim \text{Dir}(\beta)$ от параметров α и β симметричного распределения Дирихле:



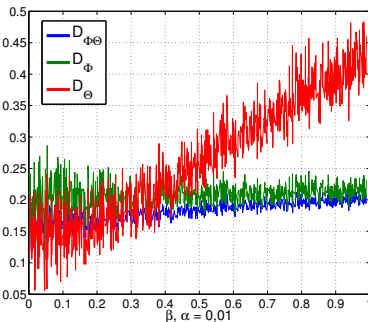
Эксперимент: неустойчивость восстановления Φ , Θ

Зависимость точности восстановления матриц Φ , Θ и $\Phi\Theta$ от разреженности матрицы Φ_0

PLSA



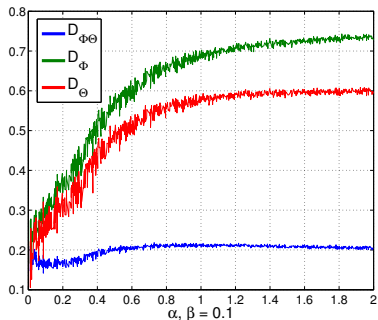
LDA



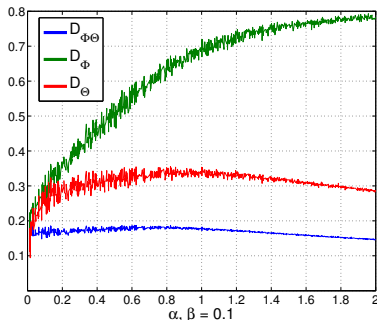
Эксперимент: неустойчивость восстановления Φ , Θ

Зависимость точности восстановления матриц Φ , Θ и $\Phi\Theta$ от разреженности матрицы Θ_0

PLSA



LDA



Выводы

- 1 Произведение $\Phi\Theta$ восстанавливается устойчиво, точность восстановления не зависит от разреженности исходных модельных данных Φ_0, Θ_0
- 2 Матрицы Φ, Θ восстанавливаются неустойчиво, результат зависит от случайной инициализации
- 3 Методы PLSA и LDA одинаково неустойчивы (сглаживание не спасает от неединственности)
- 4 Устойчивое восстановление матриц Φ, Θ происходит только при сильной разреженности (более 80% нулей)

Реализация экспериментов:

Виталий Глушаченков. Магистерская диссертация. МФТИ, 2013.

Михаил Колупаев. Курсовая работа. ВШЭ, 2013.

Аддитивная регуляризация тематической модели

Пусть, наряду с правдоподобием, требуется максимизировать ещё n критериев $R_i(\Phi, \Theta)$, $i = 1, \dots, n$ — регуляризаторов.

Метод многокритериальной оптимизации — скаляризация.

Задача: максимизировать регуляризованное правдоподобие

$$\underbrace{\sum_{d \in D} \sum_{w \in d} n_{dw} \ln \sum_{t \in T} \phi_{wt} \theta_{td}}_{\text{log-likelihood } \mathcal{L}(\Phi, \Theta)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \tau_i R_i(\Phi, \Theta)}_{R(\Phi, \Theta)} \rightarrow \max_{\Phi, \Theta}$$

при ограничениях неотрицательности и нормировки

$$\phi_{wt} \geq 0; \quad \sum_{w \in W} \phi_{wt} = 1; \quad \theta_{td} \geq 0; \quad \sum_{t \in T} \theta_{td} = 1$$

где $\tau_i > 0$ — коэффициенты регуляризации.

EM-алгоритм с регуляризацией M-шага

Теорема

Если Φ, Θ — решение задачи максимизации регуляризованного правдоподобия, то оно удовлетворяет системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{E-шаг: } p_{tdw} = \frac{\phi_{wt}\theta_{td}}{\sum_{s \in T} \phi_{ws}\theta_{sd}}; \\ \text{M-шаг: } \phi_{wt} \propto \left(n_{wt} + \phi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \phi_{wt}} \right)_+; \quad n_{wt} = \sum_{d \in D} n_{dw} p_{tdw}; \\ \theta_{td} \propto \left(n_{td} + \theta_{td} \frac{\partial R}{\partial \theta_{td}} \right)_+; \quad n_{td} = \sum_{w \in D} n_{dw} p_{tdw}; \end{array} \right.$$

При $R(\Phi, \Theta) = 0$ это формулы EM-алгоритма для PLSA.

Напоминания. Условия Каруша–Куна–Таккера

Задача математического программирования:

$$\begin{cases} f(x) \rightarrow \min_x; \\ g_i(x) \leq 0, & i = 1, \dots, m; \\ h_j(x) = 0, & j = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Необходимые условия. Если x — точка локального минимума, то существуют множители $\mu_i, i = 1, \dots, m, \lambda_j, j = 1, \dots, k$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0, & \mathcal{L}(x; \mu, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \mu_i g_i(x) + \sum_{j=1}^k \lambda_j h_j(x); \\ g_i(x) \leq 0; h_j(x) = 0; & \text{(исходные ограничения)} \\ \mu_i \geq 0; & \text{(двойственные ограничения)} \\ \mu_i g_i(x) = 0; & \text{(условие дополняющей нежёсткости)} \end{cases}$$

Доказательство Теоремы о регуляризации M-шага

1. Условия ККТ для ϕ_{wt} :

$$\sum_d n_{dw} \frac{\theta_{td}}{p(w|d)} + \frac{\partial R}{\partial \phi_{wt}} = \lambda_t - \lambda_{wt}; \quad \lambda_{wt} \geq 0; \quad \lambda_{wt} \phi_{wt} = 0.$$

2. Умножим обе части равенства на ϕ_{wt} и выделим p_{tdw} :

$$\phi_{wt} \lambda_t = \sum_d n_{dw} \frac{\phi_{wt} \theta_{td}}{p(w|d)} + \phi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \phi_{wt}} = n_{wt} + \phi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \phi_{wt}}.$$

3. Учтём ограничение $\phi_{wt} \geq 0$ и предположение $\lambda_t > 0$:

$$\phi_{wt} \lambda_t = \left(n_{wt} + \phi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \phi_{wt}} \right)_+.$$

4. Суммируем обе части равенства по $w \in W$:

$$\lambda_t = \sum_{w \in W} \left(n_{wt} + \phi_{wt} \frac{\partial R}{\partial \phi_{wt}} \right)_+.$$

5. Подставим λ_t из (4) в (3), получим требуемое. ■

EM-алгоритм с регуляризацией E-шага

Теорема

Если регуляризатор зависит от Φ, Θ через $p_{tdw} = \frac{\phi_{wt}\theta_{td}}{\sum_s \phi_{ws}\theta_{sd}}$,

$$R(\Phi, \Theta) = \sum_{d \in D} \sum_{w \in d} n_{dw} r(p_{1dw}, \dots, p_{Tdw}),$$

то решение задачи максимизации регуляризованного правдоподобия удовлетворяет системе уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{E-шаг: } \tilde{p}_{tdw} = \frac{\phi_{wt}\theta_{td}}{\sum_s \phi_{ws}\theta_{sd}} \left(1 + \frac{\partial r}{\partial p_{tdw}} - \sum_{s \in T} p_{sdw} \frac{\partial r}{\partial p_{sdw}} \right); \\ \text{M-шаг: } \phi_{wt} \propto \left(\sum_{d \in D} n_{dw} \tilde{p}_{tdw} \right)_+; \quad \theta_{td} \propto \left(\sum_{w \in d} n_{dw} \tilde{p}_{tdw} \right)_+ \end{array} \right.$$

Обобщения ВТМ и учёт дополнительной информации

- Разреживание $p(w|t)$, $p(t|d)$, $p(t|d, w)$
- Разделение слов на тематические и функциональные
- Оптимизация числа тем T
- Построение иерархии тем
- Выделение словосочетаний, n -граммные модели
- Учёт ключевых слов по темам (частичное обучение)
- Учёт тезаурусов или онтологий предметных областей
- Учёт структуры документа: предложения, разделы
- Учёт метаданных: дата/время, авторы, источник, и т.д.
- Учёт цитат и/или гиперссылок: исходящие, входящие
- Учёт рубрикации или иной классификации документов
- Учёт связей с изображениями, именами, пользователями
- Мультиязычные тематические модели

Напоминания. Дивергенция Кульбака–Лейблера

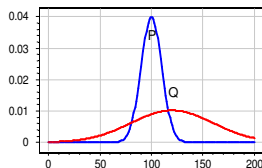
Функция расстояния между распределениями $P = (p_i)_{i=1}^n$ и $Q = (q_i)_{i=1}^n$:

$$KL(P\|Q) \equiv KL_i(p_i\|q_i) = \sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{p_i}{q_i}.$$

1. $KL(P\|Q) \geq 0$; $KL(P\|Q) = 0 \Leftrightarrow P = Q$;
2. Минимизация KL эквивалентна максимизации правдоподобия:

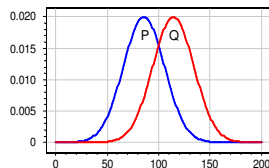
$$KL(P\|Q(\alpha)) = \sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{p_i}{q_i(\alpha)} \rightarrow \min_{\alpha} \iff \sum_{i=1}^n p_i \ln q_i(\alpha) \rightarrow \max_{\alpha}.$$

3. Если $KL(P\|Q) < KL(Q\|P)$, то P сильнее вложено в Q , чем Q в P :



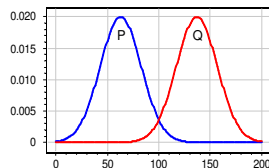
$$KL(P\|Q) = 0.442$$

$$KL(Q\|P) = 2.966$$



$$KL(P\|Q) = 0.444$$

$$KL(Q\|P) = 0.444$$



$$KL(P\|Q) = 2.969$$

$$KL(Q\|P) = 2.969$$

Регуляризатор №1: Сглаживание (совпадает с LDA)

Гипотеза сглаженности:

распределения ϕ_{wt} близки к заданным распределениям β_w
распределения θ_{td} близки к заданным распределениям α_t

$$\sum_{t \in T} \text{KL}_w(\beta_w \parallel \phi_{wt}) \rightarrow \min_{\Phi}; \quad \sum_{d \in D} \text{KL}_t(\alpha_t \parallel \theta_{td}) \rightarrow \min_{\Theta}.$$

Максимизируем сумму этих регуляризаторов:

$$R(\Phi, \Theta) = \beta_0 \sum_{t \in T} \sum_{w \in W} \beta_w \ln \phi_{wt} + \alpha_0 \sum_{d \in D} \sum_{t \in T} \alpha_t \ln \theta_{td} \rightarrow \max.$$

Подставляем, получаем формулы M-шага LDA:

$$\phi_{wt} \propto n_{wt} + \beta_0 \beta_w, \quad \theta_{td} \propto n_{td} + \alpha_0 \alpha_t.$$

Этого вы не найдёте в *D.Blei, A.Ng, M.Jordan. Latent Dirichlet allocation // Journal of Machine Learning Research, 2003. — Vol. 3. — Pp.993–1022.*

Регуляризатор №2: Частичное обучение (обобщение LDA)

Гипотеза: имеется дополнительная информация от экспертов:

- 1) списки тем $T_d \subset T$ для некоторых документов $d \in D_0$,
- 2) списки терминов $W_t \subset W$ для некоторых тем $t \in T_0$.

ϕ_{wt}^0 — распределение, равномерное на W_t

θ_{td}^0 — распределение, равномерное на T_d

Максимизируем сумму этих регуляризаторов:

$$R(\Phi, \Theta) = \beta_0 \sum_{t \in T_0} \sum_{w \in W_t} \phi_{wt}^0 \ln \phi_{wt} + \alpha_0 \sum_{d \in D_0} \sum_{t \in T_d} \theta_{td}^0 \ln \theta_{td} \rightarrow \max$$

Подставляем, получаем обобщение LDA:

$$\phi_{wt} \propto n_{wt} + \beta_0 \phi_{wt}^0 \quad \theta_{td} \propto n_{td} + \alpha_0 \theta_{td}^0$$

Nigam K., McCallum A., Thrun S., Mitchell T. Text classification from labeled and unlabeled documents using EM // Machine Learning, 2000, no. 2–3.

Регуляризатор №2: Частичное обучение (второе обобщение LDA)

Гипотеза: вместо логарифма можно взять любую монотонно возрастающую функцию μ , в том числе $\mu(z) = z$
 (максимизируется сумма ковариаций $\text{cov}(\phi_t^0, \phi_t)$, $\text{cov}(\theta_d^0, \theta_d)$)

$$R(\Phi, \Theta) = \beta_0 \sum_{t \in T_0} \sum_{w \in W_t} \phi_{wt} + \alpha_0 \sum_{d \in D_0} \sum_{t \in T_d} \theta_{td} \rightarrow \max.$$

Подставляем, получаем ещё одно обобщение LDA:

$$\phi_{wt} \propto n_{wt} + \beta_0 \phi_{wt}, \quad w \in W_t \quad \theta_{td} \propto n_{td} + \alpha_0 \theta_{td}, \quad t \in T_d.$$

Преимущество ковариационного регуляризатора:

Если θ_{td}^0 равномерно на T_d , то ковариация не накладывает ограничений на распределение θ_{td} между темами из T_d .

Регуляризатор №3: Разреживание (третье обобщение LDA)

Гипотеза разреженности: среди ϕ_{wt} , θ_{td} много нулей.

Чем сильнее разрежено распределение, тем ниже его энтропия.
Максимальной энтропией обладает равномерное распределение.

Максимизируем дивергенцию между распределениями β_w , α_t
(равномерными?) и искомыми распределениями ϕ_{wt} , θ_{td} :

$$R(\Phi, \Theta) = -\beta_0 \sum_{t \in T} \sum_{w \in W} \beta_w \ln \phi_{wt} - \alpha_0 \sum_{d \in D} \sum_{t \in T} \alpha_t \ln \theta_{td} \rightarrow \max.$$

Подставляем, получаем «анти-LDA»:

$$\phi_{wt} \propto (n_{wt} - \beta_0 \beta_w)_+, \quad \theta_{td} \propto (n_{td} - \alpha_0 \alpha_t)_+.$$

Varadarajan J., Emonet R., Odohez J.-M. A sparsity constraint for topic models — application to temporal activity mining // NIPS-2010 Workshop on Practical Applications of Sparse Modeling: Open Issues and New Directions.

Регуляризатор №4: Декорреляция

Гипотеза некоррелированности тем:

чем различнее темы, тем лучше они интерпретируются.

Минимизируем ковариации между вектор-столбцами ϕ_t :

$$R(\Phi) = -\frac{\tau}{2} \sum_{t \in T} \sum_{s \in T \setminus t} \sum_{w \in W} \phi_{wt} \phi_{ws} \rightarrow \max.$$

Подставляем, получаем ещё один вариант разреживания — постепенное контрастирование строк матрицы Φ :

$$\phi_{wt} \propto \left(n_{wt} - \tau \phi_{wt} \sum_{s \in T \setminus t} \phi_{ws} \right)_+.$$

Tan Y., Ou Z. Topic-weak-correlated latent Dirichlet allocation // 7th Int'l Symp. Chinese Spoken Language Processing (ISCSLP), 2010. — Pp. 224–228.

Регуляризатор №5: Удаление незначимых тем

Гипотеза: если тема собрала мало слов, то она не нужна.

Разреживаем распределение $p(t) = \sum_d p(d)\theta_{td}$, максимизируя KL-дивергенцию между $p(t)$ и равномерным распределением:

$$R(\Theta) = -\tau \sum_{t \in T} \ln \sum_{d \in D} p(d)\theta_{td} \rightarrow \max.$$

Подставляем, получаем:

$$\theta_{td} \propto \left(n_{td} - \tau \frac{n_d}{n_t} \theta_{td} \right)_+.$$

Эффект:

строки матрицы Θ могут целиком обнуляться для тем t , собравших мало слов по коллекции, $n_t = \sum_d \sum_w n_{dwt}$.

Регуляризатор №6: Разреживание распределений $p(t|d, w)$

Гипотеза разреженности распределений $p(t|d, w)$:

в документе слово может относиться только к одной теме.

Максимизируем KL-дивергенцию между $\hat{p}(t) = \frac{1}{|T|}$ и $p(t|d, w)$:

$$R(\Phi, \Theta) = -\tau \sum_{d \in D} \sum_{w \in d} n_{dw} \frac{1}{|T|} \sum_{t \in T} \ln p_{tdw}.$$

Подставляем, получаем формулы модифицированного E-шага:

$$p_{tdw} = \frac{\phi_{wt} \theta_{td}}{\sum_{s \in T} \phi_{ws} \theta_{sd}} (1 + \tau) - \frac{\tau}{|T|}.$$

Эффект:

если $p(t|w) < \frac{1}{|T|}$, то ϕ_{wt} уменьшается;

если $p(t|d) < \frac{1}{|T|}$, то θ_{td} уменьшается.

Регуляризатор №7: Максимизация когерентности тем

Гипотеза: тема лучше интерпретируется, если она содержит *когерентные* (часто встречающиеся рядом) слова $u, w \in W$.

Пусть C_{uw} — оценка когерентности, например $\hat{p}(w|u) = \frac{N_{uw}}{N_u}$.

Согласуем ϕ_{wt} с оценками $\hat{p}(w|t)$ по когерентным словам,

$$\hat{p}(w|t) = \sum_u p(w|u)p(u|t) = \frac{1}{n_t} \sum_u C_{uw} n_{ut};$$

$$R(\Phi, \Theta) = \tau \sum_{t \in T} n_t \sum_{w \in W} \hat{p}(w|t) \ln \phi_{wt} \rightarrow \max.$$

Подставляем, получаем ещё один вариант сглаживания:

$$\phi_{wt} \propto n_{wt} + \tau \sum_{u \in W \setminus w} C_{uw} n_{ut}.$$

Mimno D., Wallach H. M., Talley E., Leenders M., McCallum A. Optimizing semantic coherence in topic models // Empirical Methods in Natural Language Processing, EMNLP-2011. — Pp. 262–272.

Регуляризатор №8: Связи между документами

Гипотеза: чем больше n_{dc} — число ссылок из d на c , тем более близки тематики документов d и c .

Минимизируем ковариации между вектор-столбцами связанных документов θ_d, θ_c :

$$R(\Phi, \Theta) = \tau \sum_{d, c \in D} n_{dc} \text{cov}(\theta_d, \theta_c) \rightarrow \max,$$

Подставляем, получаем ещё один вариант сглаживания:

$$\theta_{td} \propto n_{td} + \tau \theta_{td} \sum_{c \in D} n_{dc} \theta_{tc}.$$

Dietz L., Bickel S., Scheffer T. Unsupervised prediction of citation influences // ICML 2007. — Pp. 233–240.

Регуляризатор №9: Классификация документов

Пусть C — множество классов документов
(категории, авторы, ссылки, годы, пользователи, ...)

Гипотеза:

классификация документа d объясняется его темами:

$$p(c|d) = \sum_{t \in T} p(c|t)p(t|d) = \sum_{t \in T} \psi_{ct} \theta_{td}.$$

Минимизируем дивергенцию между моделью $p(c|d)$
и «эмпирической частотой» классов в документах m_{dc} :

$$R(\Psi, \Theta) = \tau \sum_{d \in D} \sum_{c \in C} m_{dc} \ln \sum_{t \in T} \psi_{ct} \theta_{td} \rightarrow \max.$$

Rubin T. N., Chambers A., Smyth P., Steyvers M. Statistical topic models for multi-label document classification // Machine Learning, 2012, no. 1–2.

Регуляризатор №9: Классификация документов

EM-алгоритм дополняется оцениванием параметров ψ_{ct} .

Е-шаг. По формуле Байеса:

$$p(t|d, w) = \frac{\phi_{wt}\theta_{td}}{\sum_{s \in T} \phi_{ws}\theta_{sd}} \quad p(t|d, c) = \frac{\psi_{ct}\theta_{td}}{\sum_{s \in T} \psi_{cs}\theta_{sd}}$$

М-шаг. Максимизация регуляризованного правдоподобия:

$$\phi_{wt} \propto n_{wt} \quad n_{wt} = \sum_{d \in D} n_{dw} p(t|d, w)$$

$$\theta_{td} \propto n_{td} + \tau m_{td} \quad n_{td} = \sum_{w \in W} n_{dw} p(t|d, w) \quad m_{td} = \sum_{c \in C} m_{dc} p(t|d, c)$$

$$\psi_{ct} \propto m_{ct} \quad m_{ct} = \sum_{d \in D} m_{dc} p(t|d, c)$$

Регуляризатор №10: Категоризация документов

Снова регуляризатор для классификации:

$$R(\Psi, \Theta) = \tau \sum_{d \in D} \sum_{c \in C} m_{dc} \ln \sum_{t \in T} \psi_{ct} \theta_{td} \rightarrow \max$$

Недостаток: для «эмпирической частоты классов» приходится необоснованно брать равномерное распределение:

$$m_{dc} = n_d \frac{1}{|C_d|} [c \in C_d]$$

Ковариационный регуляризатор:

$$R(\Psi, \Theta) = \tau \sum_{d \in D} \sum_{c \in C} m_{dc} \sum_{t \in T} \psi_{ct} \theta_{td} \rightarrow \max$$

приводит к естественному аналитическому решению

$$\psi_{ct} = [c = c^*(t)], \quad c^*(t) = \arg \max_{c \in C} \sum_{d \in D} m_{dc} \theta_{td}$$

Эффект: Каждая категория c распадается на свои темы.

Регуляризатор №11: Динамическая тематическая модель

Y — моменты времени (например, годы публикаций),
 $y(d)$ — метка времени документа d ,
 $D_y \subset D$ — все документы, относящиеся к моменту $y \in Y$.

Гипотеза 1: распределение $p(t|y) = \sum_{d \in D_y} \theta_{td} p(d)$ разрежено:

$$R_1(\Theta) = -\tau_1 \sum_{y \in Y} \sum_{t \in T} \ln p(t|y) \rightarrow \max.$$

Эффект — разреживание тем t с малым $p(t|y(d))$:

$$\theta_{td} \propto \left(n_{td} - \tau_1 \frac{\theta_{td} p(d)}{p(t|y(d))} \right)_+.$$

Гипотеза 2: $p(t|y)$ меняются плавно, с редкими скачками:

$$R_2(\Theta) = -\tau_2 \sum_{y \in Y} \sum_{t \in T} |p(t|y) - p(t|y-1)| \rightarrow \max.$$

Этапы решения прикладных задач с помощью АРТМ

- 1 понимание требований
- 2 формализация требований с помощью регуляризаторов
(при необходимости реализация новых регуляризаторов)
- 3 определение критериев качества модели
(при необходимости реализация новых критериев)
- 4 подбор траектории регуляризации
- 5 эксперименты

АРТМ позволяет сосредоточиться на формализации требований, а алгоритм строить автоматически:



Подбор траектории регуляризации

Пусть задана линейная комбинация регуляризаторов:

$$R(\Phi, \Theta) = \sum_{i=1}^n \tau_i R_i(\Phi, \Theta)$$

Задача: выбрать вектор коэффициентов $\tau = (\tau_i)_{i=1}^n$

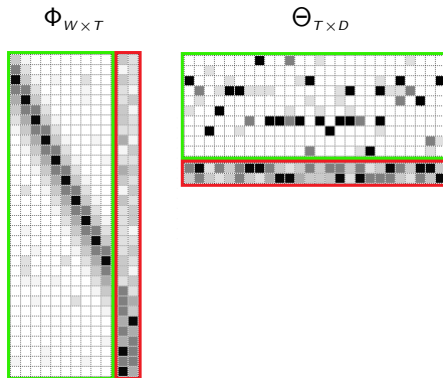
Ближайший аналог: «Regularization Path» в задачах регрессии с L_1 - и L_2 -регуляризацией (Elastic Net)

Общие соображения о выборе траектории регуляризации:

- мониторить много критериев качества в ходе итераций,
- усиливать регуляризаторы постепенно,
- сначала достичь сходимости нерегуляризованного PLSA,
- чередовать регуляризаторы, если они мешают друг другу,
- ослаблять регуляризаторы, когда их цель уже достигнута.

Гипотеза о структуре интерпретируемых тем

- 1 **Предметные темы** разреженные, существенно различные, имеют **ядро**, состоящее из терминов предметной области.
- 2 **Фоновые темы** плотные, содержат слова общей лексики.



Комбинирование разреживания, сглаживания и декорреляции

Задача: улучшить интерпретируемость, не ухудшив перплексию

Набор регуляризаторов:

№1 сглаживание фоновых тем — столбцов Φ , строк Θ

№3 разреживание предметных тем — столбцов Φ , строк Θ

№4 декоррелирование предметных тем — столбцов Φ

№5 удаление незначимых тем — строк Θ

Данные: NIPS (Neural Information Processing System)

- $|D| = 1566$ статей конференции NIPS на английском языке;
- суммарной длины $n \approx 2.3 \cdot 10^6$,
- словарь $|W| \approx 1.3 \cdot 10^4$.
- контрольная коллекция: $|D'| = 174$.

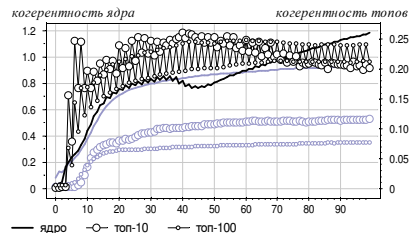
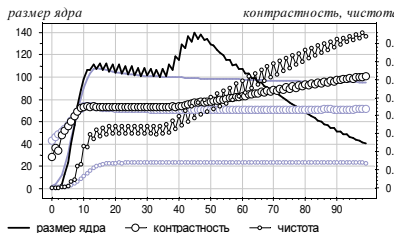
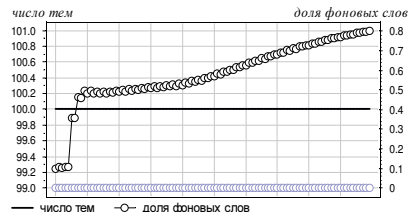
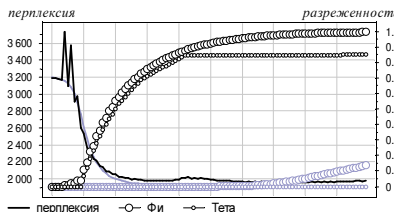
Критерии качества модели

- Перплексия контрольной коллекции: $\mathcal{P} = \exp(-\mathcal{L}/N)$
- Разреженность — доля нулевых элементов в Φ и Θ
- Характеристики интерпретируемости тем:
 - когерентность темы: [Newman, 2010]
 - размер ядра темы: $|W_t|$, ядро $W_t = \{w: p(t|w) > 0.25\}$
 - чистота темы: $\sum_{w \in W_t} p(w|t)$
 - контрастность темы: $\frac{1}{|W_t|} \sum_{w \in W_t} p(t|w)$
- Вырожденность тематической модели:
 - число тем: $|T|$
 - доля фоновых слов: $\frac{1}{n} \sum_{d \in D} \sum_{w \in d} \sum_{t \in B} p(t|d, w)$

Newman D., Lau J.H., Grieser K., Baldwin T. Automatic evaluation of topic coherence // Human Language Technologies, HLT-2010, Pp. 100–108.

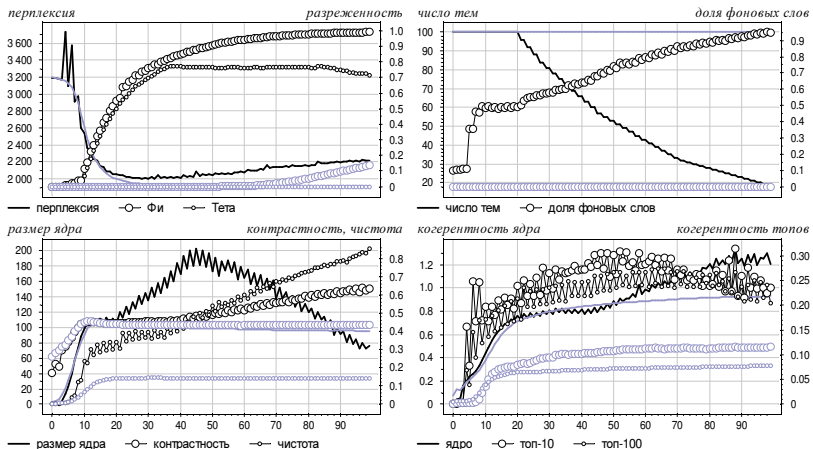
Комбинирование разреживания, сглаживания и декорреляции

Зависимости критериев качества от итераций EM-алгоритма
(серый — PLSA, чёрный — ARTM)



Все те же, с удалением незначимых тем

Зависимости критериев качества от итераций EM-алгоритма
 (серый — PLSA, чёрный — ARTM)



Выводы

Показана возможность одновременного:

- усиления разреженности (до 98%)
- улучшения интерпретируемости (когерентности) тем
- повышения различности (чистоты и контрастности) тем
- при размере ядер тем 50–150 слов
- почти без потери перплексии (правдоподобия) модели

Подобраны траектории регуляризации:

- разреживание включать постепенно после 10-20 итераций
- сглаживание включать сразу
- декорреляцию включать сразу и как можно сильнее
- удаление незначимых тем включать постепенно,
- никогда не совмещая с декорреляцией на одной итерации

Направления ближайших исследований

- **Лингвистическая регуляризация, отказ от «мешка слов»**
 - учёт линейной структуры текста
 - учёт лингвистических ресурсов (тезаурусов, онтологий)
 - выделение терминов-словосочетаний
- **Разработка BigARTM — библиотеки с открытым кодом**
 - параллельные вычисления
 - распределённое хранение коллекции
 - любые сочетания регуляризаторов
- **Улучшение сходимости**
 - оптимизация начального приближения
 - методы глобальной оптимизации
 - нисходящие иерархические модели
- **Визуализация результатов поиска научной информации**

Воронцов Константин Вячеславович
voron@yandex-team.ru

Страницы на www.MachineLearning.ru:

- Участник:Vokov
- Вероятностные тематические модели
(курс лекций, К. В. Воронцов)
- Тематическое моделирование

Воронцов К. В. Аддитивная регуляризация тематических моделей коллекций текстовых документов // Доклады РАН, Т. 456, №3, 2014.

Vorontsov K. V., Potapenko A. A., Tutorial on Probabilistic Topic Modeling: Additive Regularization for Stochastic Matrix Factorization // AIST'14. Springer. 2014.