Российская академия наук
Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН

*На правах рукописи*

Чехович Юрий Викторович

# Элементы алгебраической теории синтеза обучаемых алгоритмов выделения трендов

01.01.09. – Дискретная математика и
математическая кибернетика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
член-корреспондент РАН
К.В. Рудаков

Москва – 2003

# Оглавление

## Введение

Основы алгебраического подхода к проблеме синтеза корректных алгоритмов были заложены в 70-х годах прошлого века в работах академика РАН Ю.И. Журавлева [10,11]. В этих работах были развиты “прямые методы” построения корректных, то есть точных на прецедентах, алгоритмов классификации путем применения специальных алгебраических операций к эвристическим распознающим операторам. При этом были введены основополагающие понятия (регулярность, полнота и т.д.) и конструкции, область потенциального применения которых существенно шире, чем задачи и алгоритмы распознавания и классификации.

В настоящее время представляется несомненным, что алгебраический подход представляет собой не специализированную теорию, а скорее математическую технологию построения проблемно-ориентированных теорий синтеза высококачественных алгоритмов на базе соответствующих эвристических информационных моделей, то есть параметрических семейств операторов, отражающих те или иные экспертные знания о предметной области. Можно сказать, что выработалась определенная культура применения алгебраических методов при исследовании конкретных предметных областей, которая позволяет сформулировать правильную последовательность вопросов, ответы на которые и составляют проблемно-ориентированную теорию.

Прежде всего, отметим, что решениями задач, для которых предназначен алгебраический подход, являются не ответы на конкретные содержательные вопросы, а алгоритмы, способные давать такие ответы. При этом объектом изучения оказывается не сама предметная область, а собственно алгоритмы, семейства алгоритмов, а также операции над алгоритмами. В соответствии с этим под качеством решения понимается качество построенного алгоритма, определяемое чаще всего точностью его работы на прецедентах и его соответствием различного рода дополнительным требованиям.

Основной технический прием алгебраического подхода состоит в том, что эвристические информационные модели (параметрические семейства алгоритмов) используются не в качестве области оптимизации, а как источник базовых операторов, применение к которым соответствующих корректирующих операций и приводит к построению высококачественного алгоритма – решения.

При разработке конкретной проблемно-ориентированной теории первый шаг состоит в точном описании класса задач, которые должны решаться искомыми алгоритмами. Такое описание включает в себя фиксацию множества начальных информаций (входов алгоритмов), множества финальных информаций (выходов алгоритмов) и структурной информации (вида прецедентов и дополнительных ограничений) [12,25-33].

Существенно, что уже на первом шаге возникает возможность постановки и решения ряда содержательных вопросов. А именно, устанавливаются условия, обеспечивающие разрешимость изучаемых задач. Эти условия определяют по сути дела непротиворечивость прецедентной и дополнительной информации. Они же, естественно, оказываются условиями существования корректного алгоритма – решения.

Как правило, наряду с разрешимостью изучается вопрос о так называемой регулярности рассматриваемых задач. Под регулярностью понимается при этом усиление свойства разрешимости, сводящееся к требованию разрешимости не только для самой задачи, но и для задач, в некотором смысле близких к рассматриваемой. Установление критериев регулярности задач автоматически приводит к критериям полноты для семейств алгоритмов: под полнотой семейства понимается существование в нем решений для всех регулярных задач.

В тех случаях, когда на множестве задач оказывается возможным введение адекватной метрики, решается вопрос и о получении оценок для так называемых радиусов регулярности и разрешимости, понимаемых как расстояние от данной регулярной (разрешимой) задачи до ближайшей нерегулярной (неразрешимой) [41,42]. Существенность этого вопроса вытекает из того обстоятельства, что и регулярность, и разрешимость задачи могут оказаться обусловленными избыточно точными измерениями или описаниями в начальной информации.

Итак, в результате описанного первого шага, который можно назвать этапом построения абстрактной теории предметной области, возникают описания класса задач и система критериев регулярности, разрешимости и полноты.

Следующий шаг построения проблемно-ориентированной теории состоит в конструировании эвристических моделей алгоритмов и подборе семейств корректирующих операций. В качестве эвристических семейств алгоритмов берутся параметрические семейства отображений из множества начальных информаций во множество финальных информаций. Часто эти отображения исходно строятся как суперпозиции отображений из множества начальных информаций в некоторое множество оценок и отображения из этого множества оценок во множество финальных информаций. Более того, доказано [10,11], что возможность представления этих отображений в виде суперпозиций указанного вида имеется практически во всех случаях. Семейства корректирующих операций конструируются на базе операций, определенных на множестве оценок. Эвристические модели и семейства корректирующих операций строятся при этом так, чтобы они удовлетворяли установленным на первом этапе критериям, что гарантирует возможность построения с их помощью корректных алгоритмов для всех регулярных или разрешимых задач.

В настоящей работе в качестве основного объекта исследований рассматриваются конечные множества точек на плоскости. Таким множествам могут соответствовать различного рода временные ряды, результаты измерений параметров физических процессов, ценовые и объемные характеристики биржевых торгов и тому подобное. Будем называть такие множества конечными плоскими конфигурациями (КПК).

Не исключено, что подобные конфигурации обладают “плохой”, в некотором смысле, структурой. Например, точки могут быть равномерно распределены в некоторой прямоугольной области и не подтверждать наличия какой-либо зависимости исследуемой величины от времени даже при экспертном анализе. Но, как правило, при решении прикладных задач существует уверенность в том, что положение точек соответствует некой достаточно “просто устроенной”, возможно, зашумленной, кривой. Под простотой при этом подразумевается малое количество экстремумов относительно числа точек КПК.

Часто при решении прикладных задач перед исследователем возникает необходимость в качестве промежуточного шага выделить внутри конфигурации или временного ряда так называемые тренды. Понятие тренда, судя по всему, не имеет строгого формального определения. Обычно, под трендом подразумевается интервал временного ряда или аппроксимирующей его кривой, не содержащий точек экстремума. Таким образом, тренд можно определить как промежуток монотонности аппроксимирующей кривой и соответствующий этому промежутку фрагмент КПК. Тренды, как правило, выделяют так, чтобы представить весь исследуемый временной ряд в виде последовательности трендов.

Очевидно, что задача выделения трендов в исходных точечных множествах не имеет, вообще говоря, единственного решения. При содержательном анализе КПК границы трендов могут выбираться экспертом достаточно произвольно. Более того, для одной и той же выборки в зависимости от собственных представлений, целей анализа или какой-либо внешней информации выделенные экспертом тренды могут быть существенно различными. Этим обстоятельством определяется целесообразность изучения задачи синтеза алгоритмов выделения трендов, настраиваемых на определенный тип анализа.

В настоящей работе под выделением трендов подразумевается решение задачи классификации, в которой каждой точке конфигурации сопоставляется номер класса из заранее определенного множества классов или, говоря иначе, метка из фиксированного словаря разметки. Это позволяет использовать глубоко разработанную технологию решения задач распознавания и классификации [2-6,34,38,39,], причем использование этой технологии опирается на статистические обоснования, разработанные школой члена-корреспондента РАН В.Л. Матросова [16-24]. Например, простейший набор меток может содержать метки “экстремальная точка” и “неэкстремальная точка” или следующий набор: “точка максимума”, “точка минимума”, “неэкстремальная точка”. Набор меток может быть и таким: “точка максимума”, “точка минимума”, “точка возрастания”, “точка убывания”, “точка плато” и т.п.

Таким образом, рассматривается задача синтеза алгоритмов, описывающих отображения из множества конечных плоских конфигураций (пространства начальных информаций) во множество конечных наборов меток (пространство финальных информаций), которые являются по сути словами в конечном алфавите [15,40,49-51].

Обучение алгоритма осуществляется на основе формируемого экспертом наборов прецедентов – набора частично размеченных конечных конфигураций, где каждой точке либо сопоставлена метка, либо специальный символ, интерпретируемый как “не размечено”. Главной задачей является синтез алгоритма, который, с одной стороны не допускал бы ошибок на прецедентах, то есть размечал бы точки, помеченные экспертом, точно так же и, с другой стороны, удовлетворял бы определенному набору дополнительных ограничений.

В качестве дополнительных ограничений выступают наборы предикатов, которые в соответствии со спецификой рассматриваемой области могут учитывать по сути “геометрические” особенности задач выделения трендов. Например, в качестве таких “геометрических” ограничений могут выступать требование вида, “в точке, имеющей метку “точка минимума ” значения временного ряда должны быть не больше чем в соседних точках”; “если в точке временной ряд принимает промежуточное значение по отношению к соседним точкам, то точка не может иметь метку “экстремальная точка”; “между любыми двумя точками, имеющими метки “точка максимума” должна быть точка, имеющая метку “точка минимума”; и т.п. Таким образом, каждый предикат или, говоря иначе, правило (аксиома) разметки каждой паре конфигурация-разметка ставит в соответствие либо значение “истина”, в этом случае разметка называется подходящей для конфигурации в смысле аксиомы разметки, либо “ложь” - разметка называется неподходящей. Разметка называется подходящей в смысле набора правил, если конъюнкция всех предикатов принимает значение “истина”.

Следует отметить, что выбор конкретного словаря разметки и формирование набора аксиом разметки осуществляются экспертом.

Таким образом, словарь разметки, набор аксиом и набор прецедентов, будучи зафиксированными, определяют задачу синтеза алгоритмов выделения трендов.

Первая часть настоящей работы посвящена формализации предметной области и описанию критериев разрешимости задач синтеза алгоритмов выделения трендов. Также исследована регулярность описанных задач, как расширение понятия разрешимости. Получен и доказан критерий регулярности.

Учитывая специфику задач синтеза алгоритмов выделения трендов при построении проблемно-ориентированной теории, естественным и целесообразным представляется особо рассмотреть класс локальных алгоритмов.

Следует отметить, что общее понятие локальных алгоритмов было введено и изучено академиком РАН Ю.И. Журавлевым в [7-9].

В настоящей работе понятие локальных алгоритмов введено сходным образом. Локальным называется алгоритм, принимающий решение о разметке каждой точки лишь на основании анализа ее окрестности. Однако, в отличие от работ Ю.И. Журавлева, где использовалось понятие порядка окрестности и исследовались локальные алгоритмы определенного порядка, в настоящей работе введено и используется собственное понятие системы окрестностей.

При решении практических задач немаловажным оказывается “размер” рассматриваемых окрестностей точек. Очевидно, что, с одной стороны, вычислительная сложность алгоритмов существенно зависит от размера окрестности и для построения высокопроизводительных алгоритмов следует использовать окрестности по возможности небольшого размера. С другой стороны, при небольших размерах окрестностей возникают трудности с разрешимостью задач. В пределе, когда окрестностью каждой точки является она сама, неразрешимой оказывается практически любая задача. Все это обусловливает актуальность решения задачи поиска окрестностей оптимального размера.

Во второй части работы введены и обоснованы понятия окрестности точки, локальной аксиомы и локального алгоритма, локальной разрешимости и локальной регулярности; получены и доказаны критерии локальной разрешимости и локальной регулярности. Также предложены и обоснованы алгоритмы построения систем окрестностей оптимальной мощности, доказана монотонность свойств локальной разрешимости и локальной регулярности относительно мощности системы окрестностей.

Третья часть настоящей работы посвящена исследованию полноты семейств алгоритмов выделения трендов. Следует отметить, что описанные выше дополнительные ограничения для каждой конечной плоской конфигурации (точки в пространстве начальных информаций) являются по сути теоретико-множественными ограничениями в пространстве финальных информаций. Правила разметки, будучи зафиксированными, сопоставляют каждой КПК свое допустимое подмножество из множества возможных ответов алгоритма. Именно поэтому в настоящей работе для исследования полноты семейств не удается непосредственно использовать теорию универсальных и локальных ограничений, разработанную членом-корреспондентом РАН К.В. Рудаковым [25-29,31,32].

Для описания требований к семействам алгоритмов, выполнение которых обеспечивало бы полноту семейств, был разработан новый аппарат, предназначенный для исследования и решения задач с теоретико-множественными ограничениями, которыми, в частности, являются и задачи синтеза алгоритмов выделения трендов.

В третьей части получена совокупность критериев полноты для моделей алгоритмов, моделей алгоритмических операторов, семейств корректирующих операций и семейств решающих правил. Эти критерии, в отличие от случая классических универсальных и локальных ограничений, оказались не независимыми. А именно, для обеспечения полноты модели алгоритмов необходимым и достаточным оказывается использование полных семейств решающих правил, причем понятие полноты для семейства решающих правил оказывается зависящим от используемой системы теоретико-множественных ограничений. Полнота семейств корректирующих операций определяется при фиксации не только системы теоретико-множественных ограничений, но и при заданном полном семействе решающих правил. Наконец полнота моделей алгоритмических операторов определяется при фиксации системы теоретико-множественных ограничений, полных семейств решающих правил и корректирующих операций.

**Благодарности**

Автор выражает глубокую признательность своему Учителю члену-корреспонденту РАН Константину Владимировичу Рудакову, за постановку задачи и неоценимую помощь на всех этапах работы, академику РАН Юрию Ивановичу Журавлеву за постоянное внимание и поддержку, сотрудникам отдела вычислительных методов прогнозирования и отдела математических проблем распознавания и методов комбинаторного анализа Вычислительного центра им. А.А. Дородницына РАН, коллегам из других организаций, конструктивная критика, советы и помощь которых способствовали решению поставленных задач.

# Глава 1. Формализация, разрешимость и регулярность задач синтеза обучаемых алгоритмов выделения трендов

## 1.1. Конфигурации и разметки

Будем рассматривать объекты $S$, расположенные на плоскости: $S \in R^2$. Без ущерба для дальнейшего рассмотрения предположим, что $S \in R_+^2$. Будем называть объекты $S=(t,v)$ точками или узлами на плоскости.

Вектор $\overline{S}^d = \left(S^1,...,S^d\right) = \left(\left(t^1,v^1\right),...,\left(t^d,v^d\right)\right)$, где $t \in R$, $v \in R$, $d \geq 1$ будем называть *конечной плоской конфигурацией* (КПК) или *вектор-объектом*. Будем считать, что либо а) $t^1 < ... < t^d$, либо б) $t^1 \leq ... \leq t^d$, причем при $t^i = t^{i+1}$, выполнено $v^i < v^{i+1}$, $i = 1,...d$.В первом случае будем называть конфигурации *однозначными*, а во втором, соответственно, - *неоднозначными*. При использовании для конечных конфигураций нижних индексов $\alpha$ везде далее считается, что $\overline{S}_\alpha^d = \left(S_\alpha^1,...,S_\alpha^d\right)$.

Множество всех $d$-точечных неоднозначных плоских конфигураций обозначим $K^d = \left\{\overline{S}^d\right\}$, а $d$-точечных однозначных плоских конфигураций соответственно $K_1^d = \left\{\overline{S}^d\right\}$. Очевидно, что $K_1^d \subseteq K^d$.

Количество точек $d$, входящих в конфигурацию, будем также называть *мощностью* конфигурации.

Также определим множества всех неоднозначных $K = \bigcup\limits_{d=1}^{\infty} K^d$ и однозначных $K_1 = \bigcup\limits_{d=1}^{\infty} K_1^d$ конфигураций. Очевидно, что $K_1 \subseteq K$. Поэтому далее, как правило, будем считать, что $\overline{S}^d \in K^d$. При необходимости случай однозначных конфигураций будет рассматриваться отдельно.

***Определение 1.1.1.*** Конфигурации $\overline{S}_1^d$ и $\overline{S}_2^d$ называются *сдвиг – эквивалентными* если существует такой вектор $p^* = \left(t^*,v^*\right)$, что

$S_1^i = S_2^i + p^* = \left(t_2^i + t^*, v_2^i + v^*\right)$ для всех $i = 1,...,d$, где $S_1^i \in \bar{S}_1^d$, $S_2^i \in \bar{S}_2^d$. В этом случае используется запись $\bar{S}_1^d \cong \bar{S}_2^d$.

*Словарем разметки* или *множеством меток* называется конечное множество $M = \{\mu_1,...,\mu_r\}$, $r \geq 1$.

Множество $M_\Delta = M \cup \{\Delta\}$, $\Delta \notin M$, где $\Delta$ - специальная метка, интерпретируемая как “не размечено”, будем называть *расширенным множеством меток* или *расширенным словарем разметки*.

Приведем примеры разметок:

$M = \{max, min, non\}$, где “max” – метка для обозначения точки максимума, “min” – минимума, “non” – неэкстремальной точки.

$M = \{max, min, plt, non\}$, где “plt” – метка для обозначения плато, “max”, ”min”, “non” – аналогично п. A.

$M = \{max, min, up, down, plt\}$, где “up” – метка для обозначения точек возрастания, “down” – убывания, “max”, “min”, “plt”, - аналогично п. B.

$M = \{max, min, up, down, plt\&up, plt\&down, up\&plt, down\&plt, mplt\}$, где “plt&up”, - метка для обозначения точки окончания плато, после которого следует рост, “plt&down” –точки окончания плато, после которого следует падение, “up&plt” – точки начала плато после роста, “down&plt” - точки начала плато после падения, “mplt” – внутренней точки плато; “max”, “min” “up”, “down” аналогично п. C.

$M = \{max, min, up, down, Sup, Sdown, plt\}$, где “Sup” – метка для обозначения точки быстрого роста, “Sdown” – точки быстрого падения, “max”, “min” “up”, “down”, “plt” аналогично п. C.

$M = \{max, min, up, down, ShiftUp, ShiftDown, plt\}$, где “ShiftUp” – метка для обозначения точки скачка вверх, “ShiftDown” – точки скачка вниз, “max”, “min” “up”, “down”, “plt” аналогично п. C.

*Примечание: множество разметки в случае F имеет смысл рассматривать только в применении к неоднозначным конфигурациям.*

***Определение 1.1.2.*** При фиксированном множестве меток $M$ и, соответственно, расширенном множестве меток $M_\Delta$ *разметкой* длины $d$ называется любая последовательность $\overline{\mu}^d = \left(\mu^1,...\mu^d\right)$ длины $d \geq 1$, если $\mu^i \in M$, или *частичной разметкой* длины $d$, если $\mu^i \in M_\Delta$.

Множество всех различных разметок длины $d$ обозначим $M^d$, а множество всех различных расширенных разметок длины $d$, соответственно - $M_\Delta^d$. Положим также, что $\widetilde{M} = \bigcup\limits_{d=1}^{\infty} M^d$, и $\widetilde{M}_\Delta = \bigcup\limits_{d=1}^{\infty} M_\Delta^d$ - множества всех различных разметок.

***Определение 1.1.3.*** *Размеченным* объектом называется пара $(S,\mu)$, где $\mu \in M$. *Размеченной* конфигурацией называется пара $\left(\overline{S}^d, \overline{\mu}^d\right)$, где $\overline{S}^d \in K^d$ для неоднозначной или $\overline{S}^d \in K_1^d$ для однозначной конфигураций, а $\overline{\mu}^d \in M^d$. При этом $\overline{\mu}^d$ называется *разметкой* или *полной разметкой* конфигурации $\overline{S}^d$. При $\overline{\mu}^d \in M_\Delta^d$ пара $\left(\overline{S}^d, \overline{\mu}^d\right)$ называется *частично размеченной* конфигурацией, а разметка $\overline{\mu}^d$ при этом называется *частичной разметкой* конфигурации $\overline{S}^d$.

***Определение 1.1.4.*** Разметка $\overline{\mu}^d$ (полная или частичная) конфигурации $\overline{S}^d$ называется *продолжением разметки* $\overline{\mu}_0^d = \left(\mu_0^1, \ldots, \mu_0^d\right)$, если для любого $i = 1,...,d$ выполнено условие $\left(\mu_0^i = \mu^i\right) \vee \left(\mu_0^i = \Delta\right)$.

Введем определение алгоритма выделения трендов как алгоритма разметки конечных плоских конфигураций.

***Определение 1.1.5.*** *Алгоритмом разметки* называется всякий алгоритм $A$, реализующий отображение $A : C \to \widetilde{M}$ такое, что для любого $d \geq 1$ верно $A\left(\overline{S}^d\right) = \overline{\mu}^d$, где $\overline{S}^d \in K^d$, $\overline{\mu}^d \in M^d$.

Рассмотрим, например, конфигурацию из 15 точек представленную на рисунке 1, и приведем примеры разметок данной конфигурации в случаях различных словарей разметок. Тогда для варианта А со словарем разметки

$M = \{\max, \min, non\}$ представляется разумным точки 2 и 13 пометить как "max", точку 8 - как "min", а все остальные – "non". Также разумной представляется и разметка при которой точка 8 помечена как "min", точка 13 как "max" и все остальные точки имеют метку "non".

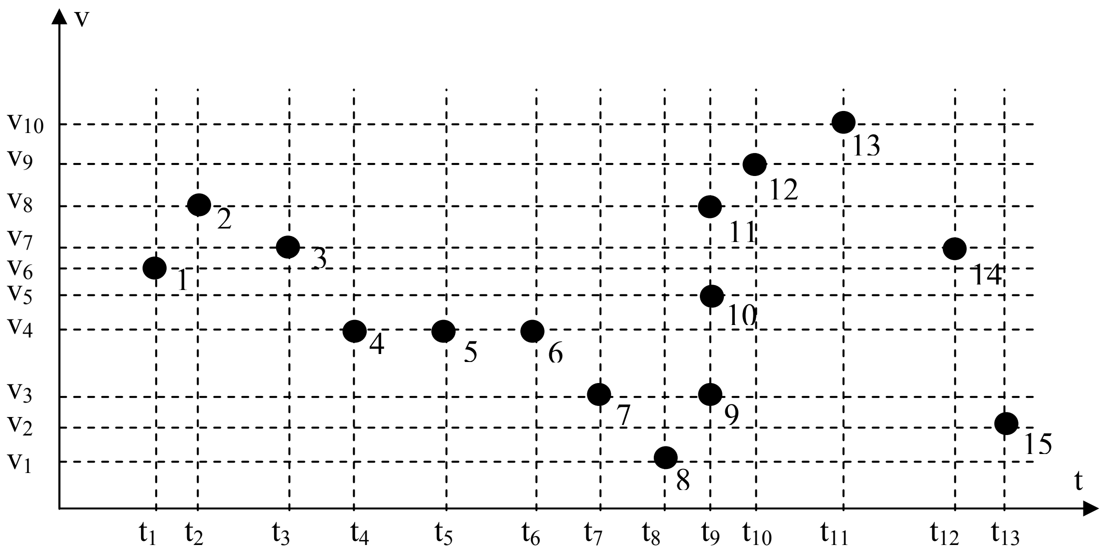


**Рис. 1 Пример конфигурации.**

Для словаря $M = \{\max, \min, plt, non\}$ (вариант B) точки 2 и 13 можно также пометить как "max", точку 8 - как "min", точки 4, 5 и 6 - "plt", все остальные – "non".

Для словаря $M = \{\max, \min, up, down, plt\}$ (вариант C) точки 2 и 13 можно пометить как "max", точки 1, 8 и 15 - как "min", точки 9, 10, 11, 12 - "up", точки 3, 7 и 14 - "down", а точки 4, 5 и 6 - "plt". Однако, возможен и такой разумный вариант разметки, при котором точка 1 помечается – "up", а точка 15 - "down".

Если $M = \{\max, \min, up, down, plt\&up, plt\&down, up\&plt, down\&plt, mplt\}$ (вариант D), то точки 2 и 13 могут получить метку "max", точка 8 - "min", точки 4, 5 и 6 размечаются как "down&plt" "mplt" "plt&down", соответственно, как точка начала плато после падения, точка из середины плато, точка окончания плато с последующим падением. Точки 3, 7 и 14 -

“down”, точки 9, 10, 11, 12 - “up”, точки же 1 и 15 можно пометить и как “min” и как “up” и “down”, соответственно.

Для словаря разметки в варианте E - $M = \{\max, \min, up, down, Sup, Sdown, plt\}$ точки 2 и 13 могут получить метку “max”, точка 8 - “min”, точки 9, 10 и 11 - точки быстрого роста - метку “Sup”, точка 3 может интерпретироваться как точка быстрого падения – “Sdown”, точки 4, 5 и 6 - “plt”, метку “up” при этом получают точки 1 и 12, а метку “down” – точки 7 и15.

В случае разметки варианта F, где учитывается неоднозначность конфигурации, $M = \{max, min, up, down, ShiftUp, ShiftDown, plt\}$, точки 9, 10 и 11 будут размечены как “ShiftUp”, остальные же точки получат метки аналогичные варианту разметки C.

Как показано в вышеприведенных примерах, разметка конфигурации определяется в первую очередь словарем разметки, но даже после того как множество меток зафиксировано, остается значительный произвол в том, как разметить ту или иную конфигурацию.

## 1.2. Аксиомы (правила) разметки

Из содержательных соображений следует, что не все разметки каждой конкретной конфигурации являются “разумными” (подходящими). Например, для точки $(t_i, v_i)$, у которой соседние точки $(t_{i-1}, v_{i-1})$ и $(t_{i+1}, v_{i+1})$ таковы, что $t_{i-1} < t_i < t_{i+1}$ и $v_{i-1} < v_i < v_{i+1}$, представляется естественным запретить разметку этой точки, как “max” или “min”. Для того, чтобы описать требования к подходящим разметкам, вводятся системы аксиом (правил) разметки. Отметим, что из вводимых правил разметки вытекают ограничения на семейства алгоритмов разметки.

***Определение 1.2.1.*** *Аксиомами или правилами разметки* называется набор $\Pi = \{\pi_1, \ldots, \pi_k\}$ эффективно вычислимых предикатов:

$$\pi_i : \bigcup_{d=1}^{\infty} \left(K^d \times M^d\right) \to \{0,1\}.$$

Тот же символ $\Pi$ будет использоваться и для обозначения конъюнкции предикатов $\pi_i$:

$$\Pi = \bigwedge_{i=1\ldots k} \pi_i \,,\ \Pi : \bigcup_{d=1}^{\infty} \left(K^d \times M^d\right) \to \{0,1\}\,.$$

***Определение 1.2.2.*** Пусть фиксирована система правил разметки $\Pi = \{\pi_1,...,\pi_k\}$. Разметка $\overline{\mu}^d$ называется *подходящей* для $\overline{S}^d$, если $\Pi\left(\overline{S}^d, \overline{\mu}^d\right) = 1$. Частичная разметка $\overline{\mu}_0^d \in M_\Delta^d$ называется подходящей для $\overline{S}^d$ тогда и только тогда, когда существует полная подходящая разметка $\overline{\mu}^d$, являющаяся продолжением $\overline{\mu}_0^d$.

Приведем несколько примеров "разумных" систем аксиом при различных словарях разметки.

При словаре разметки $M = \{max, min, non\}$ можно предложить следующую систему аксиом:

Аксиома А1. $\underset{\{2,...,d-1\}}{\forall i} : (v_{i-1} < v_i < v_{i+1}) \Rightarrow \mu_i = "non"$.

Аксиома А2. $\underset{\{2,...,d-1\}}{\forall i} : (v_{i-1} > v_i > v_{i+1}) \Rightarrow \mu_i = "non"$.

Аксиома А3. $\underset{\{1,...,d\}}{\forall} i_1 < i_2 : \left(\mu_{i_1} = "\max"\right) \wedge \left(\mu_{i_2} = "\max"\right) \Rightarrow \underset{\{i_1+1,...,i_2-1\}}{\exists} i_0 : \mu_{i_0} = "\min"$.

Аксиома А4. $\underset{\{1,...,d\}}{\forall} i_1 < i_2 : \left(\mu_{i_1} = "\min"\right) \wedge \left(\mu_{i_2} = "\min"\right) \Rightarrow \underset{\{i_1+1,...,i_2-1\}}{\exists} i_0 : \mu_{i_0} = "\max"$.

При словаре разметки $M = \{\max, \min, plt, non\}$ система аксиом строится аналогичным образом:

Аксиома В1. $\underset{\{2,...,d-1\}}{\forall i} : (v_{i-1} < v_i < v_{i+1}) \Rightarrow \left(\mu_i \neq "\max"\right) \wedge \left(\mu_i \neq "\min"\right)$.

Аксиома В2. $\underset{\{2,...,d-1\}}{\forall i} : (v_{i-1} > v_i > v_{i+1}) \Rightarrow \left(\mu_i \neq "\max"\right) \wedge \left(\mu_i \neq "\min"\right)$.

Аксиома В3. $\underset{\{1,...,d\}}{\forall} i_1 < i_2 : \left(\mu_{i_1} = "\max"\right) \wedge \left(\mu_{i_2} = "\max"\right) \Rightarrow$

$\underset{\{i_1+1,...,i_2-1\}}{\exists} i_0 : \left(\mu_0 = "\min"\right) \vee \left(\mu_0 = "plt"\right)$.

Аксиома В4. $\underset{\{1,...,d\}}{\forall} i_1 < i_2 : \left(\mu_{i_1} = "\min"\right) \wedge \left(\mu_{i_2} = "\min"\right) \Rightarrow$

$\underset{\{i_1+1,...,i_2-1\}}{\exists} i_0 : \left(\mu_0 = "\max"\right) \vee \left(\mu_0 = "plt"\right)$.

При словаре разметки $M=\{\max,\min,up,down,plt\}$ система аксиом может выглядеть следующим образом:

Аксиома C1. $\underset{\{2,\ldots,d-1\}}{\forall i}:(v_{i-1}<v_i<v_{i+1})\Rightarrow \mu_i="up"$.

Аксиома C2. $\underset{\{2,\ldots,d-1\}}{\forall i}:(v_{i-1}>v_i>v_{i+1})\Rightarrow \mu_i="down"$.

Аксиома C3. $\underset{\{1,\ldots,d\}}{\forall} i_1<i_2:(\mu_{i_1}="\max")\wedge(\mu_{i_2}="\max")\Rightarrow \underset{\{i_1+1,\ldots,i_2-1\}}{\exists} i_0:\mu_0="\min"$.

Аксиома C4. $\underset{\{1,\ldots,d\}}{\forall} i_1<i_2:(\mu_{i_1}="\min")\wedge(\mu_{i_2}="\min")\Rightarrow \underset{\{i_1+1,\ldots,i_2-1\}}{\exists} i_0:\mu_0="\max"$.

Отметим, что система правил разметки $\Pi=\{\pi_1,\ldots,\pi_k\}$ является *непротиворечивой* тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\underset{d\geq 1}{\exists} d\ \underset{K^d}{\exists}\bar{S}^d\ \underset{M}{\exists}\bar{\mu}^d:\Pi(\bar{S}^d,\bar{\mu}^d)=1,$$

то есть когда существует по меньшей мере одна конфигурация, для которой существует подходящая разметка.

Очевидно, система аксиом разметки $\Pi=\{\pi_1,\ldots,\pi_k\}$ является *независимой* тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\underset{w=1\ldots k}{\forall w}\ \underset{d\geq 1}{\exists} d\ \underset{K^d}{\exists}\bar{S}^d\ \underset{M}{\exists}\bar{\mu}^d:\left(\Pi^w(\bar{S}^d,\bar{\mu}^d)=1\right)\wedge\left(\Pi(\bar{S}^d,\bar{\mu}^d)=0\right),$$

где $\Pi^w=\{\pi_1,\ldots,\pi_{w-1},\pi_{w+1},\ldots,\pi_k\}$, то есть, в том случае, когда при изъятии из системы любой аксиомы существует хотя бы одна конфигурация и существует разметка этой конфигурации, являющаяся подходящей в смысле усеченного набора аксиом и неподходящей в смысле исходного набора.

***Определение 1.2.3.*** Система правил разметки $\Pi=\{\pi_1,\ldots,\pi_k\}$ называется *покрывающей* тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

$$\underset{K}{\forall}\bar{S}^d\ \underset{M^d}{\exists}\bar{\mu}^d:\Pi(\bar{S}^d,\bar{\mu}^d)=1,$$

то есть когда для любой конфигурации существует хотя бы одна подходящая разметка.

Приведем пример не покрывающей, но “естественной” системы правил разметки.

Зафиксируем множество меток $M = \{max, min, up, down, plt\}$. Зафиксируем следующую систему аксиом:

Аксиома 1. $\underset{\{3,\ldots,d-2\}}{\forall i} : (v_{i-1} < v_i) \wedge (v_{i+1} < v_i) \wedge (v_{i-2} < v_i) \wedge (v_{i+2} < v_i) \Leftrightarrow \mu_i = \text{"max"}$.

Аксиома 2. $\underset{\{3,\ldots,d-2\}}{\forall i} : (v_{i-1} > v_i) \wedge (v_{i+1} > v_i) \wedge (v_{i-2} > v_i) \wedge (v_{i+2} > v_i) \Leftrightarrow \mu_i = \text{"min"}$.

Аксиома 3. $\underset{\{1,\ldots,d\}}{\forall} i_1 < i_2 : (\mu_{i_1} = \text{"max"}) \wedge (\mu_{i_2} = \text{"max"}) \Rightarrow \underset{\{i_1+1,\ldots,i_2-1\}}{\exists} i_0 : \mu_0 = \text{"min"}$.

Аксиома 4. $\underset{\{1,\ldots,d\}}{\forall} i_1 < i_2 : (\mu_{i_1} = \text{"min"}) \wedge (\mu_{i_2} = \text{"min"}) \Rightarrow \underset{\{i_1+1,\ldots,i_2-1\}}{\exists} i_0 : \mu_0 = \text{"max"}$.

Аксиома 5. $\underset{\{2,\ldots,d-1\}}{\forall i} : (v_{i-1} < v_i < v_{i+1}) \Rightarrow \mu_i = \text{"}up\text{"}$.

Аксиома 6. $\underset{\{2,\ldots,d-1\}}{\forall i} : (v_{i-1} > v_i > v_{i+1}) \Rightarrow \mu_i = \text{"}down\text{"}$.

Рассмотрим конфигурацию, представленную на рисунке 2.

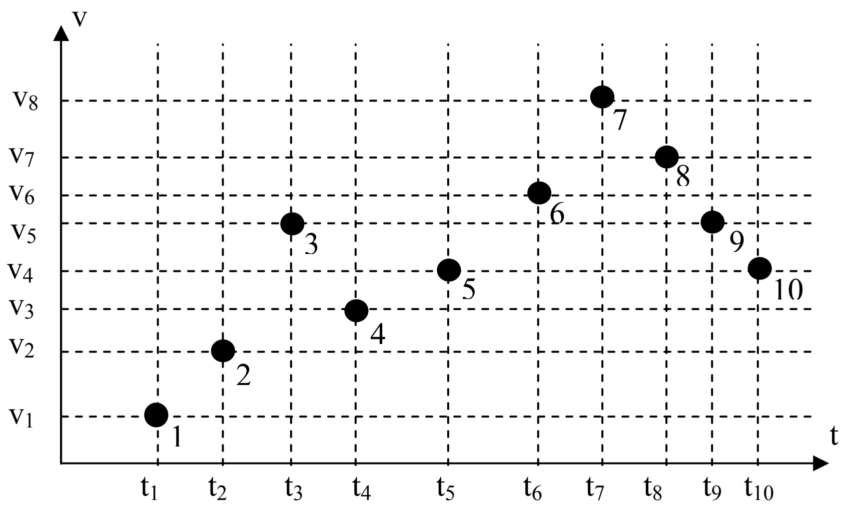


**Рис. 2. Пример конфигурации для непокрывающей системы аксиом**

Из аксиомы 1 следует, что точки 3 и 7 должны иметь метку “max”. Из аксиомы 3 следует, что одна из трех точек 4, 5 или 6 должна быть точкой минимума. Но из аксиомы 5 следует, что точки 5 и 6 должны быть размечены как “up”, а аксиомы 2 следует, что точка 4 не может иметь метку “min”. Отсюда следует, что при данной системе аксиом 1-6 рассматриваемая конфигурация не имеет ни одной подходящей разметки, то есть система аксиом 1-6 не является прокрывающей.

Система правил разметки $\Pi = \{\pi_1, ..., \pi_k\}$ называется *сдвиг - устойчивой* тогда и только тогда, когда

$$\underset{\overline{S}_1^d, \overline{S}_2^d \in K^d}{\forall} \overline{S}_1^d \cong \overline{S}_2^d \underset{M}{\forall} \overline{\mu}^d : \left(\Pi\left(\overline{S}_1^d, \overline{\mu}^d\right) = 1\right) \Leftrightarrow \left(\Pi\left(\overline{S}_2^d, \overline{\mu}^d\right) = 1\right),$$

то есть когда для любых двух эквивалентных конфигураций тот факт, что разметка оказывается подходящей для одной конфигурации, влечет за собой то, что разметка оказывается подходящей для другой конфигурации.

Алгоритм разметки $A$ называется *сдвиг - устойчивым* тогда и только тогда, когда любые две сдвиг - эквивалентные конфигурации алгоритм размечает одинаково:

$$\underset{\overline{S}_1^d, \overline{S}_2^d \in K^d}{\forall} \overline{S}_1^d \cong \overline{S}_2^d \Rightarrow A\left(\overline{S}_1^d\right) = A\left(\overline{S}_2^d\right).$$

В следующем определении используется понятие алгоритма разметки введенное в определении 1.1.5.

***Определение 1.2.4.*** Пусть фиксирована система правил разметки $\Pi = \{\pi_1, ..., \pi_k\}$. Тогда алгоритмы, дающие только подходящие разметки для всех $\overline{S}^d$, будем называть *подходящими алгоритмами*.

$\mathrm{A}^{\Pi}$ - класс всех подходящих алгоритмически реализуемых отображений.

Итак, в п. 1.2. введены основные понятия нужные для проведения исследований проблемы синтеза алгоритмов выделения трендов в рамках алгебраического подхода к проблеме синтеза корректных алгоритмов [43,44].

## 1.3. Разрешимость и регулярность

Далее будем считать, что заданы словарь разметки $M$ и сдвиг - устойчивая система правил разметки $\Pi = \{\pi_1, ..., \pi_k\}$ и будем рассматривать только сдвиг - устойчивые подходящие алгоритмы.

***Определение 1.3.1.*** Произвольное конечное множество пар вида $H = \left\{\left(\overline{S}_i^{d_i}, \overline{\mu}_i^{d_i}\right) \middle| \overline{S}_i^{d_i} \in K^{d_i}; \overline{\mu}_i^{d_i} \in M_{\Delta}^{d_i}; i = 1, ..., q\right\}$ называется *набором прецедентов*.

Рассмотрим набор, который составляют сдвиг - эквивалентные конфигурации $L = \{\overline{S}_1^d, \overline{S}_2^d, ..., \overline{S}_l^d\}$, которым сопоставлены частичные разметки $L^\mu = \{\overline{\mu}_1^d, \overline{\mu}_2^d, ..., \overline{\mu}_l^d\}$. По сути, создан набор прецедентов, в который входят лишь сдвиг – эквивалентные конфигурации.

***Определение 1.3.2.*** Набор $L$ частично размеченных сдвиг – эквивалентных конфигураций длины $d$ называется *противоречивым* тогда и только тогда, когда для любой разметки $\overline{\mu}_*^d = \{\mu_*^1, ..., \mu_*^d\} \in M^d$ верно, что из того, что разметка для всех конфигураций из набора является подходящей, следует, что у каких-либо двух эквивалентных конфигураций две размеченные точки с одинаковых номером имеют различную разметку, т.е.

$$\left( \underset{M^d}{\forall} \overline{\mu}_*^d \underset{\{1,\dots,l\}}{\exists} j_1 : \Pi\left(\overline{S}_{j_1}^d, \overline{\mu}_*^d\right) = 1 \right) \Rightarrow \underset{\{1,\dots,d\}}{\exists i} \underset{\{1,\dots,l\}}{\exists} j_2 \; : \left(\mu_{j_2}^i \neq \mu_*^i\right) \wedge \left(\mu_{j_2}^i \neq \Delta\right). \qquad (1)$$

Отметим также, что из свойства сдвиг - устойчивости системы аксиом следует, что разметка $\overline{\mu}_*^d$ или подходит для всех конфигураций набора $L$ или не подходит ни одной.

Отметим, также, что определение применимо и для случая частичных разметок одной конфигурации $\overline{S}_1^d = \overline{S}_2^d = ... = \overline{S}_l^d$, то есть когда поднабор содержит несколько различных частичных разметок одной и той же конфигурации.

Очевидно, что любой набор $H$, в который входит противоречивый набор в качестве поднабора, также является противоречивым. Набор $H$, который не содержит противоречивых поднаборов сдвиг – эквивалентных конфигураций, называется *непротиворечивым*.

Противоречивый набор из двух частичных разметок $\overline{\mu}_1^d$ и $\overline{\mu}_2^d$ эквивалентных конфигураций $\overline{S}_1^d$ и $\overline{S}_2^d$ (или одной конфигурации $\overline{S}^d$) называется *противоречивой парой* разметок.

Далее будем считать, что зафиксирован некоторый набор прецедентов $H = \left\{\left(\overline{S}_i^{d_i}, \overline{\mu}_i^{d_i}\right) \middle| \overline{S}_i^{d_i} \in K^{d_i}; \overline{\mu}_i^{d_i} \in M_\Delta^{d_i}; i = 1, ..., q\right\}$.

Задача $Z$ *выделения трендов* заключается в синтезе подходящего алгоритма $A$, такого, что при всех $i=1,\ldots,q$ полная разметка $A\left(\bar{S}_i^{d_i}\right)$ является продолжением разметки $\bar{\mu}_i^{d_i}$, или, иначе говоря, такого, что выполнено условие:

$$\underset{\{1,\ldots,d_i\}}{\forall j}\left(\mu_i^j \in \bar{\mu}_i^{d_i}\right) \Rightarrow \left(\left(\mu_i^j \neq \Delta\right) \Rightarrow \left(\mu_i^j = \gamma_i^j\right)\right), \tag{2}$$

где $\bar{\gamma}_i^{d_i} = A\left(\bar{S}_i^{d_i}\right)$.

Отметим, что из того, что алгоритм $A$ подходящий следует, что для всех $\bar{\gamma}_i^{d_i} = A\left(\bar{S}_i^{d_i}\right)$ выполнено условие:

$$\Pi\left(\bar{S}_i^{d_i}, \bar{\gamma}_i^{d_i}\right) = 1. \tag{3}$$

Алгоритм $A$, удовлетворяющий условию (2) будем называть *корректным* для задачи $Z$.

***Определение 1.3.3.*** Задача выделения трендов $Z$ называется *разрешимой* тогда и только тогда, когда для нее существует подходящий корректный алгоритм $A$.

***Теорема 1.3.1. (критерий разрешимости).*** Задача $Z$ является разрешимой тогда и только тогда, когда набор прецедентов $H$ не является противоречивым.

***Доказательство.*** Для упрощения доказательства проведем факторизацию набора прецедентов $H$ по отношению сдвиг - эквивалентности конфигураций $\bar{S}_i^{d_i}$, и будем рассматривать поднаборы $\tilde{H}$, состоящие из прецедентов, соответствующих этим классам эквивалентности. Очевидно, что при непротиворечивости всех поднаборов $\tilde{H}$ непротиворечивым оказывается и весь набор прецедентов $H$.

Заметим, что для всех конфигураций из любого поднабора $\tilde{H}$ алгоритм $A$ дает одинаковые ответы. Это следует из определения разрешимости задачи и сдвиговой устойчивости системы аксиом разметки.

***Необходимость.*** Предположим, что $Z$ - разрешима, то есть существует подходящий алгоритм $A$, удовлетворяющий условию разрешимости задачи (2), но набор прецедентов $H$ - противоречив. Отсюда следует, что существует противоречивый поднабор $\widetilde{H}=\left\{\left(\overline{S}_{p}^{d_p},\overline{\mu}_{p}^{d_p}\right) \mid p\in\{l_1,\dots,l_u\}\subseteq\{1,\dots,q\}, u>1\right\}$ такой, что $\overline{S}_{l_1}^{d_{l_1}}\cong\overline{S}_{l_2}^{d_{l_2}}\cong\dots\cong\overline{S}_{l_u}^{d_{l_u}}$ и $d_{l_1}=d_{l_2}=\dots=d_{l_u}=d_{l_*}$. Это в свою очередь означает, что для $\overline{\mu}_*^{d_{l_*}}=\left(\mu_*^1,\dots,\mu_*^{d_{l_*}}\right)=A\left(\overline{S}_{l_1}^{d_{l_1}}\right)$ выполняется условие (1) определения 1.3.2. А именно, или существует конфигурация из поднабора для которой разметка $\overline{\mu}_*^{d_{l_*}}$ не является подходящей, то есть:

$$\underset{\widetilde{H}}{\exists}\overline{S}_*^{d_{l_*}}:\Pi\left(\overline{S}_*^{d_{l_*}},\overline{\mu}_*^{d_{l_*}}\right)=0,$$

что противоречит определению разрешимости задачи, или выполнено условие:

$$\underset{i=1,\dots,d_{l_*}}{\exists i}\quad\underset{\substack{j=l_1,\dots,l_u\\ S_j^i\in\overline{S}_j^{d_{l_*}}}}{\exists}\left(S_j^i,\mu_j^i\right):\left(\mu_j^i\neq\mu_*^i\right)\wedge\left(\mu_j^i\neq\Delta\right),$$

что эквивалентно условию:

$$\underset{i=1,\dots,d_{l_*}}{\exists i}\ \underset{H}{\exists}\left(S_{j_1}^i,\mu_{j_1}^i\right),\left(S_{j_2}^i,\mu_{j_2}^i\right):\left(\mu_{j_1}^i\neq\Delta\right)\wedge\left(\mu_{j_2}^i\neq\Delta\right)\wedge\left(\mu_{j_1}^i\neq\mu_{j_2}^i\right),$$

что в свою очередь означает, что ответ $\overline{\mu}_*^{d_{l_*}}$ алгоритма $A$ для конфигурации $S_{j_1}^{d_{l_*}}$ или для конфигурации $S_{j_2}^{d_{l_*}}$ будет противоречить условию (2) разрешимости задачи. Необходимость доказана.

***Достаточность.*** Для доказательства достаточности построим подходящий корректный алгоритм $A_*$ в предположении, что набор прецедентов $H$ - непротиворечив.

Допустим, что в $H$ существует $k$ классов сдвиг - эквивалентных конфигураций $\widetilde{H}_j$, $j=1,\dots,k$. Тогда для каждого поднабора

$\widetilde{H}_j = \left\{ \left( \overline{S}_p^{d_{l_j}}, \overline{\mu}_p^{d_{l_j}} \right) \| \; p \in \{l_1, ..., l_j\} \subseteq \{1, ..., q\}, j > 1 \right\}$, где $j = 1, ..., k$, существует разметка $\overline{\mu}_j^{d_{l_j}} = \left\{ \mu_j^1, ..., \mu_j^{d_{l_j}} \right\} \in M^{d_{l_j}}$, такая, что выполнено условие

$$\underset{\{1,...,d\}}{\forall} i \underset{\{l_1,...,l_j\}}{\forall} p : \left( S_p^i \in \overline{S}_p^{d_{l_j}} \right) \Rightarrow \left( \mu_p^i = \mu_j^i \right) \wedge \left( \mu_p^i = \Delta \right), \tag{4}$$

причем

$$\underset{\{l_1,...,l_j\}}{\forall} p : \Pi\left( \overline{S}_p^{d_{l_j}}, \mu_j^d \right) = 1 . \tag{5}$$

Определим алгоритм $A_*$ следующим образом:

$A_*\left(\overline{S}_*^d\right) = \begin{cases} \overline{\mu}_j^{d_{l_j}}, \text{если}\, \overline{S}_*^d \cong \overline{S}_i^{d_i} \in \widetilde{H}_j \\ \overline{\mu}_*^d, \quad \text{если}\, \overline{S}_*^d \notin H. \end{cases}$, $j \in \{1, ..., k\}$, $\overline{\mu}_*^d$ - любая подходящая разметка для $\overline{S}_*^d$, где $\overline{\mu}_*^d \in M^d$, $\overline{S}_*^d \in K$.

Данный алгоритм $A_*$ для всех конфигураций, входящих в набор прецедентов $H$ назначает разметку, удовлетворяющую условиям (4) и (5) непротиворечивости поднаборов соответствующих классов эквивалентности конфигураций. Для всех остальных конфигураций назначается произвольная подходящая разметка. Таким образом оказывается выполненным условие (2) разрешимости задачи. ***Теорема доказана.***

Введем понятие регулярности задачи выделения трендов естественным образом, как расширение понятия разрешимости на класс эквивалентных задач. В качестве эквивалентных, при этом, будем рассматривать задачи с любой непротиворечивой частичной разметкой конфигураций набора прецедентов.

***Определение 1.3.4.*** Задача $Z$ называется *регулярной* тогда и только тогда, когда $Z$ разрешима при любых непротиворечивых частичных разметках $\overline{\mu}_i^{d_i} \in M_\Delta^{d_i}$ всех конфигураций $\overline{S}_i^{d_i}$ из $H$.

***Теорема 1.3.2. (критерий регулярности).*** Разрешимая задача $Z$ является *регулярной* тогда и только тогда, когда для любого поднабора $\widetilde{H} = \left\{ \left( \overline{S}_p^{d_p}, \overline{\mu}_p^{d_p} \right) \| \; p \in \{l_1, ..., l_u\} \subseteq \{1, ..., q\}, u \geq 1 \right\}$ набора $H$ такого, что

$\overline{S}_{l_1}^{d_{l_1}} \cong \overline{S}_{l_2}^{d_{l_2}} \cong ... \cong \overline{S}_{l_u}^{d_{l_u}}$ (в этом случае, естественно, $d_{l_1} = d_{l_2} = ... = d_{l_u}$) из правил разметки следует существование и единственность подходящей разметки конфигураций $\overline{S}_{l_1}^{d_{l_1}},...,\overline{S}_{l_u}^{d_{l_u}}$.

***Доказательство.*** Основная идея доказательства сходна с идей доказательства разрешимости. Для доказательства необходимости показываем, что наличие поднабора, для которого не является обязательным существование единственной разметки, приводит к противоречию с определением регулярности задачи. Достаточность же доказывается при помощи прямого построения соответствующего алгоритма.

***Необходимость.*** Предположим, что в наборе прецедентов $H$ существует такой поднабор $\widetilde{H} = \left\{ \left( \overline{S}_p^{d_p}, \overline{\mu}_p^{d_p} \right) | \; p \in \{l_1,...,l_u\} \subseteq \{1,...,q\}, u > 1 \right\}$ эквивалентных конфигураций $\overline{S}_{l_1}^{d_{l_1}} \cong \overline{S}_{l_2}^{d_{l_2}} \cong ... \cong \overline{S}_{l_u}^{d_{l_u}}$, $d_{l_1} = d_{l_2} = ... = d_{l_u} = d_{l_*}$, для которых может существовать несколько подходящих разметок. Зафиксируем две такие конфигурации с различными полными разметками: $\left(\overline{S}_1^{d_*}, \widetilde{\overline{\mu}}_1^{d_*}\right)$и $\left(\overline{S}_2^{d_*}, \widetilde{\overline{\mu}}_2^{d_*}\right)$. Из того, что разметки $\widetilde{\overline{\mu}}_1^{d_*} \in M^{d_*}$ и $\widetilde{\overline{\mu}}_2^{d_*} \in M^{d_*}$ различны следует, что существует $j_0$ из множества $\{1,\ldots,d_*\}$ такое, что $\widetilde{\mu}_1^{j_0} \neq \widetilde{\mu}_2^{j_0}$. Поэтому возможно построение подходящих частичных разметок $\overline{\mu}_1^{d_*} \in M_\Delta^{d_*}$ и $\overline{\mu}_2^{d_*} \in M_\Delta^{d_*}$, таким образом, что $\mu_1^{j_0} = \widetilde{\mu}_2^{j_0}$ и $\mu_2^{j_0} = \widetilde{\mu}_2^{j_0}$ и, следовательно, $\mu_1^{j_0} \neq \mu_2^{j_0} \neq \Delta$. Очевидно, что данная пара разметок по условию (1) определения 2.3.1 является противоречивой парой и поэтому, как следует из теоремы 1, задача, содержащая в качестве прецедентов разметки $\widetilde{\overline{\mu}}_1^{d_*}$ и $\widetilde{\overline{\mu}}_2^{d_*}$, не является регулярной. Необходимость доказана.

***Достаточность.*** Допустим, что задан набор прецедентов $H = \left\{ \left( \overline{S}_i^{d_i}, \overline{\mu}_i^{d_i} \right) \middle| \overline{S}_i^{d_i} \in K^{d_i}; \overline{\mu}_i^{d_i} \in M_\Delta^{d_i}; i = 1,...,q \right\}$, удовлетворяющий условиям теоремы. Для доказательства покажем, что для любой непротиворечивой частичной разметки существует алгоритм $A_*$, являющийся решением задачи.

Допустим, что в $H$ существует $k$ классов эквивалентных конфигураций, которым соответствуют поднаборы $\widetilde{H}_j = \left\{ \left( \overline{S}_p^{d_{l_j}}, \overline{\mu}_p^{d_{l_j}} \right) \middle| \, p \in \{l_1,...,l_j\} \subseteq \{1,...,q\}, j > 1 \right\}$, где $j = 1,...,k$. Тогда для каждого класса эквивалентности существует единственная подходящая разметка $\overline{\lambda}_j$, $j = 1,...,k$, если класс содержит больше одной эквивалентной конфигурации. Для конфигурации $\overline{S}_i^{d_i}$, не имеющей эквивалентных в наборе $H$, существует подходящая полная разметка $\widetilde{\overline{\mu}}_i^{d_i} \in M^{d_i}$, являющаяся продолжением частичной разметки $\overline{\mu}_i^{d_i} \in M_\Delta^{d_i}$.

Построим алгоритм $A_*$ следующим образом:

$$A_*\left(\overline{S}_*^d\right) = \begin{cases} \overline{\lambda}_j \text{ , } \textit{если}\, \overline{S}_*^d \cong \overline{S}_i^{d_i} \in \widetilde{H}_j \\ \widetilde{\overline{\mu}}_i^{d_i} \text{ ,} \textit{если}\, \overline{S}_*^d = \overline{S}_i^{d_i} \notin \bigcup\limits_{j=1}^{k} \widetilde{H}_j \text{ ,} \\ \quad \overline{\mu}_*^d, \qquad \textit{если}\, \overline{S}_* \notin H. \end{cases}$$

где $j \in \{1,...,k\}$, $\overline{\mu}_*^d \in M^d$ - любая подходящая разметка для $\overline{S}_*^d \in C^d$.

Данный алгоритм $A_*$ для всех конфигураций, входящих в набор прецедентов, назначает разметку, удовлетворяющую условиям (4) и (5) непротиворечивости поднаборов конфигураций из соответствующих классов эквивалентности. Для всех остальных конфигураций назначается произвольная подходящая разметка. Таким образом, оказывается выполненным условие (2) разрешимости задачи. ***Теорема доказана.***

Итак, в рамках первой главы сформулировано описание класса задач синтеза обучаемых алгоритмов выделения трендов и получена система критериев разрешимости и регулярности [35,43-47].

# Глава 2. Проблема локализации

Представляется естественным и целесообразным рассмотреть случай, в котором решение о разметке каждой точки должно быть принято лишь на основе анализа точек из некоторой ее окрестности.

## 2.1. Окрестности в конечных плоских конфигурациях

***Определение 2.1.1.*** *Подконфигурацией* $P_{\overline{S}^d}$ конфигурации $\overline{S}^d$ называется любое подмножество точек из $\overline{S}^d$: $P_{\overline{S}^d} \subseteq \overline{S}^d$. Подконфигурацией $\widetilde{P}_{\overline{S}^d}$ конфигурации $\overline{S}^d$ называется *связной*, если $\widetilde{P}_{\overline{S}^d} = \left(S^{i_1}, S^{i_1+1}, \ldots, S^{i_2-1}, S^{i_2}\right) \subseteq \overline{S}^d$, где $1 \le i_1 \le i_2 \le d$.

Следует отметить, что подконфигурация и связная подконфигурация могут рассматриваться как самостоятельные конфигурации.

***Определение 2.1.2.*** *Окрестностью* точки $S^i \in \overline{S}^d$ называется пара, содержащая собственно точку $S^i$ и некоторую связную подконфигурацию $\widetilde{P}_{\overline{S}^d}$ конфигурации $\overline{S}^d$, включающую эту точку:

$$O_{\overline{S}^d}\left(S^i\right) = \left(S^i, \left(S^{i_1}, S^{i_1+1}, \ldots, S^{i_2}\right)\right),$$

где $i_1 \le i \le i_2$.

Точку $S^i$ будем называть *опорной точкой* окрестности $O_{\overline{S}^d}\left(S^i\right)$. Будем также использовать обозначение, в котором вместо точки в окрестность входит ее номер:

$$O_{\overline{S}^d}\left(S^{i_1,j}\right) = \left(j, \left(S^{i_1}, S^{i_1+1}, \ldots, S^{i_2}\right)\right),$$

где $i_1, i_2 \in \{1, \ldots, d\}$, $i_1 < i_2$, $j \in \{1, \ldots i_2 - i_1\}$.

В случае $i_1 = i_2$, когда окрестность точки состоит из самой точки, будем говорить, об окрестности точки нулевого размера или нулевой окрестности:

$$O_{\overline{S}^d}\left(S^{i_1}\right) = \left(S^{i_1}, \left(S^{i_1}\right)\right) = \left(1, \left(S^{i_1}\right)\right).$$

Разметку, полную или частичную окрестности $O_{\overline{S}^d}\left(S^i\right)$ обозначим $O_{\overline{\mu}^d}\left(S^i\right)$.

***Определение 2.1.3.*** На конфигурации $\overline{S}^d$ задана *система окрестностей* $O_{\overline{S}^d}$, если каждой точке $S^i \in \overline{S}^d$ поставлена в соответствие некоторая ее окрестность $O_{\overline{S}^d}\left(S^i\right)$. Система окрестностей $\Omega$ задана на $K$, если для каждой конфигурации из $K$ задана система окрестностей.

Система окрестностей $O_{\overline{S}^d}$ конфигурации $\overline{S}^d$ называется *тривиальной,* если окрестность каждой точки совпадает со всей конфигурацией, то есть:

$$\underset{\overline{S}^d}{\forall} S^i : O_{\overline{S}^d}\left(S^i\right) = \overline{S}^d .$$

Система окрестностей $\Omega$, заданная на $K$, называется *тривиальной* тогда и только тогда, когда тривиальной является система окрестностей каждой конфигурации из $K$, то есть:

$$\underset{K}{\forall} \overline{S}^d \underset{\overline{S}^d}{\forall} S^i : O_{\overline{S}^d}\left(S^i\right) = \overline{S}^d .$$

Отметим, что по своему устройству окрестность отличается от конфигурации. По сути дела окрестность – это пунктированная конфигурация, то есть конфигурация, в которой выделена опорная точка. Поэтому для окрестностей необходимо собственное определение сдвиг – эквивалентности.

***Определение 2.1.4.*** Окрестности $O_{\overline{S}_1^d}\left(S_1^{i_1}\right) = \left(S_1^{i_1}, \left(S_1^{i_1-k}, S_1^{i_1-k+1}, \ldots, S_1^{i_1}, \ldots, S_1^{i_1+l}\right)\right)$ и $O_{\overline{S}_2^d}\left(S_2^{i_2}\right) = \left(S_2^{i_2}, \left(S_2^{i_2-k}, \ldots, S_2^{i_2}, \ldots, S_2^{i_2+l}\right)\right)$, где $k \geq 0$ и $l \geq 0$, называются *сдвиг – эквивалентными,* если существует такой вектор $p^* = \left(t^*, v^*\right)$, что для всех $m \in \{-k, -k+1, \ldots, l\}$ выполнено условие:

$$S_1^{i_1+m} = S_2^{i_2+m} + p^* .$$

Отметим, что при $m = 0$ из сдвиг - эквивалентности окрестностей следует выполнение условия $S_1^{i_1} = S_2^{i_2} + p^*$.

***Определение 2.1.5.*** *Подокрестностью* $P_{O_{\overline{S}^d}\left(S^i\right)}$ окрестности $O_{\overline{S}^d}\left(S^i\right)$ точки $S^i \in \overline{S}^d$ называется такая окрестность точки $S^i$, точки которой полностью содержаться в окрестности $O_{\overline{S}^d}\left(S^i\right)$.

Следует отметить, что в силу определения опорная точка подокрестности всегда совпадает с опорной точкой окрестности.

***Определение 2.1.5.*** *Длиной конфигурации* $\overline{S}^d \in K^d$ называется величина $l^0_{\overline{S}^d} = \left(t^d - t^1\right) \in R$.

Для конфигурации $\overline{S}^d \in K^d$ и $k < d$ $\left(k \in N\right)$ *левой* $k$ *-окраиной конфигурации* называется связная подконфигурация $\widetilde{L}^k_{\overline{S}^d} = \left(S^1, \ldots, S^k\right)$.

Для конфигурации $\overline{S}^d \in K^d$ и $k < d$ *правой* $k$ *-окраиной конфигурации* называется связная подконфигурация $\widetilde{R}^k_{\overline{S}^d} = \left(S^{d-k+1}, \ldots, S^d\right)$.

Для конфигурации $\overline{S}^d \in K^d$ и $l < l^0_{\overline{S}^d}$ $\left(l \in R\right)$ *левой* $l$ *-окраиной конфигурации* называется связная подконфигурация $\widetilde{L}^l_{\overline{S}^d} = \left(S^1, \ldots, S^{i_1}\right)$ такую, что $\left(t^{i_1} - t^1\right) \le l$ и $\left(t^{i_1+1} - t^1\right) > l$.

Для конфигурации $\overline{S}^d \in K^d$ и $l < l^0_{\overline{S}^d}$ *правой* $l$ *-окраиной конфигурации* называется связная подконфигурация $\widetilde{R}^l_{\overline{S}^d} = \left(S^{i_1}, \ldots, S^d\right)$ такая, что $\left(t^d - t^{i_1}\right) \le l$ и $\left(t^d - t^{i_1-1}\right) < l$.

Рассмотрим несколько важных частных случаев задания систем окрестностей.

Будем называть систему окрестностей $O^k_{\overline{S}^d}$ *системой* $k$ *- окрестностей слева*, если каждой точке $S^i \in \overline{S}^d$ сопоставлена окрестность следующим образом:

$$O^k_{\overline{S}^d}\left(S^i\right) = \begin{cases} \left(S^i, \left(S^{i-k}, S^{i_1-k+1}, \ldots, S^{i-1}, S^i\right)\right), & S^i \notin \widetilde{L}^k_{\overline{S}^d} \\ \left(S^i, \left(S^1, S^2, \ldots, S^i\right)\right), & S^i \in \widetilde{L}^k_{\overline{S}^d} \end{cases}.$$

Будем называть систему окрестностей $O^{k_1,k_2}_{\overline{S}^d}$ *системой* $k_1, k_2$ *- окрестностей*, если каждой точке $S^i \in \overline{S}^d$ сопоставлена окрестность следующим образом:

$$O_{\bar{S}^d}^{k_1,k_2}\left(S^i\right)=\begin{cases}\left(S^i,\left(S^1,S^2,\ldots,S^i,S^{i+1},\ldots,S^{i+k_2-1},S^{i+k_2}\right)\right), & S^i\in\tilde{L}_{\bar{S}^d}^{k_1}\\ \left(S^i,\left(S^{i-k_1},S^{i-k_1+1},\ldots,S^{i-1},S^i,\ldots,S^{d-1},S^d\right)\right), & i\in\tilde{R}_{\bar{S}^d}^{k_2}\\ \left(S^i,\left(S^1,S^2,\ldots,S^{i-1},S^i,\ldots,S^{d-1},S^d\right)\right), & i\in\tilde{L}_{\bar{S}^d}^{k_1}\cap\tilde{R}_{\bar{S}^d}^{k_2}\\ \left(S^i,\left(S^{i-k_1},S^{i-k_1+1},\ldots,S^{i-1},S^i,S^{i+1},\ldots,S^{i+k_2-1},S^{i+k_2}\right)\right), & S^i\notin\tilde{L}_{\bar{S}^d}^{k_1}\cup\tilde{R}_{\bar{S}^d}^{k_2}\end{cases}.$$

В случае $k_1=k_2=k$ систему $k_1,k_2$ - окрестностей будем называть *системой центральных* $k$ *- окрестностей* и обозначать $O_{\bar{S}^d}^{k}$ :

$$O_{\bar{S}^d}^{k}\left(S^i\right)=\begin{cases}\left(S^i,\left(S^1,S^2,\ldots,S^i,S^{i+1},\ldots,S^{i+k-1},S^{i+k}\right)\right), & S^i\in\tilde{L}_{\bar{S}^d}^{k}\\ \left(S^i,\left(S^{i-k},S^{i-k+1},\ldots,S^{i-1},S^i,\ldots,S^{d-1},S^d\right)\right), & i\in\tilde{R}_{\bar{S}^d}^{k}\\ \left(S^i,\left(S^1,S^2,\ldots,S^{i-1},S^i,\ldots,S^{d-1},S^d\right)\right), & i\in\tilde{L}_{\bar{S}^d}^{k}\cap\tilde{R}_{\bar{S}^d}^{k}\\ \left(S^i,\left(S^{i-k},S^{i-k+1},\ldots,S^{i-1},S^i,S^{i+1},\ldots,S^{i+k-1},S^{i+k}\right)\right), & S^i\notin\tilde{L}_{\bar{S}^d}^{k}\cup\tilde{R}_{\bar{S}^d}^{k}\end{cases}.$$

Отметим, что при $d\le k$ для каждой точки $S^i\in\bar{S}^d$ центральной $k$ - окрестностью является вся конфигурация $\bar{S}^d$. В случае $k=0$ окрестностью каждой точки является сама точка.

Будем называть систему окрестностей $O_{\bar{S}^d}^{l}$ *системой* $l$ *- окрестностей слева*, если каждой точке $S^i\in\bar{S}^d$ сопоставлена окрестность следующим образом:

$$O_{\bar{S}^d}^{l}\left(S^i\right)=\begin{cases}\left\{\left(S^i,\left(S^1,\ldots,S^i\right)\right)\right\}, & S^i\in\tilde{L}_{\bar{S}^d}^{l}\\ \left\{\left(S^i,\left(S^{i_1},\ldots,S^i\right)\right)\middle|\left(\left(t^i-t^{i_1}\right)\le l\right)\wedge\left(\left(t^i-t^{i_1-1}\right)>l\right)\right\}, & S^i\notin\tilde{L}_{\bar{S}^d}^{l}\end{cases}.$$

Будем называть систему окрестностей $O_{\bar{S}^d}^{l_1,l_2}$ *системой* $l_1,l_2$ *- окрестностей*, если каждой точке $S^i\in\bar{S}^d$ сопоставлена окрестность следующим образом:

$$O^{l_1,l_2}_{\bar{S}^d}\left(S^i\right)=\begin{cases}\left\{\left(S^i,\left(S^1,\ldots,S^i,\ldots,S^{i_2}\right)\right)\middle|\left(\left(t^{i_2}-t^i\right)\le l_1\right)\wedge\left(\left(t^{i_2+1}-t^i\right)>l_1\right)\right\}, & S^i\in\widetilde{L}^{l_1}_{\bar{S}^d}\\ \left\{\left(S^i,\left(S^{i_1},\ldots,S^i,\ldots,S^d\right)\right)\middle|\left(\left(t^i-t^{i_1}\right)\le l_2\right)\wedge\left(\left(t^i-t^{i_1-1}\right)>l_2\right)\right\}, & S^i\in\widetilde{R}^{l_2}_{\bar{S}^d}\\ \left\{\left(S^i,\left(S^1,\ldots,S^i,\ldots,S^d\right)\right)\right\}, & S^i\in\widetilde{L}^{l_1}_{\bar{S}^d}\cap\widetilde{R}^{l_2}_{\bar{S}^d}\\ \left\{\left(S^i,\left(S^{i_1},\ldots,S^i,\ldots,S^{i_2}\right)\right)\middle|\begin{array}{l}\left(\left(t^i-t^{i_1}\right)\le l_1\right)\wedge\left(\left(t^i-t^{i_1-1}\right)>l_1\right)\\ \wedge\left(\left(t^{i_2}-t^i\right)\le l_2\right)\wedge\left(\left(t^{i_2+1}-t^i\right)>l_2\right)\end{array}\right\}, & S^i\notin\widetilde{L}^{l_1}_{\bar{S}^d}\cup\widetilde{R}^{l_2}_{\bar{S}^d}\end{cases}.$$

В случае $l_1=l_2=l$ систему $l_1,l_2$ - окрестностей будем называть *системой центральных* $l$ *- окрестностей* и обозначать $O^l_{\bar{S}^d}$ :

$$O^{l}_{\bar{S}^d}\left(S^i\right)=\begin{cases}\left\{\left(S^i,\left(S^1,\ldots,S^i,\ldots,S^{i_2}\right)\right)\middle|\left(\left(t^{i_2}-t^i\right)\le l\right)\wedge\left(\left(t^{i_2+1}-t^i\right)>l\right)\right\}, & S^i\in\widetilde{L}^{l}_{\bar{S}^d}\\ \left\{\left(S^i,\left(S^{i_1},\ldots,S^i,\ldots,S^d\right)\right)\middle|\left(\left(t^i-t^{i_1}\right)\le l\right)\wedge\left(\left(t^i-t^{i_1-1}\right)>l\right)\right\}, & S^i\in\widetilde{R}^{l}_{\bar{S}^d}\\ \left\{\left(S^i,\left(S^1,\ldots,S^i,\ldots,S^d\right)\right)\right\}, & S^i\in\widetilde{L}^{l}_{\bar{S}^d}\cap\widetilde{R}^{l}_{\bar{S}^d}\\ \left\{\left(S^i,\left(S^{i_1},\ldots,S^i,\ldots,S^{i_2}\right)\right)\middle|\begin{array}{l}\left(\left(t^i-t^{i_1}\right)\le l\right)\wedge\left(\left(t^i-t^{i_1-1}\right)>l\right)\\ \wedge\left(\left(t^{i_2}-t^i\right)\le l\right)\wedge\left(\left(t^{i_2+1}-t^i\right)>l\right)\end{array}\right\}, & S^i\notin\widetilde{L}^{l}_{\bar{S}^d}\cup\widetilde{R}^{l}_{\bar{S}^d}\end{cases}.$$

Следует отметить, что при $\left(t^d-t^1\right)\le l$ центральной $l$ - окрестностью каждой точки $S^i\in\bar{S}^d$ является вся конфигурация $\bar{S}^d$. При $l<\min\limits_{i=2\ldots d}\left(t^i-t^{i-1}\right)$ окрестностью каждой точки является сама точка.

Аналогичным образом можно определить системы $k$ - и $l$ - окрестностей справа.

## 2.2. Локальность аксиом разметки

***Определение 2.2.1.*** Аксиома $\pi_i\in\Pi$ называется локализуемой тогда и только тогда, когда существует такая нетривиальная система окрестностей на $K$, что выполнено условие:

$$\underset{K}{\forall}\bar{S}_1^{d_1}\ \underset{K}{\forall}\bar{S}_2^{d_2}\ \underset{\bar{S}_1^{d_1}}{\forall S_1^{i_1}}\ \underset{\bar{S}_2^{d_2}}{\forall S_2^{i_2}}:\left(O_{\bar{S}_1^{d_1}}\left(S_1^{i_1}\right)\cong O_{\bar{S}_2^{d_2}}\left(S_2^{i_2}\right)\right)\Rightarrow\left(\underset{M^{d_0}}{\forall}\bar{\mu}^{d_0}\Rightarrow\pi_i\left(S_1^{i_1},\bar{\mu}^{d_0}\right)=\pi_i\left(S_2^{i_2},\bar{\mu}^{d_0}\right)\right),$$

где $d_0=\left|O_{\bar{S}_1^{d_1}}\left(S^1\right)\right|=\left|O_{\bar{S}_2^{d_2}}\left(S^2\right)\right|$.

***Определение 2.2.2.*** Пусть задана нетривиальная система окрестностей $\Omega$ на $K$. Аксиома $\pi_i \in \Pi$ называется $\Omega$ - локальной тогда и только тогда, когда выполнено условие:

$$\underset{K}{\forall} \bar{S}_1^{d_1} \underset{K}{\forall} \bar{S}_2^{d_2} \underset{\bar{S}_1^{d_1}}{\forall S_1^{i_1}} \underset{\bar{S}_2^{d_2}}{\forall S_2^{i_2}} : \left(O_{\bar{S}_1^{d_1}}\left(S_1^{i_1}\right) \cong O_{\bar{S}_2^{d_2}}\left(S_2^{i_2}\right)\right) \Rightarrow \left(\underset{M^{d_0}}{\forall} \bar{\mu}^{d_0} \Rightarrow \pi_i\left(S_1^{i_1}, \bar{\mu}^{d_0}\right) = \pi_i\left(S_2^{i_2}, \bar{\mu}^{d_0}\right)\right),$$

где $d_0 = \left|O_{\bar{S}_1^{d_1}}\left(S^1\right)\right| = \left|O_{\bar{S}_2^{d_2}}\left(S^2\right)\right|$.

Иначе говоря, для любых двух точек с одинаковыми окрестностями при одинаковой разметке аксиома одновременно будет или выполнена или нет.

***Определение 2.2.3.*** Система аксиом $\Pi = \{\pi_1,...,\pi_k\}$ называется $\Omega$ - локальной тогда и только тогда, когда $\Omega$ - локальной является каждая аксиома из $\Pi$.

***Определение 2.2.4.*** Систему аксиом $\Pi = \{\pi_1,...,\pi_k\}$ называется локализуемой тогда и только тогда, когда существует нетривиальная окрестностей $\Omega$ на $K$ такая, что локализуемой является каждая аксиома из $\Pi$.

Приведем примеры:

Пример 1. Зафиксируем словарь разметки $M = \{max, min, plt, non\}$ .

Аксиома 1. $\underset{\{3,...,d-2\}}{\forall i} : (v_{i-1} < v_i) \wedge (v_{i+1} < v_i) \wedge (v_{i-2} < v_i) \wedge (v_{i+2} < v_i) \Leftrightarrow \mu_i = "\max"$ .

Аксиома 2. $\underset{\{3,...,d-2\}}{\forall i} : (v_{i-1} > v_i) \wedge (v_{i+1} > v_i) \wedge (v_{i-2} > v_i) \wedge (v_{i+2} > v_i) \Leftrightarrow \mu_i = "\min"$.

Аксиома 3. $\underset{\{2,...,d-1\}}{\forall i} : (v_{i-1} < v_i < v_{i+1}) \Rightarrow (\mu_i \neq "\max") \wedge (\mu_i \neq "\min")$.

Аксиома 4. $\underset{\{2,...,d-1\}}{\forall i} : (v_{i-1} > v_i > v_{i+1}) \Rightarrow (\mu_i \neq "\max") \wedge (\mu_i \neq "\min")$.

Пример 2. При том же словаре разметки.

Аксиома 1. $\underset{\{1,...,d\}}{\forall i} : (\mu_i = "\max") \Rightarrow \underset{\{1,...,i-1,i+1,...,d\}}{\forall j} (\mu_j \neq "\max")$.

Аксиома 2. $\underset{\{1,...,d\}}{\forall i} : (\mu_i = "\min") \Rightarrow \underset{\{1,...,i-1,i+1,...,d\}}{\forall j} (\mu_j \neq "\min")$.

Пример 3. Словарь разметки $M = \{max, min, plt, non\}$

Аксиома 1. $\underset{\{1,...,d\}}{\forall} i_1 < i_2 : (\mu_{i_1} = "\max") \wedge (\mu_{i_2} = "\max") \Rightarrow \underset{\{i_1+1,\ldots,i_2-1\}}{\exists} i_0 : \mu_0 = "\min"$.

Аксиома 2. $\underset{\{1,\ldots,d\}}{\forall} i_1 < i_2 : \left(\mu_{i_1} = \text{"min"}\right) \wedge \left(\mu_{i_2} = \text{"min"}\right) \Rightarrow \underset{\{i_1+1,\ldots,i_2-1\}}{\exists} i_0 : \mu_0 = \text{"max"}$.

Легко видеть, что каждая аксиома из примера 1 является локальной, то есть существует некоторая система окрестностей, в рамках которой условия определений 2.2.1 – 2.2.4 становятся верными. В свою очередь, очевидно, что для аксиом примера 2, требующих единственности точек минимума и максимума, не существует нетривиальной системы окрестностей, в рамках которой выполнялись бы условия тех же определений. Таким образом аксиомы примера 2 не являются локальными.

Менее очевиден тот факт, что для аксиом примера 3, требующих выполнения достаточно естественного условия чередования точек минимума и максимума, также не существует системы окрестностей, в рамках которой условия определений 2.2.1 – 2.2.4 становились бы верными.

## 2.3. Локальность алгоритмов разметки

Локальность является одним из основных топологических понятий, используемых в современной прикладной математике.

В классических работах академика РАН Ю.И. Журавлева [7,8,9] была развита теория локальных алгоритмов, где алгоритмы при принятии решения “осматривали” окрестность определенного порядка. В данном частном случае используется понятие окрестности и вводится понятие локального алгоритма.

***Определение 2.3.1.*** Пусть на $K$ задана система окрестностей. Алгоритм разметки $A$ будем называть $\Omega-$*локальным* тогда и только тогда, когда при любых конфигурациях $\overline{S}^{d_1}, \overline{S}^{d_2} \in K$ при всех $i_1 = 1,\ldots d_1$ и $i_2 = 1,\ldots d_2$ выполнено условие:

$$\left(O_{\overline{S}^{d_1}}\left(S^{i_1}\right) \cong O_{\overline{S}^{d_2}}\left(S^{i_2}\right)\right) \Rightarrow \mu^{i_1} = \mu^{i_2},$$

где $\mu^{i_1} \in \overline{\mu}^{d_1} = A\left(\overline{S}^{d_1}\right)$ и $\mu^{i_2} \in \overline{\mu}^{d_2} = A\left(\overline{S}^{d_2}\right)$.

## 2.4. Локальная разрешимость и регулярность

В этом разделе сформулируем задачу $Z_l$ выделения трендов синтеза подходящего корректного локальными алгоритма $A_l$, а также введем определения понятий локальной разрешимости и регулярности, сформулируем и докажем критерии локальной разрешимости и регулярности [35, 45]. Пусть на $K$ задана система окрестностей $\Omega$, словарь разметки $M$ и сдвиг - устойчивая $\Omega$ - локальная система аксиом $\Pi = \{\pi_1, ..., \pi_k\}$, также задан набор прецедентов $H = \left\{ \left( \overline{S}_i^{d_i}, \overline{\mu}_i^{d_i} \right) \middle| \overline{S}^{d_i} \in K^{d_i}; \overline{\mu}_i^{d_i} \in M_\Delta^{d_i}; i = 1, ..., q \right\}$.

Введенное определение сдвиг – эквивалентности окрестностей позволяет применять к окрестностям понятия, введенные для конфигураций и содержащие отношения сдвиг – эквивалентности.

В частности, сформулируем определение противоречивого набора окрестностей.

***Определение 2.4.1.*** Пусть задан набор прецедентов $H = \left\{ \left( \overline{S}_i^{d_i}, \overline{\mu}_i^{d_i} \right) \middle| \overline{S}_i^{d_i} \in K^{d_i}; \overline{\mu}_i^{d_i} \in M_\Delta^{d_i}; i = 1, ..., q \right\}$. Тогда множеством окрестностей $O_H$ набора прецедентов $H$ в смысле системы окрестностей $\Omega$ называется множество окрестностей всех точек всех конфигураций набора:

$$O_H = \left\{ O_{\overline{S}_i^{d_i}}\left(S_i^j\right) \middle| O_{\overline{S}_i^{d_i}}\left(S_i^j\right) \in \Omega; \overline{S}_i^{d_i} \in H; i = 1, ..., q \right\},$$

а множеством частично размеченных окрестностей $O_H^\mu$ набора прецедентов называется множество:

$$O_H^\mu = \left\{ \left( O_{\overline{S}_i^{d_i}}\left(S_i^j\right), O_{\overline{\mu}_i^{d_i}}\left(S_i^j\right) \right) \middle| O_{\overline{S}_i^{d_i}}\left(S_i^j\right) \in \Omega; \overline{S}_i^{d_i} \in H; \overline{\mu}_i^{d_i} \in M_\Delta^{d_i}; i = 1, ..., q \right\}.$$

Аналогично определению 1.3.2. рассмотрим набор, который составляют частично размеченные сдвиг - эквивалентные окрестности $O_L^\mu = \left\{ \left( O_{\overline{S}_1^d}\left(\overline{S}_{i_1}^{j_1}\right), O_{\overline{\mu}_1^d}\left(\overline{S}_{i_1}^{j_1}\right) \right), \left( O_{\overline{S}_2^d}\left(\overline{S}_{i_2}^{j_2}\right), O_{\overline{\mu}_2^d}\left(\overline{S}_{i_2}^{j_2}\right) \right), \ldots, \left( O_{\overline{S}_l^d}\left(\overline{S}_{i_l}^{j_l}\right), O_{\overline{\mu}_l^d}\left(\overline{S}_{i_l}^{j_l}\right) \right) \right\}$.

***Определение 2.4.2.*** Набор $O_L^\mu$ частично размеченных сдвиг – эквивалентных окрестностей длины $d$ называется *противоречивым* тогда и только тогда, когда для любой разметки $\bar{\mu}_*^d = \{\mu_*^1,...,\mu_*^d\} \in M^d$ верно, что из того, что разметка для всех окрестностей из множества $O_L^\mu$ является подходящей, следует, что у каких-либо двух эквивалентных конфигураций две размеченные точки с одинаковых номером имеют различную разметку, т.е.

$$\left(\underset{M^d}{\forall} \bar{\mu}_*^d \underset{\{1,\ldots,l\}}{\exists} j' : \Pi\left(O_{\bar{S}_{j'}^d}\left(\bar{S}_{i_{j'}}^{j_{j'}}\right), \bar{\mu}_*^d\right) = 1\right) \Rightarrow \underset{\{1,\ldots,d\}}{\exists} i \underset{\{1,\ldots,l\}}{\exists} j'' : \left(\mu_{j_{j''}}^{i_{j''}} \neq \mu_*^i\right) \wedge \left(\mu_{j_{j''}}^{i_{j''}} \neq \Delta\right). \quad (6)$$

Отметим также, что из свойства сдвиг - устойчивости системы аксиом следует, что разметка $\bar{\mu}_*^d$ или подходит для всех конфигураций набора $O_L^\mu$ или не подходит ни для одной.

Очевидно, что любой набор $O_H^\mu$, в который входит противоречивый набор в качестве поднабора, также является противоречивым. Набор $O_H^\mu$, который не содержит противоречивых поднаборов сдвиг – эквивалентных окрестностей, называется *непротиворечивым*.

Противоречивый набор из двух частично размеченных сдвиг – эквивалентных окрестностей называется *противоречивой парой окрестностей*.

Введем несколько обозначений. Окрестность точки $S^i \in \bar{S}^d$ в смысле системы окрестностей $\Omega$ обозначим $O_{\bar{S}^d}^\Omega\left(S^i\right)$ или $O^\Omega\left(S^i\right)$. Разметку (или частичную разметку) окрестности точки $S^i \in \bar{S}^d$ в смысле системы окрестностей $\Omega$ обозначим как $\mu\left(O_{\bar{S}^d}^\Omega\left(S^i\right)\right)$ или $\mu\left(O^\Omega\left(S^i\right)\right)$ или $\mu\left(O\left(S^i\right)\right)$. Частичную разметку окрестности точки $S_i^j$ конфигураций $\bar{S}_i^{d_i} \in H$ обозначим $O_H\left(S_i^j\right)$, а саму окрестность $O_H\left(S_i^j\right)$.

Напомним, что множество окрестностей набора прецедентов $H$ обозначается $O_H = \left\{O_{\bar{S}_i^{d_i}}\left(S_i^j\right) \middle| O_{\bar{S}_i^{d_i}}\left(S_i^j\right) \in \Omega; \bar{S}_i^{d_i} \in H; i = 1,...,q\right\}$, а множество частично размеченных окрестностей точек из конфигураций набора прецедентов обозначим $O_{H^\mu} = \left\{ O_{\left(\overline{S}_i^{d_i}, \overline{\mu}_i^{d_i}\right)}\left(S_i^j\right) \middle| \overline{S}_i^{d_i} \in H, \overline{\mu}_i^{d_i} \in H \right\}$.

***Определение 2.4.3.*** Задача $Z_l$ называется локально разрешимой, если существует подходящий корректный локальный алгоритм $A_l$.

***Теорема 2.4.1. (критерий локальной разрешимости).*** Задача является локально разрешимой тогда и только тогда, когда множество частично размеченных окрестностей $O_{H^\mu}$, соответствующее набору прецедентов $H$, является непротиворечивым набором.

Рассуждения, приводящие к доказательству этой теоремы, повторяют доказательство теоремы 1.3.1. В качестве набора прецедентов при этом рассматривается множество $O_{H^\mu}$. Необходимость доказывается путем получения противоречия в предположении, что задача разрешима, а набор $O_{H^\mu}$ противоречив. В доказательстве достаточности непосредственно строится пример алгоритма.

***Определение 2.4.4.*** Задача $Z_l$ называется локально регулярной, если она локально разрешима для любой непротиворечивой частичной разметки $\overline{\mu}^d \in M_\Delta^d$ всех конфигураций $\overline{S}_i^{d_i} \in H$.

***Теорема 2.4.2. (критерий локальной регулярности).*** Разрешимая задача является локально регулярной тогда и только тогда, когда для любого набора сдвиг - эквивалентных окрестностей точек из набора прецедентов из правил разметки следует единственность подходящей разметки.

Идея доказательства аналогична идее доказательства теоремы 1.3.2.

## 2.5. Проблемы мощности систем окрестностей

До сих пор, обсуждая проблему локализации, мы считали, что задана некоторая система окрестностей на $K$ и оставляли в стороне вопрос о мощности окрестности и мощности системы окрестностей. Тем не менее, проблема выбора мощности окрестности чрезвычайно актуальна. С одной стороны разрешимая (регулярная) задача при некоторой мощности (размере) окрестностей может оказаться локально неразрешимой – в предельном случае, когда окрестностью является сама точка, неразрешимой оказывается практически любая задача. С другой стороны, содержательная обоснованность и вычислительная сложность алгоритмов очевидным образом зависят от размеров окрестностей. Ясно, что для любой разрешимой (регулярной) задачи существует некоторой предельный размер (мощность) окрестностей при которой задача все еще является разрешимой (регулярной) [48].

В данном разделе будем считать, что фиксирован некоторый словарь разметки $M$ и некоторый набор аксиом разметки $\Pi$. Будем также предполагать, что набор аксиом $\Pi$ не требует единственности разметки для любой пары сдвиг - эквивалентных конфигураций или окрестностей. В противном случае все регулярные задачи также являются и локально регулярными вне зависимости от системы окрестностей, а проблема поиска оптимальной системы окрестностей, естественно, теряет смысл.

Далее будем рассматривать некоторый набор прецедентов $H$. Вначале введем понятие мощности конфигурации. Очевидно, что без ограничения общности любая окрестность $O_{\overline{S}}\left(S^i\right)$ точки $\overline{S}^i$ конфигурации $\overline{S}$ может быть обозначена двумя крайними точками этой окрестности и опорной точкой $O_{\overline{S}}\left(S^i\right)=\left(S',S^i,S''\right)$, $S',S^i,S''\in\overline{S}$

Также очевидно, что окрестность однозначным образом может быть задана и тройкой $O_{\overline{S}}\left(S^i\right)=\left(n',S^i,n''\right)$, где $n'\in N$ количество точек окрестности слева от опорной точки, а $n''\in N$ – справа.

В некоторых случая будем также считать, что окрестность задана парой расстояний от опорной точки и самой опорной точкой $O_{\overline{S}}\left(S^i\right)=\left(l',S^i,l''\right)$, где $l'=t^i-t'$, $l''=t''-t^i$, $l',l''\in R$, $S^i=\left(t^i,v^i\right)$ - опорная точка окрестности, $S'=(t',v')$ и $S''=(t'',v'')$ - граничные точки окрестности, $S'=(t',v')$ - левая, а $S''=(t'',v'')$ - правая граничная точка окрестности.

В качестве мощности окрестности можно рассматривать значения некоторой неотрицательной монотонной функции $D$, определенной либо на множестве пар вида $(n', n'')$, либо на множестве пар вида $(l', l'')$.

Очевидный пример мощности: сумма количеств точек окрестности справа и слева от опорной: $D\left(O_{\overline{S}}\left(S^i\right)\right) = n' + n''$.

Следует отметить, что понятие мощности системы окрестностей является аналогом понятия порядка окрестности из [7].

## 2.6. Отношения порядка на конфигурациях и окрестностях

Введем отношение порядка на множестве всех конфигураций $K$. Для этого положим $\overline{S}_1 \le \overline{S}_2$, если $\overline{S}_2$ содержит связную подконфигурацию $\widetilde{P}_{\overline{S}_2}$ такую, что $\overline{S}_1^{d_1} \cong \widetilde{P}_{\overline{S}_2}$. При этом соотношение $\overline{S}_1 < \overline{S}_2$ равносильно тому, что $\overline{S}_1 \le \overline{S}_2$ и, при этом $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ не являются сдвиг - эквивалентными. Запись $\overline{S}_1 \parallel \overline{S}_2$ обозначает несравнимость конфигураций $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$.

Докажем, что введенное отношение является отношением порядка, то есть является рефлексивным, антисимметричным и транзитивным.

Рефлексивность отношения очевидна. Всегда выполнено отношение $\overline{S}_1 \le \overline{S}_1$, то есть любая конфигурация сдвиг эквивалента самой себе.

Антисимметричность: из $\overline{S}_1 \le \overline{S}_2$ и $\overline{S}_2 \le \overline{S}_1$ следует $\overline{S}_1 \cong \overline{S}_2$.

Доказательство. Обозначим длины конфигураций $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$, соответственно, $d_1$ и $d_2$. Из $\overline{S}_1 \le \overline{S}_2$ следует, что $d_1 \le d_2$. С другой стороны из $\overline{S}_2 \le \overline{S}_1$ следует, что $d_2 \le d_1$. Отсюда очевидно следует, что $d_1 = d_2$, то есть конфигурации $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ имеют одинаковую длину. При этом $\overline{S}_1$ содержит связную подконфигурацию сдвиг - эквивалентную $\overline{S}_2$, а $\overline{S}_2$ содержит связную подконфигурацию сдвиг - эквивалентную $\overline{S}_1$. Отсюда следует, что $\overline{S}_1 \cong \overline{S}_2$.

Транзитивность: из $\bar{S}_1 \le \bar{S}_2$ и $\bar{S}_2 \le \bar{S}_3$ следует $\bar{S}_1 \le \bar{S}_3$.

Доказательство. Из $\bar{S}_1 \le \bar{S}_2$ по определению следует, что $\bar{S}_1 \cong S' = \tilde{P}_{\bar{S}_2}$, а из $\bar{S}_2 \le \bar{S}_3$ следует - $\bar{S}_2 \cong S'' = \tilde{P}_{\bar{S}_3}$. Очевидно, что $S'$ является связной подконфигурацией $S''$, которая в свою очередь является связной подконфигурацией $S_3$. Отсюда очевидно следует, что $S'$ является связной подконфигурацией $S_3$. Отсюда очевидно $\bar{S}_1 \cong P_{\bar{S}_3}$, то есть $\bar{S}_1 \le \bar{S}_3$.

Также введем порядок и на множестве всех окрестностей $\Omega$. Для этого положим $O_{\bar{S}_1}\left(S^{i_1}\right) \le O_{\bar{S}_2}\left(S^{i_2}\right)$, если $O_{\bar{S}_2}\left(S^{i_2}\right)$ содержит подокрестность $P_{O_{\bar{S}_2}}\left(S^{i_2}\right)$ такую, что $O_{\bar{S}_1}\left(S^{i_1}\right) \cong \tilde{P}_{O_{\bar{S}_2}\left(S^{i_2}\right)}$. При этом соотношение $O_{\bar{S}_1}\left(S^{i_1}\right) < O_{\bar{S}_2}\left(S^{i_2}\right)$ равносильно тому, что $O_{\bar{S}_1}\left(S^{i_1}\right) \le O_{\bar{S}_2}\left(S^{i_2}\right)$ и, при этом $O_{\bar{S}_1}\left(S^{i_1}\right)$ и $O_{\bar{S}_2}\left(S^{i_2}\right)$ не являются сдвиг - эквивалентными. Запись $O_{\bar{S}_1}\left(S^{i_1}\right) \| O_{\bar{S}_2}\left(S^{i_2}\right)$ обозначает несравнимость окрестностей $O_{\bar{S}_1}\left(S^{i_1}\right)$ и $O_{\bar{S}_2}\left(S^{i_2}\right)$.

Пусть на $\bar{S}^d$ заданы системы окрестностей $O^1_{\bar{S}^d}$ и $O^2_{\bar{S}^d}$. Тогда будем считать, что $O^1_{\bar{S}^d} \le O^2_{\bar{S}^d}$ тогда и только тогда, когда для окрестностей $O^1_{\bar{S}^d}\left(S^i\right)$ и $O^2_{\bar{S}^d}\left(S^i\right)$ всех точек $S^i$ из $\bar{S}^d$, $i = 1,\dots,d$ выполнено условие $O^1_{\bar{S}^d}\left(S^i\right) \le O^2_{\bar{S}^d}\left(S^i\right)$.

Пусть на $K$ заданы системы окрестностей $\Omega^1$ и $\Omega^2$. Тогда будем считать, что $\Omega^1 \le \Omega^2$ тогда и только тогда, когда для каждой конфигурации $\bar{S}^d$ из $C$ выполнено условие $O^1_{\bar{S}^d} \le O^2_{\bar{S}^d}$, причем $O^1_{\bar{S}^d} \subseteq \Omega^1$, $O^2_{\bar{S}^d} \subseteq \Omega^2$.

Введенные отношения, очевидно, являются отношениями порядка. Доказательства рефлексивности, антисимметричности и транзитивности повторяют доказательства аналогичных свойств отношения порядка на конфигурациях.

## 2.7. О построении оптимальной системы окрестностей

В данном разделе описывается способ (алгоритм) построения по заданному набору прецедентов $H = \left\{\left(\overline{S}_i^{d_i}, \overline{\mu}_i^{d_i}\right) \middle| \overline{\mu}_i^{d_i} \in M_\Delta^{d_i}; \overline{S}^{d_i} \in K^{d_i}; i = 1,...,q;\, d_i \in N\right\}$ такой системы окрестностей $\Omega_0$, что для любой системы окрестностей $\Omega \geq \Omega_0$ набор окрестностей $O_H = \left\{O_{\left(\overline{S}_i^{d_i}, \overline{\mu}_i^{d_i}\right)}\left(S_i^j\right) \middle| \overline{S}_i^{d_i} \in H, \overline{\mu}_i^{d_i} \in H\right\}$, соответствующий набору прецедентов $H$ в смысле системы окрестностей $\Omega$, не содержит сдвиг - эквивалентных окрестностей.

Введем два определения.

***Определение 2.7.1*** Набор прецедентов $H$ называется *содержащим вложения* тогда и только тогда, когда выполнено условие

$$\underset{H}{\exists} \overline{S}_i, \overline{S}_j \;\; \exists P_{\overline{S}_j} : P_{\overline{S}_j} \cong \overline{S}_i \,,$$

т.е. в наборе существует конфигурация, сдвиг - эквивалентная подконфигурации другой конфигурации из набора.

***Определение 2.7.2.*** Конфигурации $\overline{S}_1$ и $\overline{S}_2$ называются охватывающей и, соответственно, охватываемой тогда и только тогда, когда существует подконфигурация $P_{\overline{S}_1}$ сдвиг - эквивалентная $\overline{S}_2$:

$$\exists P_{\overline{S}_1} : P_{\overline{S}_1} \cong \overline{S}_2 \,.$$

***Алгоритм 2.7.1.*** Рассмотрим некоторый набор $H = \left\{\left(\overline{S}_i^{d_i}, \overline{\mu}_i^{d_i}\right) \middle| \overline{\mu}_i^{d_i} \in M_\Delta^{d_i}; \overline{S}^{d_i} \in K^{d_i}; i = 1,...,q;\, d_i \in N\right\}$. Обозначим $V_H$ множество всех точек набора $H$: $V_H = \left\{S_i^j \mid S_i^j \in \overline{S}_i^{d_i}; \overline{S}_i^{d_i} \in H\right\}$. Будем также использовать обозначение $V_H = \left\{S_p \mid p = 1, \ldots P\right\}$, где $P$ - общее количество точек, во всех конфигурациях набора $H$.

Обозначим $W_H$ множество всех пар различных точек входящих в набор $H$: $W_H = \left\{\left(S_i^{l_1}, S_j^{l_2}\right) \mid S_i^{l_1} \in \overline{S}_i^{d_i}, S_j^{l_2} \in \overline{S}_j^{d_j}; \overline{S}_i^{d_i}, \overline{S}_j^{d_j} \in H; (i = j) \Rightarrow \left(l_1 \neq l_2\right)\right\}$. Множество $W_H$ будем также представлять в виде $W_H = \left\{\left(S_{p_1}, S_{p_2}\right) \mid p_1, p_2 = 1,..., P; p_1 \neq p_2\right\}$, где $P$ - общее количество точек, во всех конфигурациях набора $H$.

Поставим каждой паре точек $\left(S_{p_1}, S_{p_2}\right)$ $S_{p_1} \in \bar{S}_i^{d_i}$, $S_{p_2} \in \bar{S}_j^{d_j}$ из $W_H$ в соответствие окрестность $\dot{O}^{p_1,p_2}$, однозначно заданную парой $\left(n'_{p_1,p_2}, n''_{p_1,p_2}\right)$, $n', n'' \in N$ такую, что:

1) $\dot{O}^{p_1,p_2}\left(S_{p_1}\right) := \left(n'_{p_1,p_2}, S_{p_1}, n''_{p_1,p_2}\right) \cong \dot{O}^{p_1,p_2}\left(S_{p_2}\right) := \left(n'_{p_1,p_2}, S_{p_2}, n'_{p_1,p_2}\right)$

2) $\forall_{N^2}(n_1, n_2) : \left(n_1 > n'_{p_1,p_2}\right) \vee \left(n_2 > n'_{p_1,p_2}\right) \Rightarrow \left(n_1, S_{p_1}, n_2\right) \ncong \left(n_1, S_{p_2}, n_2\right)$

т.е. паре точек оказывается сопоставленной общая сдвиг - эквивалентная окрестность максимального размера.

Следует отметить, что для каждой пары точек окрестность $\dot{O}_{p_1,p_2}$ существует и единственна. Существование следует из того, что любые две точки сдвиг – эквивалентны друг другу. Единственность обусловлена связностью окрестности.

Таким образом, получено множество четверок $W_H^O = \left\{\left(S_{p_1}, S_{p_2}, n'_{p_1,p_2}, n''_{p_1,p_2}\right) | \; p_1, p_2 = 1,..., P\right\}$. Отметим, что $W_H^O$ строится однозначным образом лишь по множеству входящих в $H$ конфигураций и не зависит от словаря разметки и набора аксиом.

Нашей ближайшей целью будет формирование на основе множества $W_H^O$ множества пар $V_H^O = \left\{\left(S_p, \hat{O}^p\right) | \; p = 1,..., P\right\}$ или, что эквивалентно множества троек $\left\{\left(S_p, n'_p, n''_p\right) | \; p = 1,..., P\right\}$, где каждой точке из набора сопоставлена ее минимальная в некотором смысле окрестность.

Пусть $S_p = S_i^{l_1} \in \bar{S}_i^{d_i} \in H$. Для каждой точки $S_p$ из $V_H$ рассмотрим все четверки из множества $W_H^O$, в которые входит точка $S_p$. Таким образом точке $S_p$ оказывается поставлено в соответствие множество $Y_p = \left\{\left(S_p, S_r, n'_{p,r}, n''_{p,r}\right) \middle| \left(S_p, S_r, n'_{p,r}, n''_{p,r}\right) \in W_H^O; r = 1, \ldots, p-1, p+1, \ldots, P\right\}$, включающее все окрестности, поставленные в соответствие точке $S_p$ в множестве $W_H^O$.

Для дальнейшего рассмотрения будет важным факт присутствия в множестве $Y_p$ такой четверки $\left(S_p, S_{r_1}, n'_{p,r_1}, n''_{p,r_1}\right)$, в которой $n'_{p,r_1} = l_1 - 1$ и $n''_{p,r_1} = d_i - l_1$.

Это означает, что в множестве $Y_p$ присутствует окрестность точки $S_p = S_i^{l_1}$, соответствующая всей конфигурации $\overline{S}^{d_i}$. Факт наличия в множестве $Y_p$ такой четверки очевидно эквивалентно тому, что конфигурация $\overline{S}^{d_i}$ является охватываемой. В случае наличия в множестве $Y_p$ будем считать, что она соответствует общей окрестности точки $S_p$ с некоторой точкой $S_{r_1}$, $r_1 \in \{1,\ldots,p-1,p+1,\ldots P\}$. Положим

$$Y'_p = \begin{cases} \left\{ \begin{aligned} &(n_1,n_2) \mid n_1 \le l_1, n_2 \le d_i - l_1, \\ &\underset{Y_p / \left(S_p, S_{r_1}, n'_{p,r_1}, n''_{p,r_1}\right)}{\forall} (n',n''):((n',n'') < (n_1,n_2)) \vee ((n',n'') \parallel (n_1,n_2)) \end{aligned} \right\} & \text{- в случае наличия в множестве } Y_p \text{ четверки } \left(S_p, S_{r_1}, n'_{p,r_1}, n''_{p,r_1}\right); \\ \left\{ \begin{aligned} &(n_1,n_2) \mid n_1 \le l_1, n_2 \le d_i - l_1, \\ &\underset{Y_p}{\forall} (n',n''):((n',n'') < (n_1,n_2)) \vee ((n',n'') \parallel (n_1,n_2)) \end{aligned} \right\} & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом $Y'_p$ - множество всех возможных окрестностей точки $S_p$, которые не доминируются никакими окрестностями из $Y_p$, кроме быть может одной - $\left(S_p, S_{r_1}, n'_{p,r_1}, n''_{p,r_1}\right)$, в которой $n'_{p,r_1} = l_1 - 1$ и $n''_{p,r_1} = d_i - l_1$.

Конечное множество $Y'_p$ очевидно не пусто – содержит по меньшей мере пару $(l_1, d_i - l_1)$. Поэтому существует по меньшей мере одна пара на которой любая функция мощности окрестности $D$ достигает минимума на множестве $Y'_p$.

Таким образом каждой точке набора $H$ множество $V_H^O = \left\{ \left(S_p, \hat{O}^p\right) \mid \hat{O}^p = \left(n'_p, n''_p\right) \in Y'_p, \underset{Y'_p}{\forall} (n_1,n_2) : D(n_1,n_2) \ge D\left(n'_p, n''_p\right); p = 1,\ldots,P \right\}$ ставит в соответствие недоминируемую окрестность этой точки.

Следует отметить, что минимум функции мощности окрестности $D$ может достигаться не в единственной точке. В таком случае мы доопределим алгоритм произвольным способом выбора единственной окрестности, Например, воспользуемся лексикографическим порядком.

На основе множества $V_H^O$ очевидным образом строится система окрестностей $\Omega_0$, где $\hat{O}^p \in \Omega_0, p = 1,\ldots,P$.

Проиллюстрируем предложенный алгоритм. Представим на графике все окрестности точки $S_p$ из множества $W_H^O$ в осях $n'$ и $n''$. Выберем некоторую окрестность $\hat{O}^p$ точки $S_p$ таким образом, чтобы ни одна окрестность из $Y_p$ не была строго больше окрестности $\hat{O}^p$ и при этом этой окрестности соответствовал бы минимум заданной функции $D$ - мощности окрестности.

Обратим внимание, что окрестность $\hat{O}^p$ выбирается в прямоугольнике ограниченном горизонталью $n' = i$ и вертикалью $n'' = d - i$.

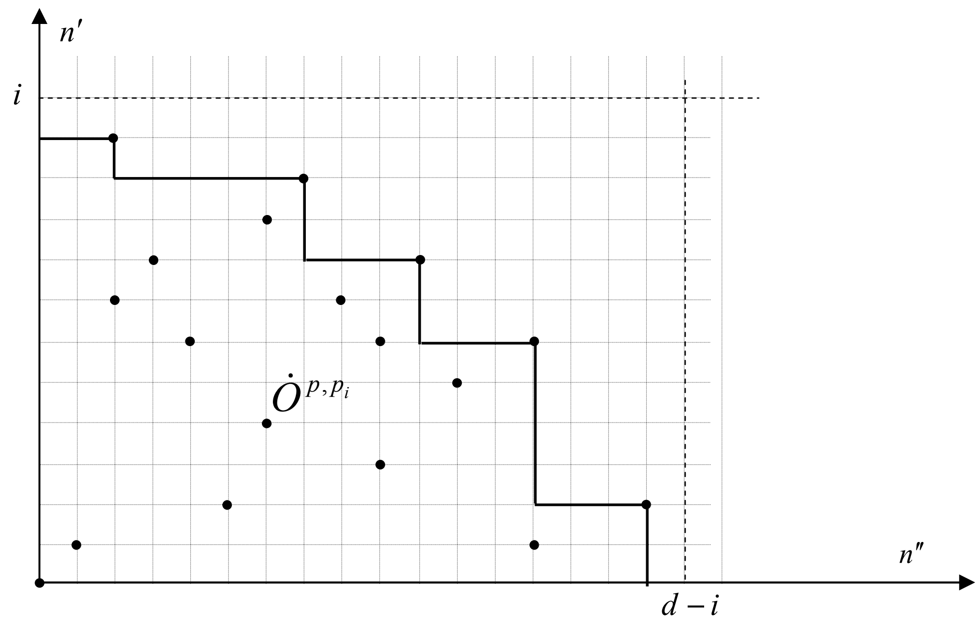


**Рис. 3 Выбор окрестности $\hat{O}^p$.**

Таким образом оказалось сформированным множество $V_H^O$, где каждой точке $S_p$ поставлена в соответствие такая ее окрестность $\hat{O}^p$, что ни у одной точки набора не существует окрестности, которая была бы сдвиг-эквивалентна любой окрестности $\tilde{O}(S_p) \geq \hat{O}^p$.

## 2.8. Монотонность свойства локальной регулярности

***Теорема 2.8.1.*** Для любой регулярной задачи $Z$ с набором прецедентов $H$ существует нетривиальная система окрестностей $\Omega_0$ такая, что при любой системе окрестностей $\Omega \geq \Omega_0$ задача $Z$ является локально регулярной.

***Доказательство.*** Построим систему окрестностей $\Omega_0$ в соответствии с алгоритмом 2.7.1, доопределив $\Omega_0$ на остальных точках из $C$ произвольным допустимым образом.

Допустим, что существует некоторая система окрестностей $\Omega_\Delta \geq \Omega_0$ такая что задача $Z$, заданная набором прецедентов $H$, не является локально регулярной в смысле системы $\Omega_\Delta$. В соответствии с теоремой 4 это означает, что в наборе $H$ существуют такие две точки $S_i^{l_1}$ и $S_j^{l_2}$, принадлежащие соответственно конфигурациям $\overline{S}_i^{d_i}$ и $\overline{S}_j^{d_j}$, окрестности которых, задаваемые системой окрестностей $\Omega_\Delta$ являются сдвиг – эквивалентными.

Рассмотрим два случая.

А. Ни одна из конфигураций $\overline{S}_i^{d_i}$ и $\overline{S}_j^{d_j}$ не является вложенной конфигурацией другой - $\overline{S}_j^{d_j}$ и $\overline{S}_i^{d_i}$ соответственно. Тогда можно утверждать, что предположение о наличии сдвиг – эквивалентных окрестностей противоречиво. Так как в соответствии с алгоритмом 1 из п. 4.3. окрестности входящие в $\Omega_0$ для каждой из точек не доминируются никакими сдвиг – эквивалентными окрестностями.

Б. Одна из конфигураций, для определенности - $\overline{S}_i^{d_i}$, является охватывающей, а другая - $\overline{S}_j^{d_j}$, соответственно, охватываемой.

В таком случае по алгоритму 1 в системе окрестностей $\Omega_0$ каждой точке конфигурации $\overline{S}_i^{d_i}$ сопоставлена окрестность, некоторая подокрестность которой сдвиг - эквивалентна всей конфигурации $\overline{S}_j^{d_j}$, т.е размер окрестностей точек из $\overline{S}_i^{d_i}$ строго ограничен снизу размером конфигурации $\overline{S}_j^{d_j}$. В то же время, размер окрестностей точек из $\overline{S}_j^{d_j}$ естественно ограничен ее размером. Поэтому никакое расширение окрестностей как конфигурации $\overline{S}_i^{d_i}$, так и конфигурации $\overline{S}_j^{d_j}$ не может привести к тому, что окрестности окажутся сдвиг – эквивалентными. Предположение опровергнуто, что и доказывает теорему.

## 2.9. Монотонность свойства локальной разрешимости

Рассмотрим далее зависимость наличия локальной разрешимости задачи $Z$ от мощности системы окрестностей. Очевидно, что при всех системах окрестностей $\Omega \geq \Omega_0$, где $\Omega_0$ - система окрестностей, построенная по алгоритму 1, регулярная задача $Z$, будет обладать свойством локальной разрешимости. Очевидно также, что в некоторых случаях можно построить менее мощную систему окрестностей $\Omega_0^S$ такую, что при любой системе окрестностей $\Omega \geq \Omega_0^S$ задача $Z$ будет локально разрешима.

Опишем алгоритм построения системы $\Omega_0^S$, как модифицированный алгоритм 2.7.1.

***Алгоритм 2.9.1.*** Рассмотрим некоторый набор $H = \left\{ \left( \overline{S}_i^{d_i}, \mu_i^{d_i} \right) \middle| \mu_i^{d_i} \in M_\Delta^{d_i}; \overline{S}^{d_i} \in K^{d_i}; i = 1,...,q;\ d_i \in N \right\}$. Обозначим $V_H$ множество всех точек набора $H$: $V_H = \left\{ S_i^j \mid S_i^j \in \overline{S}_i^{d_i}; \overline{S}_i^{d_i} \in H \right\}$. Будем также использовать обозначение $V_H = \left\{ S_p \mid p = 1,\dots P \right\}$, где $P$ - общее количество точек, во всех конфигурациях набора $H$.

Обозначим $W_H$ множество всех пар различных точек входящих в набор $H$: $W_H = \left\{ \left( S_i^{l_1}, S_j^{l_2} \right) \mid S_i^{l_1} \in \overline{S}_i^{d_i}, S_j^{l_2} \in \overline{S}_j^{d_j}; \overline{S}_i^{d_i}, \overline{S}_j^{d_j} \in H; (i = j) \Rightarrow (l_1 \neq l_2) \right\}$. Множество $W_H$ будем также представлять в виде $W_H = \left\{ \left( S_{p_1}, S_{p_2} \right) \mid p_1, p_2 = 1,...,P; p_1 \neq p_2 \right\}$, где $P$ - общее количество точек, во всех конфигурациях набора $H$.

Опишем правило, по которому каждой паре точек из $W_H$ ставится в соответствие окрестность $\dot{O}^{p_1,p_2}$. Разметку окрестности $\dot{O}^{p_1,p_2}$ будем обозначать $\dot{O}_\mu^{p_1,p_2}$. Итак паре точек, $\left( S_{p_1}, S_{p_2} \right)$ $S_{p_1} \in \overline{S}_i^{d_i}$, $S_{p_2} \in \overline{S}_j^{d_j}$ из $W_H$ ставится в соответствие окрестность $\dot{O}^{p_1,p_2}$, однозначно заданная парой $\left( n'_{p_1,p_2}, n''_{p_1,p_2} \right)$, $n', n'' \in N$ такая, что:

1) $\dot{O}^{p_1,p_2}\left( S_{p_1} \right) := \left( n'_{p_1,p_2}, S_{p_1}, n''_{p_1,p_2} \right) \cong \dot{O}^{p_1,p_2}\left( S_{p_2} \right) := \left( n'_{p_1,p_2}, S_{p_2}, n'_{p_1,p_2} \right)$

2) $\underset{N^2}{\forall} \left( n_1, n_2 \right) : \left( n_1 > n'_{p_1,p_2} \right) \vee \left( n_2 > n'_{p_1,p_2} \right) \Rightarrow \left( n_1, S_{p_1}, n_2 \right) \not\cong \left( n_1, S_{p_2}, n_2 \right)$

3) $\dot{O}_\mu^{p_1,p_2}\left( S_{p_1} \right) = \dot{O}_\mu^{p_1,p_2}\left( S_{p_2} \right) \Rightarrow \left( n'_{p_1,p_2}, n''_{p_1,p_2} \right) = (0,0)$

т.е. паре точек оказывается сопоставленной общая различным образом размеченная сдвиг - эквивалентная окрестность максимального размера.

Следует отметить, что для каждой пары точек окрестность $\dot{O}_{p_1,p_2}$ существует и единственна. Существование следует из того, что любые две точки сдвиг – эквивалентны друг другу. Единственность обусловлена связностью окрестности.

Пусть $S_p = S_i^{l_1} \in \overline{S}_i^{d_i} \in H$. Для каждой точки $S_p$ из $V_H$ рассмотрим все четверки из множества $W_H^O$, в которые входит точка $S_p$. Таким образом точке $S_p$ оказывается поставлено в соответствие множество $Y_p = \{(S_p, S_r, n'_{p,r}, n''_{p,r}) | (S_p, S_r, n'_{p,r}, n''_{p,r}) \in W_H^O; r = 1, \ldots, p-1, p+1, \ldots, P\}$, включающее все окрестности, поставленные в соответствие точке $S_p$ в множестве $W_H^O$.

Для дальнейшего рассмотрения будет важным факт присутствия в множестве $Y_p$ такой четверки $(S_p, S_{r_1}, n'_{p,r_1}, n''_{p,r_1})$, в которой $n'_{p,r_1} = l_1 - 1$ и $n''_{p,r_1} = d_i - l_1$. Это означает, что в множестве $Y_p$ присутствует окрестность точки $S_p = S_i^{l_1}$, соответствующая всей конфигурации $\overline{S}^{d_i}$. Факт наличия в множестве $Y_p$ такой четверки очевидно эквивалентно тому, что конфигурация $\overline{S}^{d_i}$ является охватываемой. В случае наличия в множестве $Y_p$ будем считать, что она соответствует общей окрестности точки $S_p$ с некоторой точкой $S_{r_1}$, $r_1 \in \{1, \ldots, p-1, p+1, \ldots P\}$. Положим

$$Y'_p = \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} (n_1, n_2) | n_1 \le l_1, n_2 \le d_i - l_1, \\ \underset{Y_p / (S_p, S_{r_1}, n'_{p,r_1}, n''_{p,r_1})}{\forall} (n', n'') : ((n', n'') < (n_1, n_2)) \vee ((n', n'') \parallel (n_1, n_2)) \end{array} \right\} & \text{- в случае наличия в множестве } Y_p \text{ четверки } (S_p, S_{r_1}, n'_{p,r_1}, n''_{p,r_1}); \\ \left\{ \begin{array}{l} (n_1, n_2) | n_1 \le l_1, n_2 \le d_i - l_1, \\ \underset{Y_p}{\forall} (n', n'') : ((n', n'') < (n_1, n_2)) \vee ((n', n'') \parallel (n_1, n_2)) \end{array} \right\} & \text{- в противном случае.} \end{cases}$$

Таким образом $Y'_p$ - множество всех возможных окрестностей точки $S_p$, которые не доминируются никакими окрестностями из $Y_p$, кроме быть может одной - $(S_p, S_{r_1}, n'_{p,r_1}, n''_{p,r_1})$, в которой $n'_{p,r_1} = l_1 - 1$ и $n''_{p,r_1} = d_i - l_1$.

Конечное множество $Y'_p$ очевидно не пусто – содержит по меньшей мере пару $(l_1, d_i - l_1)$. Поэтому существует по меньшей мере одна пара на которой любая функция мощности окрестности $D$ достигает минимума на множестве $Y'_p$.

Таким образом каждой точке набора $H$ множество $V_H^O = \left\{ \left(S_p, \widehat{O}^p\right) | \, \widehat{O}^p = \left(n'_p, n''_p\right) \in Y'_p, \underset{Y'_p}{\forall} (n_1, n_2) : D(n_1, n_2) \geq D\left(n'_p, n''_p\right), p = 1, ..., P \right\}$ ставит в соответствие недоминируемую окрестность этой точки.

Следует отметить, что минимум функции мощности окрестности $D$ может достигаться не в единственной точке. В таком случае мы доопределим алгоритм произвольным способом выбора единственной окрестности, Например, воспользуемся лексикографическим порядком.

На основе множества $V_H^O$ очевидным образом строится система окрестностей $\Omega_0$, где $\widehat{O}^p \in \Omega_0, p = 1, \ldots, P$.

***Теорема 2.9.1.*** Для любой разрешимой задачи $Z$ с набором прецедентов $H$ существует нетривиальная система окрестностей $\Omega_0$ такая, что при любой системе окрестностей $\Omega \geq \Omega_0$ задача $Z$ является локально разрешимой.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.8.1.

Полученные результаты позволяют для любой разрешимой (регулярной) задачи, заданной набором прецедентов $H$, построить в определенном смысле минимальную систему окрестностей, такую что, все системы окрестностей большие или равные построенной доставляют задаче локальную разрешимость (регулярность). Указанная система окрестностей строиться очень точно путем указания конкретной окрестности для каждой точки каждой конфигурации набора. Очевидно, что в практических задачах подобная точность часто будет являться избыточной.

Также следует отметить, что в практических задачах с некоторыми сложностями сталкиваются попытки распространить полученные системы окрестностей на новые конфигурации, не входящие в множество прецедентов $H$.

Поэтому для практических задач имеет смыл воспользоваться менее оптимальными и, соответственно, более устойчивыми к расширению множества конфигураций, системами окрестностей. Например, система окрестностей может быть назначена так, что каждой точке ставиться в соответствие окрестность, обладающая максимальными размерами из всех окрестностей, входящими в оптимальную систему окрестностей $\Omega_0$.

# Глава 3. Проблемы полноты

Задачи синтеза обучаемых алгоритмов выделения трендов являются частным случаем задач с теоретико-множественными ограничениями, в роли которых выступают правила (аксиомы) разметки. Настоящая глава посвящена описанию требований [36,37] к семействам алгоритмов, выполнение которых обеспечивало бы полноту этих семейств.

## 3.1. Задачи классификации с теоретико-множественными ограничениями

В контексте алгебраического подхода к синтезу корректных алгоритмов распознавания образов, классификации и прогнозирования [10,11] рассматривается класс задач, характеризующийся наличием явным образом заданных теоретико-множественных ограничений на множество допустимых ответов алгоритма.

В соответствии с [27,28,29], опишем задачу классификации в виде задачи синтеза алгоритма преобразования информации. Будем рассматривать некоторое множество $\wp = \{S\}$, элементы которого называются объектами. Описания объектов $D(S)$ образуют пространство начальных информаций $\Im_i = \{D(S) | S \in \wp\}$, элементы которого обозначаются $I_i$, так что $\Im_i = \{I_i\}$.

Рассматривается задача синтеза алгоритмов $A$, реализующих отображения из пространства начальных информаций $\Im_i$ в пространство финальных информаций $\Im_f = \{I_f\}$. Далее мы не будем различать алгоритмы и реализуемые ими отображения. Решение синтезируется в рамках модели алгоритмов $\mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \{A | A : \Im_i \to \Im_f\}$. Задачи определяются структурными информациями $I_s$, выделяющими из $\mathfrak{M}$ подмножества допустимых отображений, обозначаемые $\mathfrak{M}[I_s]$. Любой алгоритм $A$, реализующий произвольное допустимое отображение, называется корректным для задачи, определяемой структурной информацией $I_s$, и является ее решением.

Конструкции алгебраического подхода к проблеме синтеза корректных алгоритмов основаны на использовании “промежуточного” по отношению к $\Im_i$ и $\Im_f$ пространства оценок $\Im_e = \{I_e\}$. При этом корректные алгоритмы синтезируются на базе эвристических информационных моделей, т.е. параметрических семейств отображений из $\Im_i$ в $\Im_f$, представляющих собой специальные суперпозиции алгоритмических операторов (отображений из $\Im_i$ в $\Im_e$) и решающих правил (отображений из $\Im_e^p$ в $\Im_f$, $p$ - арность решающего правила).

Напомним, что при произвольных множествах $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{U}'$ и $\mathfrak{V}'$ и произвольных отображениях $u$ из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{V}$ и $u'$ из $\mathfrak{U}'$ в $\mathfrak{V}'$ произведением $u \times u'$ называется отображение $v$ из $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}'$ в $\mathfrak{V} \times \mathfrak{V}'$ такое, что для любой пары $(U, U')$ из $\mathfrak{U} \times \mathfrak{U}'$ выполнено равенство $v(U, U') = (u(U), u(U'))$ [1]. Для произвольного отображения $u$ из $\mathfrak{U}^p$ в $\mathfrak{V}$ при $p \geq 1$ диагонализацией $u_\Delta$ будем называть отображение из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{V}$ такое, что для любого $U$ из $\mathfrak{U}$ выполнено равенство $u_\Delta(U) = u(U, U, \ldots, U)$.

Модели $\mathfrak{M}$ определяются моделями алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$, где $\mathfrak{M}^0 \subseteq \mathfrak{M}_* \overset{df}{=} \{B \mid B : \Im_i \to \Im_e\}$, и решающих правил $\mathfrak{M}^1$, где $\mathfrak{M}^1 \subseteq \bigcup_{p=0}^{\infty} \{C \mid C : \Im_e^p \to \Im_f\}$, следующим образом:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{M}^0 = \left\{ C \circ \left(B_1 \times \ldots \times B_p\right)_\Delta \middle| C \in \mathfrak{M}^1, B_1, \ldots, B_p \in \mathfrak{M}^0 \right\}.$$

Для синтеза корректных алгоритмов используются также множества $\mathfrak{F}$ корректирующих операции, определенных над множеством отображений $\mathfrak{M}_*$. Корректирующие операции $F$, рассматриваемые в настоящей работе, индуцируются операциями $\widetilde{F}$ над пространством оценок $\Im_e$:

$$F\left(B_1, \ldots, B_p\right)\left(I_i\right) \overset{df}{=} \widetilde{F}\left(B_1\left(I_i\right), \ldots, B_p\left(I_i\right)\right),$$

где $I_i$ пробегает пространство начальных информаций $\Im_i$, алгоритмические операторы $B_1,\ldots,B_p$ - произвольные отображения из $\Im_i$ в $\Im_e$, и $\widetilde{F}$ - операция над $\Im_e$.

Схема построения модели алгоритмов $\mathfrak{M}$ представлена на следующей коммутативной диаграмме [28]:

$$\begin{array}{ccc} \Im_i & \xrightarrow{\mathfrak{M}} & \Im_f \\ \mathfrak{M}^0 \downarrow & & \uparrow \mathfrak{M}^1 \\ \Im_e^p & \xrightarrow{\mathfrak{F}} & \Im_e \end{array}.$$

Для рассматриваемых в настоящей заметке задач с теоретико-множественными ограничениями модели алгоритмов $\mathfrak{M}$ строятся на базе параметрических семейств моделей алгоритмических операторов и корректирующих операций. При этом предполагается, что $\mathfrak{M}^0 = \left\{ \mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega} \middle| \lambda \in L, \omega \in W(\lambda) \right\}$ и $\mathfrak{F} = \left\{ \mathfrak{F}^\lambda \middle| \lambda \in L \right\}$, где $W(\lambda)$ и $L$ - множества структурных индексов. Модель $\mathfrak{M}$ строится в виде

$$\mathfrak{M} = \bigcup_{\lambda \in L} \bigcup_{\omega \in W(\lambda)} \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}^\lambda \left( \mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega} \right),$$

где при всех $\lambda \in L$ и $\omega \in W$ выполнено равенство

$$\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}^\lambda \left( \mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega} \right) = \Big\{ C \circ \left( F_1 \left( B_1^1,\ldots,B_{r(1)}^1 \right) \times \ldots \times F_p \left( B_1^p,\ldots,B_{r(p)}^p \right) \right)_\Delta \Big|$$

$$\Big| \, C \in \mathfrak{M}^1, \left( F_1,\ldots,F_p \right) \in \left( \mathfrak{F}^\lambda \right)^p, B_1^1,\ldots,B_{r(1)}^1 \in \mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega(1)},\ldots,B_{r(p)}^p,\ldots,B_{r(p)}^p \in \mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega(p)} \Big\}.$$

Для формализации понятия теоретико-множественных ограничений введем набор $\Pi = \{\pi_1,\ldots,\pi_k\}$ предикатов $\pi_i : \Im_i \times \Im_f \to \{0,1\}$.

Пусть $I_i$ - произвольный элемент пространства $\Im_i$. Положим $\Pi(I_i) = \left\{ I_f \middle| I_f \in \Im_f, \underset{1\ldots k}{\forall} j : \pi_j \left( I_j, I_f \right) = 1 \right\}$ - множество всех допустимых значений корректных алгоритмов для начальной информации $I_i$.

Набор $\Pi$ будем называть покрывающим, если для любого $I_i$ из $\Im_i$ выполнено условие $\Pi(I_i) \neq \varnothing$, то есть когда для любого элемента существует хотя бы одно допустимое значение.

В дальнейшем будем рассматривать произвольный фиксированный покрывающий набор $\Pi$.

Множество натуральных чисел будем обозначать $N$ и положим $N_0 = N \cup \{0\}$.

***Определение 3.1.1.*** Множество

$$Prec = \left\{ \left( \left( I_i^1, \dots, I_i^q \right), \left( I_f^1, \dots, I_f^q \right) \right) \right| \\ \left| q \in N, \left( I_i^1, \dots, I_i^q \right) \in \Im_i^q, I_i^j \neq I_i^k \; npu \; j \neq k, \left( I_f^1, \dots, I_f^q \right) \in \Im_f^q, I_f^j \in \Pi\left( I_i^j \right) npu \; j = 1, \dots, q \right\}$$

называется множеством наборов допустимых прецедентов.

Для произвольного множества $\Im$ и $q \in N$ будем обозначать символом $\left(\Im^q\right)^*$ множество $\left\{ \left( I^1, \dots, I^q \right) \middle| \left( I^1, \dots, I^q \right) \in \Im^q, I^k \neq I^j \; npu \, k \neq j \right\}$.

Отметим, что $Prec = \bigcup\limits_{q \in N} \bigcup\limits_{\left( I_i^1, \dots, I_i^q \right) \in \left( \Im_i^q \right)^*} \left\{ \left( I_i^1, \dots, I_i^q \right), \Pi\left( I_i^1 \right) \times \dots \times \Pi\left( I_i^q \right) \right\}$.

## 3.2. Понятия полноты для задач с теоретико-множественными ограничениями

***Определение 3.2.1.*** Модель $\mathfrak{M}$ называется $\Pi$-полной, если выполнены условия (7) и (8):

$$\forall_{\Im_i} I_i : \mathfrak{M}\left( I_i \right) = \left\{ A\left( I_i \right) \middle| A \in \mathfrak{M} \right\} \subseteq \Pi\left( I_i \right); \tag{7}$$

$$\forall_{P_{rec}} \left( \left( I_i^1, \dots, I_i^q \right), \left( I_f^1, \dots, I_f^q \right) \right) \exists_{\mathfrak{M}} A : \forall_{\{1, \dots, q\}} j : A\left( I_i^j \right) = I_f^j . \tag{8}$$

Отметим, что условия (7) и (8) независимы. Кроме того, при выполнении условия (8) условие (7) эквивалентно условию (7’):

$$\forall_{\Im_i} I_i : \mathfrak{M}\left( I_i \right) = \left\{ A\left( I_i \right) \middle| A \in \mathfrak{M} \right\} = \Pi\left( I_i \right). \tag{7’}$$

Цель настоящей работы – описание условий, которым должны удовлетворять семейства $\mathfrak{M}^1$, $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M}^0$, чтобы в совокупности обеспечивать полноту модели $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{\lambda \in L} \bigcup\limits_{\omega \in W(\lambda)} \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}^\lambda \left( \mathfrak{M}_{\lambda,\omega}^0 \right)$.

Нетрудно видеть, что изучение проблемы полноты модели $\mathfrak{M}$ можно проводить в предположении, что $q$ равно $1$. Действительно, для этого достаточно перейти от исходного пространства начальных информаций $\Im_i$ к $\bigcup_{q=1}^{\infty} \Im_i^q$, от исходного пространства финальных информаций $\Im_f$ к $\bigcup_{q=1}^{\infty} \Im_f^q$, от исходного пространства оценок $\Im_e$ к $\bigcup_{q=1}^{\infty} \Im_e^q$ и от исходных отображений, скажем $A \in \mathfrak{M}$, $A: \Im_i \to \Im_f$ к $A^*: \bigcup_{q=1}^{\infty} \Im_i^q \to \bigcup_{q=1}^{\infty} \Im_f^q$, где $A^*\left(I_i^1, \ldots, I_i^q\right) \overset{df}{=} \left(A\left(I_i^1\right), \ldots, A\left(I_i^q\right)\right)$.

***Определение 3.2.2.*** Семейство решающих правил $\mathfrak{M}^1$ называется $\Pi$-полным, если существуют модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ и семейство корректирующих операций $\mathfrak{F}$ такие, что модель $\mathfrak{M} = \bigcup_{\lambda \in L} \bigcup_{\omega \in W(\lambda)} \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}^\lambda\left(\mathfrak{M}_{\lambda,\omega}^0\right)$ является $\Pi$-полной.

***Определение 3.2.3.*** При фиксированном $\Pi$-полном семействе решающих правил $\mathfrak{M}^1$ семейство корректирующих операций $\mathfrak{F}$ называется $\mathfrak{M}^1$-$\Pi$-полным, если существует модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ такая, что модель $\mathfrak{M} = \bigcup_{\lambda \in L} \bigcup_{\omega \in W(\lambda)} \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}^\lambda\left(\mathfrak{M}_{\lambda,\omega}^0\right)$ является $\Pi$-полной.

***Определение 3.2.4.*** При фиксированных $\Pi$-полном семействе решающих правил $\mathfrak{M}^1$ и $\mathfrak{M}^1$-$\Pi$-полном семействе корректирующих операций $\mathfrak{F}$ модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ называется $\mathfrak{F}$-$\mathfrak{M}^1$-$\Pi$-полной, если модель $\mathfrak{M} = \bigcup_{\lambda \in L} \bigcup_{\omega \in W(\lambda)} \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}^\lambda\left(\mathfrak{M}_{\lambda,\omega}^0\right)$ является $\Pi$-полной.

## 3.3. Критерий полноты для семейств решающих правил

Рассмотрим непустое семейство решающих правил $\mathfrak{M}^1 = \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathfrak{M}_p^1$, где при любом $p$ из $N_0$ выполнено соотношение $\mathfrak{M}_p^1 \subseteq \left\{C \,\middle|\, C: \Im_e^p \to \Im_f\right\}$. При этом для любого $X \subseteq \Im_e$ оказывается, естественно, выполненным условие

$$\mathfrak{M}^1(X) = \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathfrak{M}_p^1\left(X^p\right) = \bigcup_{p=0}^{\infty} \bigcup_{C \in \mathfrak{M}_p^1} \bigcup_{\bar{x} \in X^p} C(\bar{x}).$$

***Определение 3.3.1.*** Пусть $p \in N_0$. Для произвольного $I_i$ из $\Im_i$ множеством $\alpha_p\left(\mathfrak{M}^1, I_i\right)$ называется пересечение в $p$-ой декартовой степени пространства оценок $\Im_e$ всех полных прообразов множества $\Pi(I_i)$ относительно решающих правил арности $p$:

$$\alpha_p\left(\mathfrak{M}^1, I_i\right) = \bigcap_{C \in \mathfrak{M}_p^1} C^{-1}(\Pi(I_i)) = \left\{ I_e \,\middle|\, I_e \in \Im_e^p, \underset{\mathfrak{M}_p^1}{\forall} C : C(I_e) \in \Pi(I_i) \right\}. \tag{9}$$

***Определение 3.3.2.*** Пусть $p \in N_0$. Для семейства $\mathfrak{M}^1$ и элемента $I_i$ пространства $\Im_i$ подмножество $X(I_i)$ пространства оценок $\Im_e$ называется допустимой $p$-проекцией, если выполнены условия (10) и (11):

$$X(I_i)^p \subseteq \alpha_p\left(\mathfrak{M}^1, I_i\right), \tag{10}$$

$$\neg \exists Z \subseteq \Im_e : (X(I_i) \subset Z) \wedge \left(Z^p \subseteq \alpha_p\left(\mathfrak{M}^1, I_i\right)\right). \tag{11}$$

Множество всех допустимых $p$-проекций для семейства $\mathfrak{M}^1$ и элемента $I_i$ обозначим $\xi_p\left(\mathfrak{M}^1, I_i\right)$.

Для произвольного $I_i$ из $\Im_i$ введем множество $\Phi\left(\mathfrak{M}^1, I_i\right)$ функций выбора допустимых проекций:

$$\Phi\left(\mathfrak{M}^1, I_i\right) = \left\{ \varphi \,\middle|\, \varphi : N_0 \to \mathrm{B}(\Im_e), \underset{N_0}{\forall} p : \left(\left(\mathfrak{M}_p^1 = \varnothing\right) \Rightarrow (\varphi(p) = \Im_e)\right) \wedge \right.$$

$$\left. \wedge \left(\left(\mathfrak{M}_p^1 \neq \varnothing\right) \Rightarrow \left(\varphi(p) \in \xi_p\left(\mathfrak{M}^1, I_i\right)\right)\right) \right\},$$

где $\mathrm{B}(\Im_e)$ - множество всех подмножеств множества $\Im_e$.

Для каждой функции выбора допустимых проекций $\varphi$ из $\Phi\left(\mathfrak{M}^1, I_i\right)$ положим $X(I_i, \varphi) = \bigcap\limits_{p=0}^{\infty} \varphi(p)$. Отметим, что $\mathfrak{M}^1(X(I_i, \varphi)) = \bigcup\limits_{r=0}^{\infty} \bigcup\limits_{C \in \mathfrak{M}_r^1} C\left(\left(\bigcap\limits_{p=0}^{\infty} \varphi(p)\right)^r\right)$.

Пусть $\tilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1, I_i\right) = \left\{\varphi \,\middle|\, \varphi \in \Phi\left(\mathfrak{M}^1, I_i\right), X(I_i, \varphi) \neq \varnothing\right\}$.

***Теорема 3.3.1.*** При всех $I_i$ из $\Im_i$ выполнено соотношение (12):

$$\bigcup_{\varphi \in \tilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1, I_i\right)} \mathfrak{M}^1(X(I_i, \varphi)) \subseteq \Pi(I_i). \tag{12}$$

***Доказательство.*** Для произвольного $I_i$ из $\Im_i$, любой функции $\varphi$ из $\tilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1, I_i\right)$ и любого $p$ из $N_0$ если $\mathfrak{M}_p^1$ пусто, то пусто, очевидно, и множество

$\mathfrak{M}_p^1\left(\left(X\left(I_i,\varphi\right)\right)^p\right)$. Если же $\mathfrak{M}_p^1$ не пусто, то выполнено соотношение $\mathfrak{M}_p^1\left(\left(X\left(I_i,\varphi\right)\right)^p\right)\subseteq\mathfrak{M}_p^1(\varphi(p))$, так как $X\left(I_i,\varphi\right)=\bigcap\limits_{p=0}^{\infty}\varphi(p)$. Из того, что $\varphi(p)$ при непустом $\mathfrak{M}_p^1$ принадлежит $\xi_p\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)$, в силу определений множеств $\alpha_p\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)$ и $\xi_p\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)$ следует, что $\mathfrak{M}_p^1\left(\left(X\left(I_i,\varphi\right)\right)^p\right)\subseteq\Pi\left(I_i\right)$. Отсюда следует, что $\mathfrak{M}^1\left(X\left(I_i,\varphi\right)\right)=\bigcup\limits_{p=0}^{\infty}\mathfrak{M}_p^1\left(\left(X\left(I_i,\varphi\right)\right)^p\right)\subseteq\Pi\left(I_i\right)$. Поскольку это верно для всех $\varphi$, то всегда $\bigcup\limits_{\varphi\in\tilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)}\mathfrak{M}^1\left(X\left(I_i,\varphi\right)\right)\subseteq\Pi\left(I_i\right)$, что и требовалось доказать.

***Теорема 3.3.2. (Критерий $\Pi$-полноты для семейств решающих правил).*** Для $\Pi$-полноты семейства решающих правил $\mathfrak{M}^1$ необходимо и достаточно, чтобы при любом $I_i$ из $\mathfrak{I}_i$ было выполнено условие (13):

$$\bigcup_{\varphi\in\Phi\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)}\mathfrak{M}^1\left(X\left(I_i,\varphi\right)\right)=\Pi\left(I_i\right). \tag{13}$$

***Доказательство. Необходимость.*** Допустим, что $\bigcup\limits_{\varphi\in\tilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)}\mathfrak{M}^1\left(X\left(I_i,\varphi\right)\right)$ не совпадает с $\Pi\left(I_i\right)$. Тогда существует такое $I_f^0$, что $I_f^0\in\Pi\left(I_i\right)-\bigcup\limits_{\varphi\in\tilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)}\mathfrak{M}^1\left(X\left(I_i,\varphi\right)\right)$. Пусть, в тоже время, $\mathfrak{M}=\bigcup\limits_{\lambda\in L}\bigcup\limits_{\omega\in W(\lambda)}\mathfrak{M}^1\circ\mathfrak{F}^\lambda\left(\mathfrak{M}_{\lambda,\omega}^0\right)$ и модель $\mathfrak{M}$ является $\Pi$-полной. Тогда существуют решающее правило $C_0\in\mathfrak{M}^1$ арности $p_0$, значения параметров $\lambda\in L$ и $\omega(1),\ldots\omega\left(p_0\right)\in W(\lambda)$, корректирующие операции $F_1,\ldots,F_{p_0}\in\mathfrak{F}^\lambda$ и алгоритмические операторы $B_1^1,\ldots,B_{r(1)}^1\in\mathfrak{M}_{\lambda,\omega(1)}^0,\ldots,B_{r\left(p_0\right)}^p,\ldots,B_{r\left(p_0\right)}^p\in\mathfrak{M}_{\lambda,\omega\left(p_0\right)}^0$ такие, что

$$C_0\circ\left(F_1\left(B_1^1,\ldots,B_{r(1)}^1\right)\times\ldots\times F_{p_0}\left(B_1^{p_0},\ldots,B_{r\left(p_0\right)}^{p_0}\right)\right)_\Delta\left(I_i\right)=I_f^0.$$

Пусть $\bar{I}_e^0=\left(F_1\left(B_1^1,\ldots,B_{r(1)}^1\right)\left(I_i\right),\ldots,F_{p_0}\left(B_1^{p_0},\ldots,B_{r\left(p_0\right)}^{p_0}\right)\left(I_i\right)\right)\in\mathfrak{I}_e^{p_0}$. Тогда $C_0\left(\bar{I}_e^0\right)=I_f^0$.

Если $\mathfrak{M}_{p_0}^1\left(I_e^0\right)$ не является подмножеством $\Pi\left(I_i\right)$, то, очевидно, и $\mathfrak{M}\left(I_i\right)$ не является подмножеством $\Pi\left(I_i\right)$, так что модель $\mathfrak{M}$ не $\Pi$-полна.

Остается случай, когда $\mathfrak{M}_{p_0}^1\left(I_e^0\right)\subseteq\Pi\left(I_i\right)$, что эквивалентно выполнению включения $\bar{I}_e^0\in\alpha_{p_0}\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)$.

Для любого вектора $I_e^p=\left(I_e^1,\ldots,I_e^p\right)\in\mathfrak{I}_e^p$ положим $Q\left(I_e^p\right)=\left\{I_e^1,\ldots,I_e^p\right\}$.

Пусть существует $p$ такое, что $\left(Q\left(\bar{I}_e^0\right)\right)^p$ не является подмножеством $\alpha_p\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)$. Тогда существуют $C_0$ в $\mathfrak{M}_p^1$ и набор индексов $\left(i_1,\ldots,i_p\right)\in\left\{1,\ldots,p_0\right\}^p$ такие, что

$$C_0\circ\left(F_{i_1}\left(B_1^{i_1},\ldots,B_{r(i_1)}^{i_1}\right)\times\ldots\times F_{i_{p_0}}\left(B_1^{i_p},\ldots,B_{r(i_p)}^{i_p}\right)\right)_\Delta\notin\Pi\left(I_i\right),$$

так что $\mathfrak{M}\left(I_i\right)$ не является подмножеством $\Pi\left(I_i\right)$.

Пусть, наконец, для всех $p$ либо $\mathfrak{M}_p^1=\varnothing$, либо выполнено $\left(Q\left(\bar{I}_e^0\right)\right)^p\subseteq\alpha_p\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)$. Тогда для каждого $p$ либо $\mathfrak{M}_p^1$ пусто, либо существует $X_p$ в $\xi_p\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)$ такое, что $Q\left(\bar{I}_e^0\right)\subseteq X_p$. Отсюда следует, что в $\tilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)$ имеется функция $\varphi_0$ такая, что при всех $p$ выполнено $Q\left(\bar{I}_e^0\right)\subseteq\varphi_0(p)$ так что $Q\left(\bar{I}_e^0\right)\subseteq X\left(I_i,\varphi\right)$. Поэтому $\mathfrak{M}^1\left(Q\left(\bar{I}_e^0\right)\right)\subseteq\bigcup\limits_{\varphi\in\Phi\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)}\mathfrak{M}^1\left(X\left(I_i,\varphi\right)\right)$, что противоречит предположению о выполнении соотношений $C_0\left(\bar{I}_e^0\right)=I_f^0\notin\bigcup\limits_{\varphi\in\Phi\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)}\mathfrak{M}^1\left(X\left(I_i,\varphi\right)\right)$.

Необходимость доказана.

***Достаточность.*** Пусть выполнено условие

$$\bigcup_{\varphi\in\Phi\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)}\mathfrak{M}^1\left(X\left(I_i,\varphi\right)\right)=\Pi\left(I_i\right).$$

Положим $W=\prod\limits_{I_i\in\mathfrak{I}_i}\tilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)=\left\{\omega\,\middle|\,\omega:\mathfrak{I}_i\to\bigcup\limits_{I_i\in\mathfrak{I}_i}\tilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right),\underset{\mathfrak{I}_i}{\forall I_i}:\omega\left(I_i\right)\in\tilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)\right\}$.

В качестве семейства корректирующих операций используем одноэлементное множество $\mathfrak{F}$, включающее только тождественное отображение $\mathfrak{I}_e$ на себя. Для определенности обозначений положим $L=\{0\}$.

Модели $\mathfrak{M}_{0,\omega}^0$ определим равенством $\mathfrak{M}_{0,\omega}^0 = \left\{ B \middle| B : \mathfrak{I}_i \to \mathfrak{I}_e, \underset{\mathfrak{I}_i}{\forall I_i} : B(I_i) \in X(I_i, \omega(I_i)) \right\}$.

Пусть $(I_i^0, I_f^0)$ - произвольный допустимый прецедент. Из сделанного предположения вытекает, что существуют $p_0 \in N_0$ и $\varphi_0 \in \widetilde{\Phi}(\mathfrak{M}^1, I_i^0)$ такие, что $I_f^0 \in \mathfrak{M}_{p_0}^1\left((X(I_i^0, \varphi_0))^{p_0}\right)$. Поэтому существует $C_0 \in \mathfrak{M}_p^1$ такое, что при некотором $(I_e^1, \dots, I_e^{p_0}) \in (X(I_i^0, \varphi_0))^{p_0}$ выполнено равенство $C_0(I_e^1, \dots, I_e^{p_0}) = I_f^0$.

В качестве функции-индекса $\omega$ для модели $\mathfrak{M}_{0,\omega}^0$ выберем любую функцию, удовлетворяющую равенству $\omega(I_i^0) = \varphi_0$. В модели $\mathfrak{M}_{0,\omega}^0$ имеются операторы $B_1, \dots, B_{p_0}$ такие, что при всех $k = 1, \dots, p_0$ выполнено $B_k(I_i^0) = I_e^k \in X(I_i^0, \varphi_0)$. Итак, имеем равенство $C_0(B_1 \times \ldots \times B_{p_0})_\Delta(I_i^0) = I_f^0$, что и требовалось доказать.

***Теорема доказана.***

## 3.4. Критерий полноты для семейств корректирующих операций

Далее считается, что зафиксировано произвольное $\Pi$-полное семейство решающих правил $\mathfrak{M}^1$.

***Определение 3.4.1.*** Пусть $I_i \in \mathfrak{I}_i$. Система подмножеств $G(I_i) = \{X(I_i, \gamma) | X(I_i, \gamma) \subseteq \mathfrak{I}_e, \gamma \in \Gamma(I_i)\}$ называется $\mathfrak{M}^1$-полной для $I_i$, если выполнены условия (14) и (15):

$$\underset{\Gamma(I_i)}{\forall} \gamma \underset{\widetilde{\Phi}(\mathfrak{M}^1, I_i)}{\exists} \varphi : X(I_i, \gamma) \subseteq X(I_i, \varphi), \tag{14}$$

$$\bigcup_{\gamma \in \Gamma(I_i)} \mathfrak{M}^1(X(I_i, \gamma)) = \Pi(I_i). \tag{15}$$

Перейдем теперь к рассмотрению семейств корректирующих операций $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}^\lambda | \lambda \in L\}$, считая, что при всех $\lambda$ из $L$ выполнено $\mathfrak{F}^\lambda = \bigcup_{p=0}^{\infty} \mathfrak{F}_p^\lambda$, где при всех $p$ из $N_0$ множество $\mathfrak{F}_p^\lambda$ определяется равенством $\mathfrak{F}_p^\lambda = \mathfrak{F}^\lambda \cap \{F | F : \mathfrak{I}_e^p \to \mathfrak{I}_e\}$.

***Определение 3.4.2.*** Пусть $p \in N_0$. Для произвольных $\lambda$ из $L$, $I_i$ из $\Im_i$ и произвольной функции выбора допустимых проекций $\varphi$ из $\widetilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1, I_i\right)$ множеством $\beta_p^\lambda(I_i,\varphi)$ называется пересечение в $p$-ой декартовой степени пространства оценок $\Im_e$ всех полных прообразов множества $X(I_i,\varphi)$ относительно корректирующих операций из $\mathfrak{F}_p^\lambda$:

$$\beta_p^\lambda(I_i,\varphi) = \bigcap_{F \in \mathfrak{F}_p^\lambda} F^{-1}(X(I_i,\varphi)) = \left\{ I_e \middle| I_e \in \Im_e^p, \underset{\mathfrak{F}_p^\lambda}{\forall} F : F(I_e) \in X(I_i,\varphi) \right\}1 . \tag{16}$$

***Определение 3.4.3.*** Пусть $p \in N_0$. Для произвольных $\lambda$ из $L$ и $I_i$ из $\Im_i$ и произвольной $\varphi$ из $\widetilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1, I_i\right)$ подмножество $Y\left(I_i,\varphi,\lambda\right)$ пространства оценок $\Im_e$ называется $\mathfrak{F}^\lambda$-$\mathfrak{M}^1$-допустимой $p$-проекцией, если выполнены условия (17) и (18):

$$Y\left(I_i,\varphi,\lambda\right)^p \subseteq \beta_p^\lambda\left(I_i,\varphi\right), \tag{17}$$

$$\neg \exists Z \subseteq \Im_e : \left(Y\left(I_i,\varphi,\lambda\right) \subset Z\right) \wedge \left(Z^p \subseteq \beta_p^\lambda\left(I_i,\varphi\right)\right). \tag{18}$$

Множество всех $\mathfrak{F}^\lambda$-$\mathfrak{M}^1$-допустимых $p$-проекций для $\lambda \in L$ и $I_i \in \Im_i$ и функции выбора допустимых проекций $\varphi$ из $\widetilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1, I_i\right)$ обозначим $\zeta_p(I_i,\varphi,\lambda)$.

Для произвольных $\lambda \in L$ и $I_i \in \Im_i$ и функции $\varphi$ из $\widetilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1, I_i\right)$ введем множество $\Psi\left(I_i,\varphi,\lambda\right)$ функций выбора $\mathfrak{F}^\lambda$-$\mathfrak{M}^1$-допустимых проекций:

$$\Psi(I_i,\varphi,\lambda) = \left\{ \psi \middle| \psi : N_0 \to \mathrm{B}(\Im_e), \underset{N_0}{\forall} p : \left(\left(\mathfrak{F}_p^\lambda = \varnothing\right) \Rightarrow \left(\psi(p) = \Im_e\right)\right) \wedge \right.$$
$$\left. \wedge \left(\left(\mathfrak{F}_p^\lambda \neq \varnothing\right) \Rightarrow \left(\psi(p) \in \zeta_p(I_i,\varphi,\lambda)\right)\right) \right\}.$$

Для каждой функции выбора $\mathfrak{F}^\lambda$-$\mathfrak{M}^1$-допустимых проекций $\psi$ из $\Psi\left(I_i,\varphi,\lambda\right)$ положим $Y(I_i,\varphi,\lambda,\psi) = \bigcap\limits_{p=0}^{\infty} \psi(p)$. Отметим, что

$$\mathfrak{F}^\lambda\left(Y\left(I_i,\varphi,\lambda,\psi\right)\right) = \bigcup_{r=0}^{\infty} \bigcup_{F \in \mathfrak{F}_r^\lambda} F\left(\left(\bigcap_{p=0}^{\infty} \psi(p)\right)^r\right).$$

Пусть $\widetilde{\Psi}(I_i,\varphi,\lambda) = \left\{\psi \mid \psi \in \Psi(I_i,\varphi,\lambda), Y(I_i,\varphi,\lambda,\psi) \neq \varnothing\right\}$.

***Теорема 3.4.1. (Критерий $\mathfrak{M}^1$-$\Pi$-полноты для семейств корректирующих операций).*** Для $\mathfrak{M}^1$-$\Pi$-полноты семейства корректирующих операций $\mathfrak{F}=\left\{\mathfrak{F}^\lambda \middle| \lambda\in L\right\}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $I_i$ из $\mathfrak{I}_i$ существовала $\mathfrak{M}^1$-полная для $I_i$ система подмножеств $G(I_i)=\left\{X(I_i,\gamma)\middle| X(I_i,\gamma)\subseteq \mathfrak{I}_e, \gamma\in\Gamma(I_i)\right\}$ такая, что для любого $\gamma$ из $\Gamma(I_i)$ существует $\lambda$ в $L$ такое, что

$$\bigcup_{\psi\in\tilde{\Psi}(I_i,\varphi,\lambda)}\mathfrak{F}^\lambda\left(Y(I_i,\varphi,\lambda,\psi)\right)=X(I_i,\gamma).$$

***Замечание.*** Отметим, что из определений 3.4.2. и 3.4.3. вытекает, что при всех $I_i$ из $\mathfrak{I}_i$, всех $\lambda$ из $L$, $\varphi$ из $\tilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1, I_i\right)$ и $\psi$ из $\tilde{\Psi}(I_i,\varphi,\lambda)$ выполнено соотношение $\bigcup_{\psi\in\tilde{\Psi}(I_i,\varphi,\lambda)}\mathfrak{F}^\lambda\left(Y(I_i,\varphi,\lambda,\psi)\right)\subseteq X(I_i,\gamma)$.

Действительно, при всех $\lambda\in L$, всех $\varphi\in\tilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1, I_i\right)$, всех $\psi\in\tilde{\Psi}(I_i,\varphi,\lambda)$ и всех $p$ из $N_0$ либо $\mathfrak{F}_p^\lambda=\varnothing$, либо $\psi(p)\in\zeta_p(I_i,\varphi,\lambda)$. В первом случае, естественно, $\mathfrak{F}_p^\lambda\left(\left(Y(I_i,\varphi,\lambda,\psi)\right)^p\right)=\varnothing$. Во втором случае выполнено $Y(I_i,\varphi,\lambda,\psi)\subseteq\psi(p)$, так что $\mathfrak{F}_p^\lambda\left(\left(Y(I_i,\varphi,\lambda,\psi)\right)^p\right)\subseteq\mathfrak{F}_p^\lambda(\psi(p))$. Так как $\psi(p)\in\zeta_p(I_i,\varphi,\lambda)$, то $(\psi(p))^p\in\beta_p^\lambda(I_i,\varphi)$, откуда вытекает, что $\mathfrak{F}_p^\lambda(\psi(p))\subseteq X(I_i,\varphi)$ и, тем более $\mathfrak{F}_p^\lambda\left(\left(Y(I_i,\varphi,\lambda,\psi)\right)^p\right)\subseteq X(I_i,\varphi)$.

***Доказательство. Необходимость.*** Пусть в $\mathfrak{I}_i$ существует $I_i^0$ такое, что для него не существует $\mathfrak{M}^1$-полной для $I_i$ системы подмножеств $G(I_i)=\left\{X(I_i,\gamma)\middle| X(I_i,\gamma)\subseteq\mathfrak{I}_e,\gamma\in\Gamma(I_i)\right\}$ такой, что для всех $\gamma$ из $\Gamma(I_i)$ существует $\lambda$ в $L$ такое, что выполнено равенство $\bigcup_{\psi\in\tilde{\Psi}(I_i,\varphi,\lambda)}\mathfrak{F}^\lambda\left(Y(I_i,\varphi,\lambda,\psi)\right)=X(I_i,\gamma)$.

Пусть, в то же время, семейство корректирующих операций $\mathfrak{F}=\left\{\mathfrak{F}^\lambda\middle|\lambda\in L\right\}$ является $\mathfrak{M}^1$-$\Pi$-полным. Это означает, что существует модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ такая, что модель $\mathfrak{M}=\bigcup_{\lambda\in L}\bigcup_{\omega\in W(\lambda)}\mathfrak{M}^1\circ\mathfrak{F}^\lambda\left(\mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega}\right)$ является $\Pi$-полной так, что в этом случае выполнено равенство $\mathfrak{M}\left(I_i^0\right)=\Pi\left(I_i^0\right)$.

Рассмотрим систему $G^0\left(I_i^0\right)$ подмножеств $\mathfrak{I}_e$, определяемую равенством

$$G^0\left(I_i^0\right)=\left\{X\left(I_i^0,\gamma\right)\middle| X\left(I_i^0,\gamma\right)\subseteq \Im_e, \gamma\in\Gamma^0\left(I_i^0\right)\right\},$$

где $\Gamma^0\left(I_i^0\right)=\bigcup\limits_{\lambda\in L}\{\lambda\}\times W(\lambda)$ и при всех $\lambda\in L$ и $\omega\in W(\lambda)$ выполнено

$$X\left(I_i^0,\gamma\right)=X\left(I_i^0,(\lambda,\omega)\right)=\mathfrak{F}^\lambda\left(\mathfrak{M}_{\lambda,\omega}^0\right)\left(I_i^0\right).$$

Очевидно, что при всех $\gamma$ из $\Gamma^0\left(I_i^0\right)$ выполнены соотношения $\mathfrak{F}^\lambda\left(\mathfrak{M}_{\lambda,\omega}^0\right)\left(I_i^0\right)\subseteq X\left(I_i,\varphi\right)$ (при некотором $\varphi$ из $\tilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)$) и $\bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma^0}\mathfrak{M}^1\left(\mathfrak{F}^\lambda\left(\mathfrak{M}_{\lambda,\omega}^0\right)\left(I_i^0\right)\right)=\Pi\left(I_i^0\right)$.

Таким образом, система подмножеств $G^0\left(I_i^0\right)$ оказывается $\mathfrak{M}^1$-полной для $I_i^0$, что противоречит сделанному предположению. Необходимость доказана.

***Достаточность.*** Пусть для каждого $I_i$ из $\Im_i$ существует $\mathfrak{M}^1$-полная система для $I_i$ подмножеств $G^0\left(I_i\right)=\left\{X^0\left(I_i,\gamma\right)\middle| X^0\left(I_i,\gamma\right)\subseteq\Im_e,\gamma\in\Gamma^0\left(I_i\right)\right\}$ такая, что для всех $\gamma$ из $\Gamma\left(I_i\right)$ существует $\lambda$ в $L$ такое, что выполнено равенство $\bigcup\limits_{\psi\in\tilde{\Psi}\left(I_i,\varphi,\lambda\right)}\mathfrak{F}^\lambda\left(Y\left(I_i,\varphi,\lambda,\psi\right)\right)=X\left(I_i,\gamma\right)$.

Для каждого $\lambda\in L$ положим

$$W(\lambda)=\prod_{I_i\in\Im_i}\left(\bigcup_{\varphi\in\tilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)}\tilde{\Psi}\left(I_i,\varphi,\lambda\right)\right)=\left\{\omega\,\middle|\,\omega:\Im_i\to\bigcup_{I_i\in\Im_i}\ \bigcup_{\varphi\in\tilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)}\tilde{\Psi}\left(I_i,\varphi,\lambda\right),\ \underset{\Im_i}{\forall} I_i\ \underset{\tilde{\Phi}\left(\mathfrak{M}^1,I_i\right)}{\exists}\varphi:\omega\left(I_i\right)\in\tilde{\Psi}\left(I_i,\varphi,\lambda\right)\right\}.$$

Модели $\mathfrak{M}_{\lambda,\omega}^0$ определим равенством $\mathfrak{M}_{\lambda,\omega}^0=\left\{B\,\middle|\,B:\Im_i\to\Im_e,\underset{\Im_i}{\forall}I_i:B\left(I_i\right)\in Y_{\omega\left(I_i\right)}\right\}$.

Для всех $I_i$ из $\Im_i$ при этом имеем $\mathfrak{M}_{\lambda,\omega}^0\left(I_i\right)=\left\{B\left(I_i\right)\middle| B\in\mathfrak{M}_{\lambda,\omega}^0\right\}=Y\left(I_i,\varphi,\lambda,\omega\left(I_i\right)\right)$, так что $\mathfrak{F}^\lambda\left(\mathfrak{M}_{\lambda,\omega}^0\right)\left(I_i\right)=\mathfrak{F}^\lambda\left(Y\left(I_i,\varphi,\lambda,\omega\left(I_i\right)\right)\right)$. Отсюда следует, что при всех $\gamma$ из $\Gamma^0\left(I_i\right)$ выполнено $\bigcup\limits_{\psi\in\Psi\left(I_i,\varphi,\lambda\right)}\mathfrak{F}^\lambda\left(\mathfrak{M}_{\lambda,\omega}^0\right)\left(I_i\right)=\bigcup\limits_{\psi\in\Psi\left(I_i,\varphi,\lambda\right)}\mathfrak{F}^\lambda\left(Y\left(I_i,\varphi,\lambda,\psi\right)\right)=X^0\left(I_i,\gamma\right)$.

В силу того, что система $G^0$ по предположению $\mathfrak{M}^1$-полна для $I_i$, получаем $\mathfrak{M}\left(I_i\right)=\bigcup\limits_{\lambda\in L}\bigcup\limits_{\omega\in W(\lambda)}\mathfrak{M}^1\circ\mathfrak{F}^\lambda\left(\mathfrak{M}_{\lambda,\omega}^0\right)\left(I_i\right)=\Pi\left(I_i\right)$, что и требовалось доказать.

***Теорема доказана.***

### 3.5. Критерий полноты для моделей алгоритмических операторов

Далее считается, что зафиксировано произвольное $\mathfrak{M}^1$-$\Pi$-полное семейство корректирующий операций $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{F}^\lambda | \lambda \in L\}$.

***Определение 3.5.1.*** Пусть $I_i \in \mathfrak{I}_i$ и зафиксирована $\mathfrak{M}^1$-полная для $I_i$ система подмножеств $G(I_i) = \{X(I_i,\gamma) | X(I_i,\gamma) \subseteq \mathfrak{I}_e, \gamma \in \Gamma(I_i)\}$. Система подмножеств $H(I_i,G) = \{Y(I_i,\gamma,\lambda,\delta) | Y(I_i,\gamma,\lambda,\delta) \subseteq \mathfrak{I}_e, \gamma \in \Gamma(I_i), \delta \in \Delta(I_i,G)\}$ называется $\mathfrak{F}$-$\mathfrak{M}^1$-полной для $I_i$, если выполнены условия (19) и (20):

$$\underset{\Delta(I_i,G)}{\forall} \delta \underset{L}{\forall} \lambda \underset{\tilde{\Phi}(\mathfrak{M}^1,I_i)}{\exists} \varphi \underset{\tilde{\Psi}(I_i,\varphi,\lambda)}{\exists} \psi : Y(I_i,\gamma,\lambda,\delta) \subseteq Y(I_i,\varphi,\lambda,\psi), \tag{19}$$

$$\underset{\Gamma(I_i)}{\forall} \gamma \underset{L}{\exists} \lambda \bigcup_{\delta \in \Delta(I_i,G)} \mathfrak{F}^\lambda(Y(I_i,\gamma,\lambda,\delta)) = X(I_i,\gamma). \tag{20}$$

***Теорема 3.5.1. (Критерий $\mathfrak{F}$-$\mathfrak{M}^1$-$\Pi$-полноты для моделей алгоритмических операторов).*** Для $\mathfrak{F}$-$\mathfrak{M}^1$-$\Pi$-полноты модели алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0 = \{\mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega} | \lambda \in L, \omega \in W(\lambda)\}$ необходимо и достаточно, чтобы при всех $I_i$ из $\mathfrak{I}_i$ было выполнено условие (21):

$$\underset{L}{\forall} \lambda \underset{W(\lambda)}{\forall} \omega \underset{\tilde{\Phi}(\mathfrak{M}^1,I_i)}{\exists} \varphi \underset{\tilde{\Psi}(I_i,\varphi,\lambda)}{\exists} \psi : \mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega}(I_i) \subseteq Y(I_i,\varphi,\lambda,\psi), \tag{21}$$

и чтобы существовали $\mathfrak{M}^1$-полная система подмножеств $G(I_i) = \{X(I_i,\gamma) | X(I_i,\gamma) \subseteq \mathfrak{I}_e, \gamma \in \Gamma(I_i)\}$ и $\mathfrak{F}$-$\mathfrak{M}^1$-полная система подмножеств $H(I_i,G) = \{Y(I_i,\gamma,\lambda,\delta) | Y(I_i,\gamma,\lambda,\delta) \subseteq \mathfrak{I}_e, \gamma \in \Gamma(I_i), \delta \in \Delta(I_i,G)\}$ такие, что

$$\underset{\Gamma(I_i)}{\forall} \gamma \underset{L}{\exists} \lambda \underset{\Delta(I_i,G)}{\forall} \delta \underset{W(\lambda)}{\exists} \omega : Y(I_i,\gamma,\lambda,\delta) \subseteq \mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega}(I_i). \tag{22}$$

***Доказательство. Необходимость условия (21).*** Пусть при некоторых $I_i^0$ из $\mathfrak{I}_i$, $\lambda_0 \in L$ и $\omega_0 \in W(\lambda_0)$ множество $\mathfrak{M}^0_{\lambda_0,\omega_0}(I_i^0)$ не покрывается ни одним из множеств $Y(I_i^0,\varphi,\lambda_0,\psi)$ при $\varphi \in \tilde{\Phi}(\mathfrak{M}^1,I_i^0)$ и $\psi \in \tilde{\Psi}(I_i^0,\varphi,\lambda_0)$.

Если в $\tilde{\Phi}(\mathfrak{M}^1,I_i^0)$ нет такого $\varphi_0$, что $\mathfrak{F}^{\lambda_0}(\mathfrak{M}^0_{\lambda_0,\omega_0}(I_i^0)) \subseteq X(I_i^0,\varphi_0)$, то не выполнено соотношение $\mathfrak{M}^1(\mathfrak{F}^{\lambda_0}(\mathfrak{M}^0_{\lambda_0,\omega_0}(I_i^0))) \subseteq \Pi(I_i^0)$. Если же при некотором $\varphi_0$

из $\Phi\left(\mathfrak{M}^1, I_i^0\right)$ выполнено $\mathfrak{F}^{\lambda_0}\left(\mathfrak{M}^0_{\lambda_0,\omega_0}\left(I_i^0\right)\right) \subseteq X\left(I_i^0, \varphi_0\right)$, то в $\Psi\left(I_i^0, \varphi, \lambda_0\right)$ должна существовать функция выбора $\mathfrak{F}^{\lambda_0}$-$\mathfrak{M}^1$-допустимых проекций $\psi_0$ такая, что $\mathfrak{M}^0_{\lambda_0,\omega_0}\left(I_i^0\right) \subseteq Y\left(I_i^0, \varphi, \lambda_0, \psi\right)$, что и доказывает необходимость условия (21).

***Необходимость условия (22)*** вытекает из того, что в качестве $\mathfrak{F}$-$\mathfrak{M}^1$-полной системы подмножеств $H\left(I_i, G\right)$ можно использовать систему $\left\{\mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega}\left(I_i\right) \middle| \lambda \in L, \omega \in W(\lambda)\right\}$, а в качестве $G(I_i)$ - систему $\left\{\mathfrak{F}^{\lambda}\left(\mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega}\left(I_i\right)\right) \middle| \lambda \in L, \omega \in W(\lambda)\right\}$.

***Достаточность.*** Пусть модель алгоритмических операторов $\mathfrak{M}^0$ удовлетворяет условиям (21) и (22). Из условия (21) вытекает, что при всех $I_i \in \mathfrak{I}_i$, $\lambda \in L$ и $\omega \in W(\lambda)$ выполнено $\mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}^{\lambda}\left(\mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega}\right)\left(I_i\right) \subseteq \Pi\left(I_i\right)$.

Из условия (22) вытекает, что при любом $I_i$ и любом $I_f \in \Pi\left(I_i\right)$ существуют $\lambda$ и $\omega$ такие, что $I_f \in \mathfrak{M}^1 \circ \mathfrak{F}^{\lambda}\left(\mathfrak{M}^0_{\lambda,\omega}\right)\left(I_i\right)$, что и требовалось доказать.

***Теорема доказана.***

## Заключение

В настоящей работе пройдены основные этапы построения проблемно-ориентированной теории для задач синтеза обучаемых алгоритмов выделения трендов.

В частности, обоснована актуальность проблемы синтеза обучаемых алгоритмов выделения трендов как промежуточного шага при решении многих прикладных проблем [13,14].

В соответствии с технологией построения проблемно-ориентированных теорий на базе алгебраического подхода предложена формализация задачи синтеза алгоритмов выделения трендов, основанной на сведении к специальной задаче классификации.

Далее предложена и исследована формализация для дополнительных ограничений, с помощью которых может быть выражен широкий класс требований к алгоритмам выделения трендов.

В первой главе получены и доказаны критерии разрешимости и регулярности задач синтеза алгоритмов выделения трендов.

С учетом специфики проблемной области во второй главе изучена проблема локальности алгоритмов выделения трендов, восходящая к классическим работам академика РАН Ю.И. Журавлева. А именно, предложена и обоснована формализация понятий окрестности, системы окрестности, локальной системы аксиом, локальной разрешимости и локальной регулярности.

Введено понятие локального алгоритма выделения трендов. Получены и доказаны критерии локальной разрешимости и локальной регулярности. Исследована проблема синтеза локальных алгоритмов выделения трендов.

Обоснована актуальность проблемы выбора системы окрестностей оптимальной мощности в задачах синтеза алгоритмов выделения трендов.

Предложены и обоснованы алгоритмы построения систем окрестностей оптимальной мощности, обеспечивающие локальную регулярность и локальную разрешимость задачи синтеза алгоритмов выделения трендов.

Доказана монотонность свойств локальной регулярности и локальной разрешимости относительно мощности системы окрестностей.

В качестве заключительного шага построения общей проблемно-ориентированной теории задач синтеза выделения трендов были рассмотрены проблемы полноты семейств алгоритмов выделения трендов.

В частности, в третьей главе предложено обобщение рассматриваемой задачи выделений трендов, как задачи с теоретико-множественными ограничениями в пространстве допустимых финальных информаций.

Для указанного класса задач получены критерии полноты, частными случаями которых оказываются критерии полноты для задач выделения трендов, а именно получены и доказаны критерии полноты моделей алгоритмов, моделей алгоритмических операторов, семейств корректирующих операций и семейств решающих правил в задачах с теоретико-множественными ограничениями.

# Список иллюстраций

## Список литературы


1. Бурбаки Н. Теория множеств, М. Мир, 456 с.
2. Вапник В.Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным М. Наука. 1979.
3. Васильев В.И. Распознающие системы. Справочник. Киев. Наукова думка. 1983.
4. Воронцов К.В. О проблемно-ориентированной оптимизации базисов задач распознавания // ЖВМ и МФ. 1998 Т. 38, № 5. с. 870-880
5. Воронцов К.В. Оптимизационные методы линейной и монотонной коррекции в алгебраическом подходе к проблеме распознавания // ЖВМ и МФ. 2000. Т. 40, №1.
6. Воронцов К.В., Рудаков К.В., Чехович Ю.В. Информационные методы анализа сложных систем // Тезисы докладов научной конференции “Математические модели сложных систем и междисциплинарные исследования”, ВЦ РАН им. А.А. Дородницына, 2002 г., Москва, с. 9.
7. Журавлев Ю.И. Локальные алгоритмы вычисления информации I, II // Кибернетика 1965 г. № 1, 1966 г. №2.
8. Журавлев Ю.И. Об одном классе алгоритмов над конечными множествами, ДАН СССР, т 151, 5, М. 1963, с. 1025-1028.
9. Журавлев Ю.И., Лосев Г.Ф. Окрестности в задачах дискретной математики // Кибернетика и системный анализ, 1995 г., №2.
10. Журавлев Ю.И. Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. I-III // Кибернетика. 1977. № 4. С. 5-17, 1977. № 6. С. 21-27, 1978. № 2. С. 35-43.
11. Журавлев Ю.И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания и классификации // Проблемы кибернетики. Вып. 33 М.: Наука, 1978, С. 5-68.

12. Журавлев Ю.И. Рудаков К.В. Об алгебраической коррекции процедур обработки (преобразования) информации // Проблемы прикладной математики и информатики. М. Наука, 1987. С.187-198.
13. Кац Дж. О., МакКормик Д. Л. Энциклопедия торговых стратегий //Пер. с англ. – Москва, Альпина Паблишер, 2002., 400 с.
14. Колби Р.В., Мейерс Т.А., Энциклопедия технических индикаторов рынка //Пер. с англ. – Москва, Альпина, 1998. 581 с.
15. Леонтьев В.К., Сметанин Ю.Г. О восстановлении вектора по набору его фрагментов. // ДАН СССР. – 1988. – Т. 302, № 6. – С. 1319 – 1322.
16. Мазуров В.Д. Метод комитетов задачах оптимизации и классификации. М. Наука. 1990.
17. Матросов В.Л. Нижние оценки емкости многомерных алгебр алгоритмов вычисления оценок // ЖВМ и МФ. 1984 Т. 24, № 12, с. 1881-1892.
18. Матросов В.Л. Емкость алгебраических расширений модели алгоритмов вычисления оценок // ЖВМ и МФ. 1984 Т. 11, № 5, с. 1719-1730.
19. Матросов В.Л. Емкость полиномиальных расширений множества алгоритмов вычисления оценок // ЖВМ и МФ. 1985 Т. 25, № 1, с. 122-133.
20. Матросов В.Л. Корректные алгебры ограниченной емкости над множествами некорректных алгоритмов // ДАН СССР. 1980 Т. 253, № 1, с. 25-30.
21. Матросов В.Л. Корректные алгебры ограниченной емкости над множествами некорректных алгоритмов // ЖВМ и МФ. 1981 Т. 21, № 5, с. 1276-1291.
22. Матросов В.Л. О критериях полноты модели алгоритмов вычисления оценок и ее алгебраических замыканий // ДАН СССР. 1981 Т. 258, № 4, с. 791-796.
23. Матросов В.Л. Оптимальные алгебры в алгебраических замыканиях операторов вычисления оценок // ДАН СССР. 1982 Т. 262, № 4, с. 818-822.

24. Матросов В.Л. Синтез оптимальных алгоритмов в алгебраических замыканиях моделей алгоритмов распознавания // Распознавание, классификация, прогноз. М.: Наука, 1989. с. 149-176.
25. Рудаков К.В. О некоторых универсальных ограничениях для алгоритмов классификации // ЖВМ и МФ. 1988. Т.26, № 11. с. 1719 - 1729.
26. Рудаков К.В. О применении универсальных ограничений при исследовании алгоритмов классификации //Кибернетика. 1988. № 1. с. 1-5.
27. Рудаков К.В. О симметрических и функциональных ограничениях для алгоритмов классификации // ДАН СССР. 1987. Т. 297, № 1. с. 43- 46.
28. Рудаков К.В. Об алгебраической теории универсальных и локальных ограничений для задач классификации // Распознавание, классификация, прогноз. М.: Наука, 1989. С. 176-201.
29. Рудаков К.В. Полнота и универсальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов классификации // Кибернетика. 1987. № 3. с. 106 - 109.
30. Рудаков К.В. Построение проблемно-ориентированных теорий на основе алгебраического подхода к задачам распознавания образов // Доклады 10-й Всероссийской конференции "Математические методы распознавания образов", Москва, АЛЕВ-В, 2001, с. 113-115.
31. Рудаков К.В. Симметрические и функциональные ограничения для алгоритмов классификации // Кибернетика. 1987. № 4. с. 73 - 77.
32. Рудаков К.В. Универсальные и локальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов классификации // Кибернетика. 1987. № 2. с. 30- 35.
33. Рудаков К.В., Чехович Ю.В. О проблеме синтеза обучаемых алгоритмов выделения трендов (алгебраический подход) // Прикладная математика и информатика, 2001 г. № 8. – С. 97-113.
34. Рудаков К.В., Воронцов К.В. О методах оптимизации и монотонной коррекции в алгебраическом подходе к проблеме распознавания // ДАН. 1999. Т. 367 №3. С. 314–317

35. Рудаков К.В., Чехович Ю.В. Алгебраический подход к проблеме синтеза обучаемых алгоритмов выделения трендов // Доклады Академии наук, 2003 г. том 388, № 1 с 33.-36.
36. Рудаков К.В., Чехович Ю.В. Критерии полноты моделей алгоритмов и семейств решающих правил для задач классификации с теоретико-множественными ограничениями // Доклады Академии наук, работа принята в печать.
37. Рудаков К.В., Чехович Ю.В. Критерии полноты семейств корректирующих операций и моделей алгоритмических операторов для задач классификации с теоретико-множественными ограничениями // Доклады Академии наук, работа принята в печать.
38. Рязанов В.В. Комитетный синтез алгоритмов распознавания и классификации // ЖВМ и МФ. 1981. Т. 21, № 6 с. 1533-1543.
39. Рязанов В.В. О построении оптимальных алгоритмов распознавания и таксономии (классификации) при решении прикладных задач // Распознавания, классификация, прогноз. Выпуск 1. М. Наука. 1989. с. 229-279.
40. Сметанин Ю.Г. Распознавание при представлении исходных данных в виде длинных последовательностей. // Распознавание, классификация и прогноз. Математические методы и их применения. – Вып. 2. – М.: Наука. – 1988. – С. 38 – 41.
41. Черепнин А.А. О радиусах разрешимости и регулярности задач распознавания // Доклады 11-й Всероссийской конференции “Математические методы распознавания образов”, 2003 г. Пущино, с. 210 - 211.
42. Черепнин А.А. Об оценках регулярности задач распознавания и классификации // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1993. №1, с. 155-159
43. Чехович Ю.В. Вопросы алгебраического подхода к задачам выделения трендов // Материалы международной конференции студентов и

аспирантов по фундаментальным наукам «Ломоносов 2001» Секция «Вычислительная математика и кибернетика» – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ, 2001, С. 3-4.

44. Чехович Ю.В. Об обучаемых алгоритмах выделения трендов // Интеллектуализация обработки информации: тезисы докладов Международной научной конференции, г. Симферополь, 2002 г. с. 153-154.
45. Чехович Ю.В. Об обучаемых алгоритмах выделения трендов // Искусственный интеллект (научно-теоретический журнал НАН Украины) 2002 г. № 2, с. 298-305.
46. Чехович Ю.В. Обучаемые алгоритмы выделения трендов // Доклады 9-й Всероссийской конференции "Математические методы распознавания образов", 1999 г. Москва, с. 247-248.
47. Чехович Ю.В. Применения алгебраического подхода к задачам выделения трендов // Доклады 10-й Всероссийской конференции "Математические методы распознавания образов", 2001 г. Москва, с. 315-316.
48. Чехович ЮВ. Мощности окрестностей в задачах выделения трендов // Доклады 11-й Всероссийской конференции "Математические методы распознавания образов", 2003 г. Пущино, с. 215-216.
49. Leont'ev V.K., Smetanin Yu.G. Problems of Information on the Set of Words. // Journal of Mathematical Sciences. Kluwer Academic/Consultants Bureau, New York, 2000. – P. 49 – 70.
50. Leont'ev V.K., Smetanin Yu.G.. Recognition Model with Representation of Information in the Form of Long Sequences. // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications. – 2002. – Vol. 12, No. 3. – C. 250 – 287.
51. Smetanin Yu.G. Refined Logarithmic Bound for the Length of Fragments Ensuring the Unambiguous Reconstruction of Unknown Words. // Pattern Recognition and Image Analysis: Advances in Mathematical Theory and Applications. – 2001. – Vol. 11, № 1. – P. 100 – 102.