Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа Прикладной Математики и Информатики
Кафедра интеллектуальных систем

**Направление подготовки / специальность:** 03.03.01 Прикладные математика и физика
**Направленность (профиль) подготовки:** Математическая физика, компьютерные технологии и математическое моделирование в экономике

# ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ ВЕРОЯТНОСТНОЙ МОДЕЛИ В ЗАДАЧЕ ДОМЕННОЙ АДАПТАЦИИ

(бакалаврская работа)

**Студент:**
Шокоров Вячеслав Александрович

_____
*(подпись студента)*

**Научный руководитель:**
Стрижов Вадим Викторович,
д-р физ.-мат. наук

_____
*(подпись научного руководителя)*

**Консультант** *(при наличии)***:**
_____
_____
*(подпись консультанта)*

Москва 2021

**Аннотация**

Решается задача регрессии, без доступа к значению целевой переменной, на целевом домене, с учетом того, что доступен исходный домен с разметкой. Например, когда обучающие и тестовые данные взяты из различных априорных распределений или даже принадлежат различным подпространством обучение логистической регрессии на исходном домене и применение ее на целевом не имеет смысла.

В работе предлагается метод адаптации модели, обученный в исходном домене для использования на целевом домене, через применение функции сходства распределений. Мотивация подхода заключается в том, что для совпадающих распределений задача регрессии должна решаться одинаково. В вычислительном эксперименте проверяется гипотеза о совпадении весов моделей линейной регрессии, обученных на исходном и преобразованном целевом доменах.

Предлагаемый подход предложен теорией адаптации домена, предполагающей, что для достижения трансформации домена, функция преобразования делает домены неразличимыми. Это достигается максимизацией функции сходства. Предлагаемый подход реализован в контексте нейронных сетей.

**Ключевые слова**: *доменная адаптация, нейронная сеть, GAN, WGAN, функция сходства Адуенко.*

# Содержание

# 1 Введение

В данной работе решается задача доменной адаптации. Цель этой адаптации заключается в решении задачи регрессии на данных из домена-источника так, чтобы она достигала сравнимое качество на целевом домене. Примером возникновения такой задачи является ситуация, когда домен-источник представляет собой синтетические данные, которые генерируются без значительных затрат, причем имеют хорошую, качественную разметку, а целевой домен — фотографии пользователей. Тогда задача доменной адаптации заключается в обучении модели на синтетических данных, которая будет хорошо работать с целевым доменом.

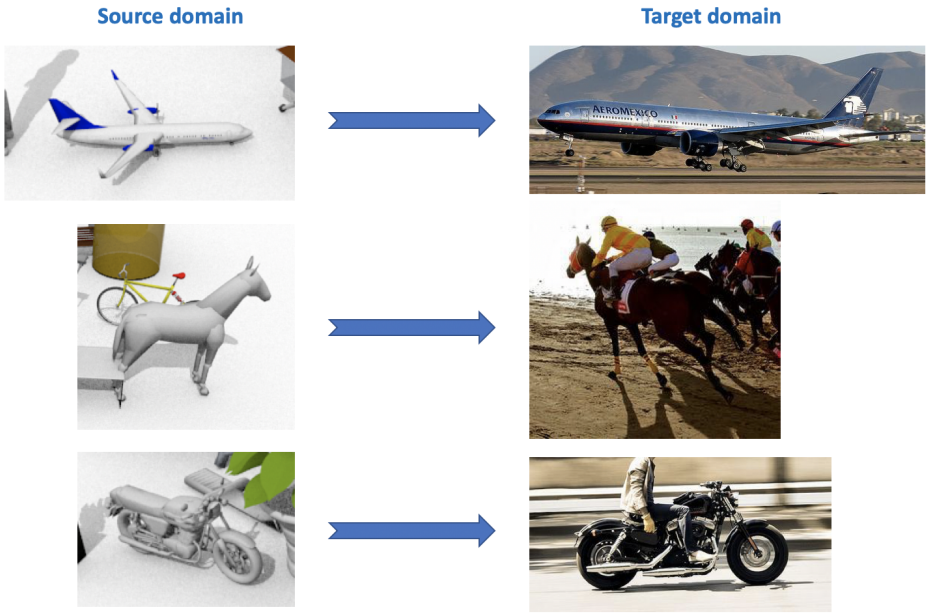



Рис. 1: Примеры задачи применения адаптации доменов. Изображения взяты из датасета VisDA, который используется в конкурсе Visual Domain Adaptation Challenge.

Мотивацией подхода является гипотеза о том, что для совпадающих распределений задача регрессии решается одинаково. По этой причине, в вычислительном эксперименте проверяется гипотеза о совпадении весов моделей линейной регрессии, обученных на исходном и преобразованном целевом доменах.

Исследуется проблема построения и анализа вероятностного пространства параметров этого преобразования. Проблема в том, что домены принадлежат непересекающимся или слабо пересекающихся пространствам. В этом случае, без использования функции преобразования, методы решения задачи регрессии, когда, например, обучается модель линейной регрессии на исходном домене и применяется к целевому домену, не имеет смысла.

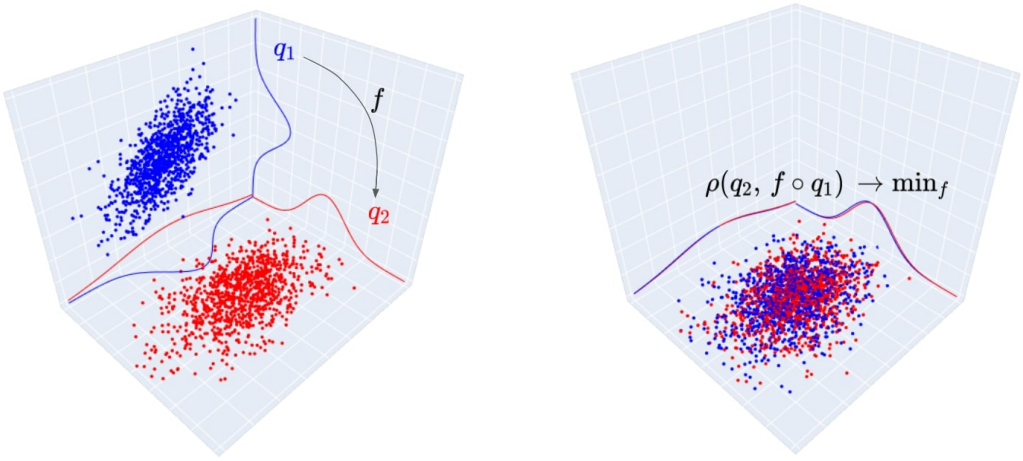
Случай частично-ортогональных признаковых пространств доменов возможен,

например, когда рассматриваются товары в магазине. Есть наблюдаемые параметры этих объектов (для карандашей - цвет грифеля и его мягкость, для книг — количество страниц и тип переплета), множество наблюдаемых параметров может как пересекаться (общий параметр для карандашей и книг — цена), так и не пересекаться (цвет грифеля, количество страниц).

Подходы обучения без учителя показывают неудовлетворительный результат, так как не используют информацию, которую можно получить из первого домена.

**Определение 1** *Доменом называется априорное распределение признакового описания объектов.*

**Определение 2** *Функция $f$ называется функцией преобразования домена $\mathcal{D}_1$ в домен $\mathcal{D}_2$, если* $f : \text{supp}(\mathcal{D}_1) \to \text{supp}(\mathcal{D}_2)$




(a) исходная выборка (b) преобразованная выборка

Рис. 2: Пример применения предлагаемого подхода. (a) Два домена, первый (целевой, синий) описывается признаками из пространства $\mathbb{R}^{\{x,z\}}$, второй (исходный, красный) из пространства $\mathbb{R}^{\{x,y\}}$. Для каждого домена задано распределение. (b) для первого домена применена функция преобразования. Параметры преобразования находятся при решении задачи минимизации функции сходства, которая сравнивает второй домен и преобразованный первый.

## 1.1 Обзор литературы

В [1-12] предлагается методы доменной адаптации. Данная работа посвящена применению Adversarial-Based подходов [9-12]. Эти подходы используют состязательную функцию ошибки, которая впервые появилась в GAN'ах [14].

Особенностью методов из этого семейства является обучение нейронной сети с инвариантным по отношению к исходному и целевому доменам векторным представлением. Тогда, за счет полученной инвариантности, сеть обученная на размеченном исходном домене будет схожее качество на целевом домене.

В работе [8] предлагается применение трех моделей: основной сети, с помощью которой получается векторное представление , "головы", отвечающей за классификацию на исходном домене и "головы", которая обучается отличать данные из исходного домен от целевого. Особенностью данного подхода является применение Gradient reversal layer при обратном распространении ошибки в обучении для "головы", отвечающей за домены. Этот добавочный слой умножает проходящий через него градиент на негативную константу, увеличивая функцию ошибки связанную с доменном. Этим добиваются того, что распределения векторных представлений на обоих доменах становятся близки.

В подходе под названием Adversarial Discriminative Domain Adaptation (ADDA), описанном в [9], применяется разделение сети для исходного домена и сети для целевого домена. Суть ADDA заключается в том, что мы сначала обучаем хороший классификатор на размеченном исходном домене, а затем с помощью состязательного-обучения адаптируем так, чтобы векторные представления классификатора на обоих доменах были близки.

# 2 Теоретическая часть

## 2.1 Постановка задачи

В качестве функции преобразования используется нейронную сеть с параметрами $\boldsymbol{\theta}_f$.

**Определение 3** *Оптимальной функцией преобразования домена $\mathcal{D}_1$ в домен $\mathcal{D}_2$ относительно функции сходства $s$ назовем функцию $f_s(\cdot, \hat{\boldsymbol{\theta}}_f)_s$:*

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_f = \arg\max_{\theta_f} s\Big(\mathcal{D}_2, p(f(x, \boldsymbol{\theta}_f), x \sim \mathcal{D}_1)\Big) \tag{1}$$

*Для краткости обозначим $\hat{f}_s(\cdot) = f_s(\cdot, \hat{\boldsymbol{\theta}}_f)_s$.*

### 2.1.1 Постановка задачи для функции предложенной Адуенко.

В [13] Адуенко ввел функцию сходства:

**Определение 4** *Назовем функцией сходства $s_0$ пары распределений $g_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+, g_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$, определенных на одном пространстве, функцию вида*

$$s_0(g_1, g_2) = \frac{\int g_1(\mathbf{x}) g_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\max_{\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n} \int g_1(\mathbf{z}) g_2(\mathbf{z}-\mathbf{b}) d\mathbf{z}}.$$

Проверим, что функция Адуенко является критерием совпадения распределений, т.е. верно ли, что:

$$\begin{cases} s_0(g_1, g_2) = 1 \Rightarrow g_1 \equiv g_2, \\ s_0(g_1, g_2) = 1 \Leftarrow g_1 \equiv g_2. \end{cases}.$$

Либо в для последовательности распределений $\{g_2^k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$\begin{cases} s_0(g_1, g_2^k) \xrightarrow{k\to\infty} 1 \Rightarrow g_2^k \xrightarrow{k\to\infty} g_1, \\ s_0(g_1, g_2^k) \xrightarrow{k\to\infty} 1 \Leftarrow g_2^k \xrightarrow{k\to\infty} g_1. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть существует некий итеративный процесс, который находит последовательность распределений (либо функций преобразования, примененных к одному распределению) такой, что на каждой итерации значение функции $s_0$ сходится к единице. Тогда, если условия (2) выполняются, то данный процесс находит последовательность сходящуюся к $g_1$.

Рассмотрим выполнимость второго выражения в (2).

**Теорема 1** *Пусть дана пара распределений $g_1(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^+$, $g_2(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^+$, где $n_1, n_2 > 0$. Тогда для некоторой последовательности параметрических линейных преобразований $\{f_\theta^k\}_{k=1}^{\infty}$, такой что $\|g_1 - f_\theta^k \circ g_2\| \to 0$, верно:*

$$s_0(g_1, f_\theta^k \circ g_2) \to 1.$$

Теорема 1 является частным случаем леммы 2, сформулированной далее.

**Лемма 2** *Пусть дано распределение $g_1(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ и последовательность распределений $g_2^k(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$. Тогда, если $\|g_1 - g_2^k\| \to 0$, верно:*

$$s_0(g_1, f_\theta^k \circ g_2) \to 1.$$

**Доказательство.**

Зададим $g_\Delta^k = g_2^k - g_1$, тогда из $\|g_\Delta^k\| \to 0$ по определению нормы, это означает, что $\int |g_\Delta^k| \to 0$. Так как $\int -|g_\Delta^k| \le \int g_\Delta^k \le \int |g_\Delta^k|$, откуда следует, что:

$$\int g_\Delta^k \to 0.$$

Подставив $g_\Delta^k$ в функцию $S_0$ и пользуясь аддитивностью интеграла, получим:

$$s_0(g_1, g_1 + g_\Delta^k) = \frac{\int g_1(\mathbf{x}) \cdot (g_1 + g_\Delta^k)(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\max_{\mathbf{b}} \int g_1(\mathbf{z}) \cdot (g_1 + g_\Delta^k)(\mathbf{z} + \mathbf{b}) d\mathbf{z}} = \frac{\int g_1^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int g_1(\mathbf{x}) g_\Delta^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\max_{\mathbf{b}} \Big[ \int g_1(\mathbf{z}) g_1(\mathbf{z} + \mathbf{b}) d\mathbf{z} + \int g_1(\mathbf{z}) g_\Delta^k(\mathbf{z} + \mathbf{b}) d\mathbf{z} \Big]} \ge \frac{\int g_1^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int g_1(\mathbf{x}) g_\Delta^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\max_{\mathbf{b}} \int g_1(\mathbf{z}) g_1(\mathbf{z} + \mathbf{b}) d\mathbf{z} + \max_{\mathbf{b}'} \int g_1(\mathbf{z}) g_\Delta^k(\mathbf{z} + \mathbf{b}') d\mathbf{z}}. \quad (3)$$

Рассмотрим знаменатель полученного выражения. Из неравенства Коши-Буняковского:

$$\int g_1(\mathbf{z}) g_1(\mathbf{z} - \mathbf{b}) d\mathbf{z} \le \sqrt{\int g_1^2(\mathbf{z}) d\mathbf{z}} \sqrt{\int g_1^2(\mathbf{x} - \mathbf{b}) d\mathbf{x}} = \int g_1^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x},$$

причем при $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ неравенство обращается в равенство. Таким образом убирается один из операторов максимума. Подставляя данное выражение в (3), получаем:

$$s_0(g_1, g_1 + g_\Delta^k) \ge \frac{\int g_1^2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int g_1(\mathbf{x}) g_\Delta^k(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{\int g_1^2(\mathbf{z}) d\mathbf{z} + \max_{\mathbf{b}} \int g_1(\mathbf{z}) g_\Delta^k(\mathbf{z} + \mathbf{b}) d\mathbf{z}} \to 1, \quad \text{при } k \to \infty.$$

Получаем, что и числитель и знаменатель являются $o\big(\int g_1^2(\mathbf{z}) d\mathbf{z}\big)$, откуда следует доказываемое утверждение.

■

Покажем невыполнимость первого выражения в (2). Для этого сформулируем теорему 3. Для доказательства теоремы используется лемма 4, в которой вводится последовательность преобразований специального вида и доказывается ряд свойств для нее. Теорема 3 доказывает, что для данной последовательности первое выражение в (2) неверно.

**Теорема 3** *Пусть дана пара распределений $g_1(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^+$, $g_2(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^+$, где $n_1, n_2 > 0$. Тогда существует некоторая последовательность параметрических линейных преобразований $\{f_\theta^k\}_{k=1}^\infty$, такая что $s_0(g_1, f_\theta^k \circ g_2) \to 1$, и для нее не верно:*

$$\|g_1 - f_\theta^k \circ g_2\| \to 0.$$

**Лемма 4** *Для линейного преобразование $f_\theta^k(x)$, вида*

$$\frac{\mathbf{x}}{k} + \mathbf{b}, \quad \textit{где } k \in \mathbb{N}_+, \mathbf{b} = \arg\max_{\mathbf{x}} g_2(\mathbf{x}),\ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_2}$$

*Выполняются следующие свойства:*

•*Для любого $a > 0$ верно, что $f_\theta^k \circ g_2(\cdot)|_{\mathcal{A}} \to U(\mathcal{A})$, где $\mathcal{A} = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \le a\}$* (4)

• *Существует $0 \le B < \infty$ и $k_0 : \forall k \ge k_0$ для которых верно, что*

$$\sup_{\{\mathbf{x}:\|\mathbf{x}\|\ge B\}} f_\theta^k \circ g_2(\mathbf{x}) \le \sup_{\{\mathbf{x}:\|\mathbf{x}\|\le B\}} f_\theta^k \circ g_2(\mathbf{x}), \quad (5)$$

*где в свойстве* (4) $f_\theta^k \circ g_2(\cdot)|_{\mathcal{A}}$ *есть сужение* $f_\theta^k \circ g_2(\cdot)$ *на множество* $\mathcal{A}$*, то есть*

$$g_2(\cdot)|_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, \ \textit{если } \mathbf{x} \notin \mathcal{A}, \\ \frac{g_2(\mathbf{x})}{\int_{\mathcal{A}} g_2(\mathbf{z}) d\mathbf{z}}, \mathbf{x} \in \mathcal{A}. \end{cases}$$

*Сходимость в свойстве* (4) *понимается равномерная, то есть*

$$g_2(\cdot) \to U(\mathcal{A}) \textit{ тогда и только тогда, когда } \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{A}} \Big| g_2(\mathbf{x}) - 1/|\mathcal{A}| \Big| \to 0, \ \textit{где } k \to \infty.$$

**Доказательство.**

С учетом того, что интеграл функции распределения по $\mathbb{R}^{n_2}$ должен равняться единице, получаем, что последовательность распределений имеет вид:

$$f_\theta^k \circ g_2(\mathbf{x}) = g_2\Big(\frac{\mathbf{x}}{k} + \mathbf{b}\Big)\Big/k.$$

Проверим выполнимость свойства (4). Так как $\mathbf{b}$ является точкой максимума неотрицательной и ненулевой функции, следовательно $g_2(\mathbf{b}) > 0$. Зафиксируем произвольные $\delta \in (0, g_2(\mathbf{b})), a > 0$.

Тогда существует $w_\delta \in \mathbb{R}_+$ такая, что для всех $\mathbf{x}$ лежащих внутри окрестности нуля, т.е. $\|\mathbf{x}\| < w_\delta$ верно $g_2(\mathbf{b}) - \delta \le g_2(\mathbf{x} + \mathbf{b}) \le g_2(\mathbf{x})$. Отсюда, для всех $k \ge \lceil \frac{a}{w_\delta} \rceil$ и любого $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ верно:

$$\frac{1}{k}\Big(g_2(\mathbf{b}) - \delta\Big) \le \frac{1}{k} g_2\Big(\frac{\mathbf{x}}{k} + \mathbf{b}\Big) \le \frac{1}{k} g_2(\mathbf{b}). \quad (6)$$

Из чего верно:

$$\frac{1}{k}\Big(g_2(\mathbf{b})-\delta\Big)|\mathcal{A}| \le \int_{\mathcal{A}} \frac{1}{k} g_2\Big(\frac{\mathbf{x}}{k}+\mathbf{b}\Big) \le \frac{1}{k} g_2(\mathbf{b})|\mathcal{A}|. \tag{7}$$

Далее объединяя (6) и (7) получаем:

$$\frac{\frac{1}{k}\Big(g_2(\mathbf{b})-\delta\Big)}{\frac{1}{k}g_2(\mathbf{b})|\mathcal{A}|} \le \frac{1}{k} g_2\Big(\frac{\mathbf{x}}{k}+\mathbf{b}\Big)\Big|_{\mathcal{A}} = \frac{\frac{1}{k} g_2\Big(\frac{\mathbf{x}}{k}+\mathbf{b}\Big)}{\int_{\mathcal{A}} \frac{1}{k} g_2\Big(\frac{\mathbf{x}}{k}+\mathbf{b}\Big)} \le \frac{\frac{1}{k} g_2(\mathbf{b})}{\frac{1}{k}\Big(g_2(\mathbf{b})-\delta\Big)|\mathcal{A}|}.$$

Упростим и вычтем $1/|\mathcal{A}|$ из каждой части, получим:

$$\frac{-\delta}{g_2(\mathbf{b})|\mathcal{A}|} \le \frac{1}{k} g_2\Big(\frac{\mathbf{x}}{k}+\mathbf{b}\Big)\Big|_{\mathcal{A}} - \frac{1}{|\mathcal{A}|} \le \frac{\delta}{(g_2(\mathbf{b})-\delta)|\mathcal{A}|}. \tag{8}$$

Тогда в силу произвольности $\delta$ получаем равномерную сходимость сужения элементов последовательности распределений на множество $\mathcal{A}$ к $U(\mathcal{A})$, тем самым доказываем выполнения первого свойства (4).

Выполнение второго свойства очевидно, так как $\mathbf{0}$ - точка максимума и увеличение $k$ сдвигает ее.

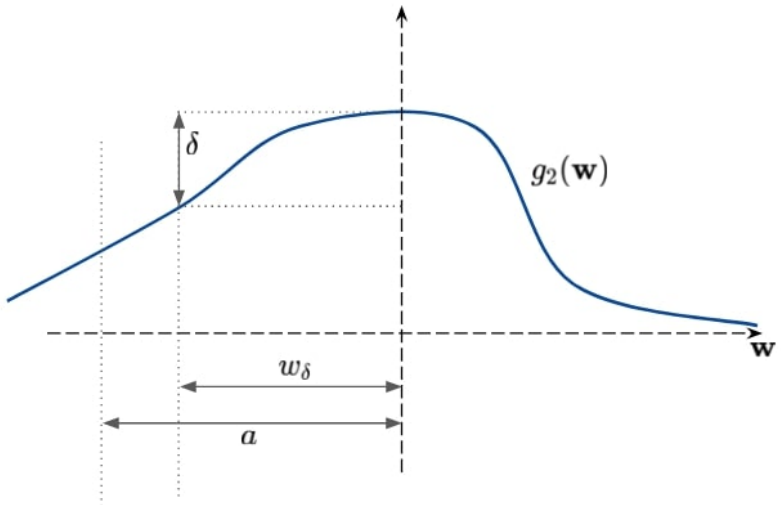



Рис. 3: Поясняющий рисунок к доказательству леммы. При увеличении $k$ получается, что распределение "растягивается"(значение аргумента растет в $k$ раз медленнее) от нуля, а окрестность, в которой значение функции отличается только на максимального значение, постепенно выходит за $\mathcal{A}$.

■

**Доказательство. Теоремы 3.**

Для доказательства теоремы построим последовательность преобразований описанную в Лемме 4. Обозначим $g_2\left(\frac{\mathbf{x}}{k}+\mathbf{b}\right)$ как $g_2^k(\mathbf{x})$. Таким образом требуется показать, что

$$\frac{\int g_1(\mathbf{x})g_2^k(\mathbf{x})d\mathbf{x}}{\max_{\mathbf{b}}\int g_1(\mathbf{z})g_2^k(\mathbf{z}-\mathbf{b})d\mathbf{z}} \to 1 \text{ при } k\to\infty.$$

Обозначим $Q_a=\{\mathbf{x}:\|\mathbf{x}\|\geq a\}, R_a=\{\mathbf{x}:\|\mathbf{x}\|\leq a\}$. Из свойства (5) в лемме 4 имеем:

$$\exists 0\leq B<\infty,\ \exists k_0:\forall k\geq k_0\ \sup_{Q_B} g_2^k(\mathbf{x})\leq \sup_{R_B} g_2^k(\mathbf{x}).$$

Зафиксируем произвольное $\epsilon>0$. Определим $B_\epsilon$ так, что

$$\int_{\{\mathbf{x}:\|\mathbf{x}\|\geq B_\epsilon\}} g_1(\mathbf{z})d\mathbf{z}<\epsilon.$$

Определим $\tilde{B}=\max(B,B_\epsilon)$. Зафиксируем также $\delta>0$. Из свойства (4) в лемме 4 имеем:

$$\exists k_\delta:\forall k\geq k_\delta\ \frac{\sup_{R_{\tilde{B}}} g_2^k(\mathbf{x})}{\inf_{R_{\tilde{B}}} g_2^k(\mathbf{x})}\leq 1+\delta.$$

Определим $\tilde{k}=\max(k_\delta,k_0)$. Тогда для $k\geq\tilde{k}$ имеем

$$\int g_1(\mathbf{x})g_2^k(\mathbf{x})d\mathbf{x}\geq\int_{\{\mathbf{x}:\|\mathbf{x}\|\leq B\}} g_1(\mathbf{x})g_2^k(\mathbf{x})d\mathbf{x}\geq$$
$$\inf_{\{\mathbf{x}:\|\mathbf{x}\|\leq B\}} g_2^k(\mathbf{x})\int_{\{\mathbf{z}:\|\mathbf{z}\|\leq B\}} g_1(\mathbf{z})d\mathbf{z}\geq(1-\epsilon)\inf_{R_B} g_2^k(\mathbf{x})\geq$$
$$(1-\epsilon)(1-\delta)\sup_{R_B} g_2^k(\mathbf{x}). \quad (9)$$

Аналогично для знаменателя выражения для $s_0$ с учетом свойства (5)

$$\forall\mathbf{b}\int g_1(\mathbf{z})g_2^k(\mathbf{z}-\mathbf{b})d\mathbf{z}\leq\sup_{\mathbf{z}} g_2^k(\mathbf{z})=\sup_{R_B} g_2^k(\mathbf{z}). \quad (10)$$

Тогда из (9) и (10) получаем:

$$\forall k\geq\tilde{k}: s_0(g_1,g_2^k)\geq(1-\epsilon)(1-\delta).$$

С учетом произвольности выбора $\epsilon,\delta$ получаем требуемое. Так как такое линейное преобразование "растягивает"распределение, т.е.

$$\forall \mathbf{x}\ g_2^k(\mathbf{x}) \to 0,\ \text{при}\ k \to \infty$$

Что эквивалентно тому, что:

$$\|g_2^k\| \to 0,\ \text{при}\ k \to \infty$$

Поэтому из условия $\|g_1 - g_2^k\| \to 0$ следует, что $g_1 \equiv 0$, что в общем случае неверно. Тем самым доказываем теорему.

■

Из теоремы 1 и теоремы 3 следует, что функция Адуенко является необходимой, но недостаточной в качестве меры совпадения распределений. Т.е. не выполняется (2). Из-за чего данная функция не используется для нахождения параметров преобразования.

### 2.1.2 Постановка задачи оценки параметров преобразования оптимального относительно дивергенции Кульбака-Лейблера

Теперь рассмотрим дивергенцию Кульбака-Лейблера в качестве функции сходства. Для двух функций распределения $g_1, g_2$:

$$D_{KL}(g_1, g_2) = \int g_1(\mathbf{x}) \log \frac{g_1(\mathbf{x})}{g_2(\mathbf{x})} d\mathbf{x} = \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim g_1} \log g_1(\mathbf{x}) - \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim g_1} \log g_2(\mathbf{x}) \tag{11}$$

$D_{KL}$ достигает минимума при совпадении распределений $g_1$ и $g_2$. Так же видно, что дивергенция Кульбака-Лейблера асимметрична. В тех случаях, когда $g_1(\mathbf{x})$ близко к нулю, а $g_2(\mathbf{x})$ значительно отличается от нуля, то получается, что $g_2$ оказывает малое влияние. Это может привести к ошибочным результатам, когда мы просто хотим измерить сходство между двумя одинаково важными распределениями.

**Определение 5** *Назовем функцией сходства порожденную метрикой $D$:*

$$s_D(g_1, g_2) = \exp(-D(g_1, g_2)) \tag{12}$$

Например, функция сходства порожденная дивергенцией Кульбака-Лейблера:

$$s_{KL}(g_1, g_2) = \exp(-D_{KL}(g_1, g_2)) \tag{13}$$

Отметим, что с учетом (13) задачу максимизации (1) можно переписать в следующем виде:

$$\hat{\theta}_f = \arg\min_{\theta_f} D_{KL}(g_1, f \circ g_2)$$

Для решения данной задачи, когда отсутствует явно заданное распределение, а есть только набор значений полученных сэмплированием из него, предлагается применять подход генеративно-состязательных сетей (GAN) описанных в [14]. GAN состоит из двух моделей:

- Дискриминатор $D$ оценивает вероятность получения данной выборки из исходного домена данных. Он работает как критик и оптимизирован для того, чтобы отличать из какого домена берутся данные.

- Генератор, в нашем случае это функция преобразования, переводит целевой домен в пространство признакового описания исходного домена. Он обучен копировать распределение исходного домена, или, другими словами, генератор пытается обмануть дискриминатор.

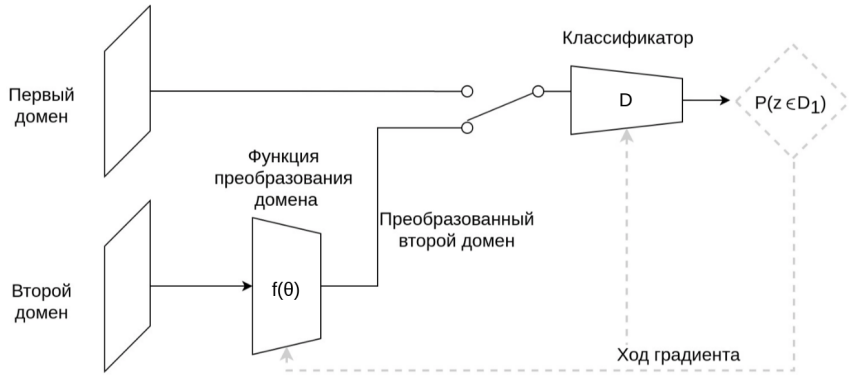



Рис. 4: Предлагаемая архитектура модели для решения задачи нахождения параметров функции преобразования оптимальной относительно дивергенцией Кульбака-Лейблера

С одной стороны, мы хотим, чтобы решения дискриминатора $D$ по данным из первого домена были точны, максимизируя $\mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim g_1}[\log D(\mathbf{x})]$. Между тем, учитывая преобразованную выборку второго домена $f(\mathbf{z}), \mathbf{z} \sim g_2$, ожидается, что дискриминатор покажет вероятность $D(f(\mathbf{z}))$, близкую к нулю, максимизируя $\mathbb{E}_{\mathbf{z}\sim g_2}[\log(1 - D(f(\mathbf{z})))]$.

С другой стороны, генератор обучен увеличивать вероятность того, что $D$ даст высокую вероятность для преобразованного целевого домена, таким образом, чтобы минимизировать $\mathbb{E}_{\mathbf{z}\sim g_2}[\log(1 - D(f(\mathbf{z})))]$.

При объединении обоих аспектов вместе получается, что $D$ и $f$ играют в минимаксную задачу, в которой мы должны оптимизировать следующую функцию потерь:

$$L_{KL}(D, f) = \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim g_1}[\log D(\mathbf{z})] + \mathbb{E}_{\mathbf{z}\sim g_2}[\log(1 - D(f(\mathbf{z})))] = \\ \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim g_1}[\log D(\mathbf{x})] + \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim f\circ g_2}[\log(1 - D(\mathbf{x})]$$

где член $\mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim g_1}[\log D(\mathbf{x})]$ не влияет на $G$ во время обучения.

Итоговая оптимизационная задача:

$$\boldsymbol{\theta}, D = \arg\min_f \max_D L_{KL}(D, f) \tag{14}$$

### 2.1.3 Постановка задачи оценки параметров преобразования оптимального относительно расстояния Васерштейна

Рассмотрим расстояние Васерштейна в качестве функции сходства. В общем случае расстояние Васерштейна имеет вид:

$$W_p(\mu, v) := \Big( \inf_{\gamma \in \Gamma(\mu,v)} \int d(x,y)^p d\gamma(x,y) \Big)^{1/p}$$

где $\Gamma(\mu, v)$ обозначает совокупность всех мер с маргинальными распределениями $\mu$ и $v$ для первого и второго параметров соответственно.

Для оценки параметров функции преобразования будет использоваться расстояние Васерштейна-1 или Earth-Mover (EM) distance:

$$W(g_1, g_2) = \inf_{\gamma \in \Gamma(\mu,v)} \mathbb{E}_{(x,y)\sim\gamma} |x - y| \tag{15}$$

где $W$ также достигает минимума при совпадении распределений $g_1$ и $g_2$.

Из (12) получаем, что функция сходства порожденная расстоянием Васерштейна:

$$s_W(g_1, g_2) = \exp(-W(g_1, g_2)) \tag{16}$$

Отметим, что с учетом (16) задачу максимизации (1) можно переписать в следующем виде:

$$\hat{\theta}_f = \arg\min_{\theta_f} W(g_1, f \circ g_2)$$

Выражение (15) достаточно трудно вычислять, но с учетом, двойственности Канторовича-Рубинштейна [15], которая говорит нам о том, что

$$W(g_1, g_2) = \sup_{\|D\|_L \leq 1} \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim g_1}[D(\mathbf{x})] - \mathbb{E}_{\mathbf{z}\sim g_2}[D(\mathbf{z})], \tag{17}$$

где супремум берется по всеми 1-липшицевым функциям $D : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Причем, если мы заменим $\|D\|_L \leq 1$ на $\|D\|_L \leq K$, т.е. рассмотрим K-липшицевы функции для некоторой константы $K$, то получим $K \cdot W(g_1, g_2)$. Поэтому, если существует параметризованное семейство из функций $\{D_w\}_{w\in\mathcal{W}}$, все из которых являются K-липшицевыми для некоторого K, то задача переписывается к задаче максимизации:

$$\max_{w\in\mathcal{W}} \mathbb{E}_{\mathbf{x}\sim g_1}[D_w(\mathbf{x})] - \mathbb{E}_{\mathbf{z}\sim g_2}[D_w(\mathbf{z}] \tag{18}$$

Если супремум в (17) достигается для некоторого $w \in \mathcal{W}$, то и максимум в (18) будет достигнут, его значение будет известно с точностью до мультипликативной кон-

станты. Однако важно, что данная константа не влияет на точку максимум, поэтому значения аргументов, в которых достигаются супремум и максимум будут совпадать.

Таким образом получается оптимизационная задача функции потерь:

$$L_{\mathcal{W}}(f) = \max_{w \in \mathcal{W}} \mathbb{E}_{\mathbf{x} \sim g_1}[D_w(\mathbf{x})] - \mathbb{E}_{\mathbf{z} \sim g_2}[D_w(f(\mathbf{z}))]$$

Для нахождения параметров функции преобразования одного домена в другой оптимальной относительно расстояния Васерштейна решается оптимизационная задача:

$$\boldsymbol{\theta} = \arg\min_{f} L_W(f) \tag{19}$$

# 3 Результаты экспериментов

Цель эксперимента проверить гипотезу о совпадении весов моделей линейной регрессии сформулированной в введении, и в том, что хотим определить, какая функция сходства позволяет достигать лучшие результаты. Другими словами, задача заключается в проверке, что полученная функция преобразования домена сохраняет инвариантность на классах и значениях целевых переменных. Для проведения эксперимента берется два различных домена и задача регрессии на первом из них, находится оптимальная функция преобразования целевого домена в исходный и применяются два предлагаемых далее метода оценки качества функции преобразования.

Пусть функция преобразования сохраняет инвариантность на значениях целевых переменных, тогда:

1) среднеквадратическое отклонение предсказываемого значения от правильного ответа на преобразованном целевом домене схоже с соответствующей величиной на исходном домене.

2) статистическая проверка гипотезы о равенстве весов в задачи линейной регрессии не будет отвержена.

Для применения метода 2) используется теория из работы [13]. Рассматривается задача различения моделей обученных на непересекающихся множествах. В ней выводится распределение значения функции сходства $s_0$ между апостериорными распределениями весов для пары линейных моделей в условиях истинности гипотезы $H_0$ о совпадении весов моделей.

Обозначим выборки, как $\mathbf{X}_1$ и $\mathbf{X}_2$. Тогда зависимые переменные:

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{X}_1\mathbf{w}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_1 \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_1^2\mathbf{I}), \quad \mathbf{w}_1 \sim p_1(\mathbf{w}_1)$$
$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{X}_2\mathbf{w}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_2, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_2 \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma_2^2\mathbf{I}), \quad \mathbf{w}_2 \sim p_2(\mathbf{w}_2)$$

Считаем далее, что $p_1(\mathbf{w}_1)$ и $p_2(\mathbf{w}_2)$ есть нормальные распределения, то есть

$$p_1(\mathbf{w}_1) = \mathcal{N}(\mathbf{w}_1|\mathbf{v}_1, \boldsymbol{\Sigma}_1^{-1}), \quad p_2(\mathbf{w}_2) = \mathcal{N}(\mathbf{w}_2|\mathbf{v}_2, \boldsymbol{\Sigma}_2^{-1}).$$

Получаем, что функции совместного правдоподобия имеют вид

$$p(\mathbf{y}_k, \mathbf{w}_k|\mathbf{X}_k) = p(\mathbf{y}_k|\mathbf{X}_k, \mathbf{w}_k)p(\mathbf{w}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_k - \mathbf{X}_k\mathbf{w}_k|\mathbf{0}, \sigma_k^2\mathbf{I})\mathcal{N}(\mathbf{w}_k|\mathbf{v}_k, \boldsymbol{\Sigma}_k^{-1}), \quad k = 1, 2.$$

Пользуясь формулой Байеса, получаем для апостериорного распределения параметров $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{w}_2$

$$p(\mathbf{w}_k|\mathbf{X}_k, \mathbf{y}_k) = \frac{p(\mathbf{y}_k, \mathbf{w}_k|\mathbf{X}_k)}{p(\mathbf{y}_k|\mathbf{X}_k)} \propto p(\mathbf{y}_k, \mathbf{w}_k|\mathbf{X}_k), \quad k = 1, 2,$$

откуда $p(\mathbf{w}_k|\mathbf{X}_k, \mathbf{y}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{w}_k|\hat{\mathbf{w}}_k, \tilde{\mathbf{\Sigma}}_k^{-1})$, где

$$\hat{\mathbf{w}}_k = \left(\mathbf{\Sigma}_k + \frac{1}{\sigma_k^2}\mathbf{X}_k^T\mathbf{X}_k\right)^{-1}\left(\mathbf{\Sigma}_k\mathbf{v}_k + \frac{1}{\sigma_k^2}\mathbf{X}_k^T\mathbf{y}_k\right)$$

есть оценка максимума апостериорной вероятности, а

$$\tilde{\mathbf{\Sigma}}_k = \mathbf{\Sigma}_k + \frac{1}{\sigma_k^2}\mathbf{X}_k^T\mathbf{X}_k, \quad k = 1, 2$$

Тогда для $s_0$ для пары апостериорных распределений имеем:

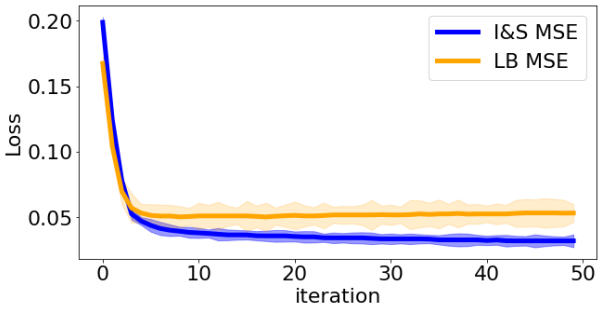
$$-2\log s_0 = (\hat{\mathbf{w}}_2 - \hat{\mathbf{w}}_1)^T\left(\left(\mathbf{\Sigma}_1 + \frac{1}{\sigma_1^2}\mathbf{X}_1^T\mathbf{X}_1\right)^{-1} + \left(\mathbf{\Sigma}_2 + \frac{1}{\sigma_2^2}\mathbf{X}_2^T\mathbf{X}_2\right)^{-1}\right)^{-1}(\hat{\mathbf{w}}_2 - \hat{\mathbf{w}}_1).$$

В [13] доказывается, что $-2\log s_0 \xrightarrow{d} \chi^2(n)$.

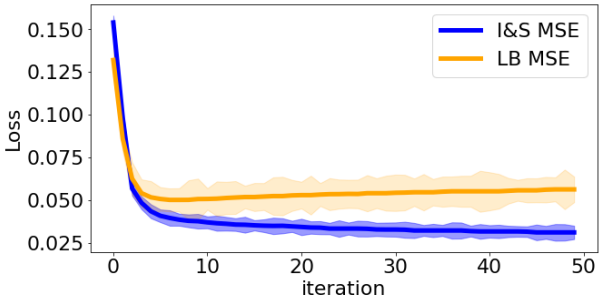
## 3.1 Вычислительный эксперимент для отзывов с сайта Amazon

Вычислительный эксперимент проводился на данных об отзывах о товарах с сайта Amazon. Домену соответствовала категория, и строилось векторное представление для каждого отзыва. Также каждому отзыву соответствует оценка, которую поставил пользователь. В качестве различных доменов были взяты категории "Industrial and Scientific"(I&S) и "Luxury Beauty"(LB)

Находились две функции преобразования домена LB в I&S по дивергенции Кульбака-Лейблера и по метрики Васерштейна. Вследствие двух теорем выше функция сходства Адуенко в вычислительном эксперименте не участвовала. Для каждой из построенных функций преобразования обучалась модель регрессии оценки пользователя.




(a)




(b)

Рис. 5: Среднеквадратическое отклонение предсказываемого значения от правильного ответа для (a) дивергенции Кульбака-Лейблера и (b) для расстояния Васерштейна, результаты весьма схожи.

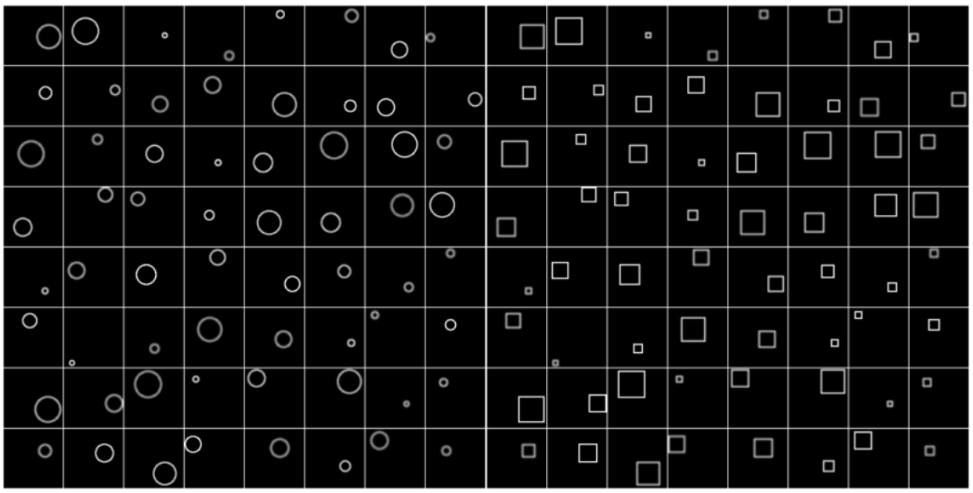
| | Дивергенция Кульбака-Лейблера | Расстояние Васерштейна |
|---|---|---|
| p-value | 0.1311 | 0.3412 |

Таблица 1: Статистическая проверка гипотезы о равенстве весов в задаче линейной регрессии на домене I&S и преобразованном домене LB для различных функций преобразования оптимальных относительно дивергенции Кульбака-Лейблера и расстояния Васерштейна соответственно.

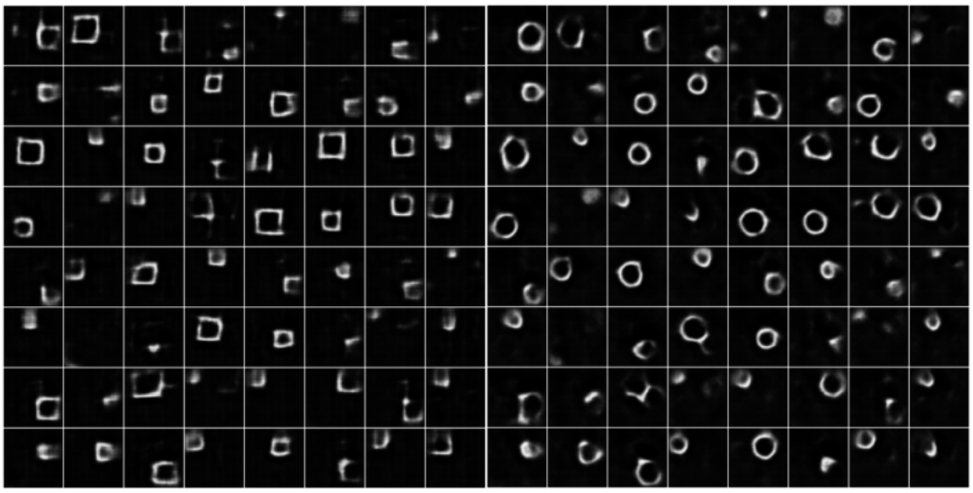
## 3.2 Вычислительный эксперимент для бинаризованных изображений фигур

Данный вычислительный эксперимент проводился на бинаризованных изображениях. Были взяты два домена — изображения с различными фигурами. Первому соответствовали квадраты, второму круги. Каждой фигуре можно задать в соответствие координаты центра фигуры и ее радиус.

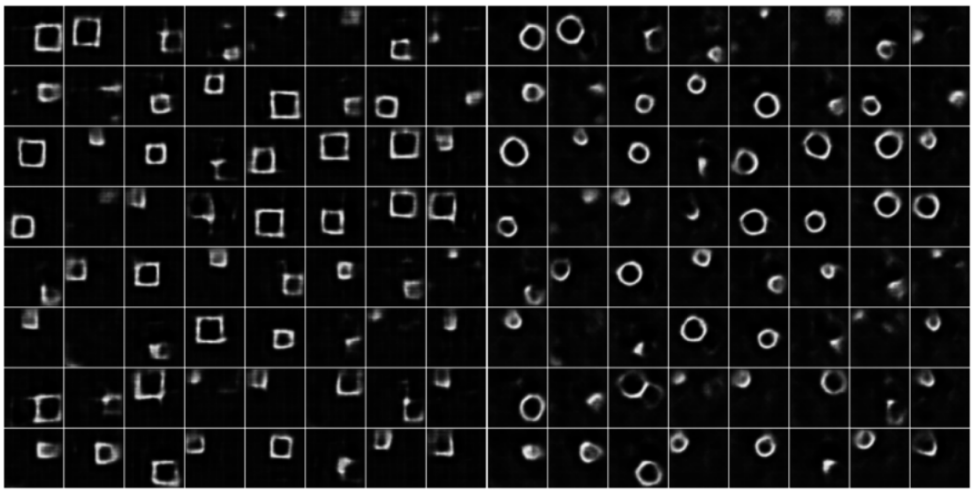
Как и раньше, находились функции преобразования доменов по дивергенции Кульбака-Лейблера и по метрики Васерштейна. Для каждой из построенных функций преобразования обучалась модель регрессии радиуса фигуры.



(a)

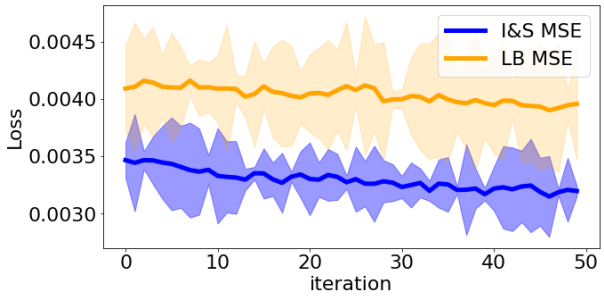


(b)

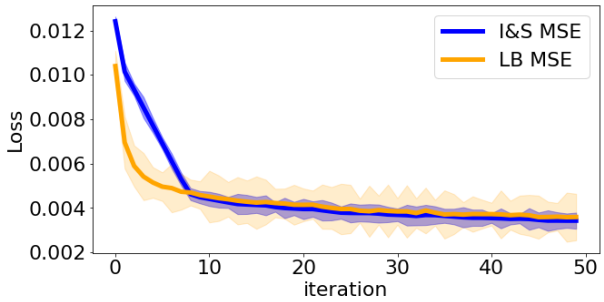


(c)

Рис. 6: (a) оригинальные изображения. Изображения преобразованные с помощью (b) дивергенции Кульбака-Лейблера или (c) расстояния Васерштейна. Важно отметить, что при применении функции преобразования фигура меняла форму, но не положение или размер.




(a)




(b)

Рис. 7: Среднеквадратическое отклонение предсказываемого значения от правильного ответа для (a) дивергенции Кульбака-Лейблера и (b) для расстояния Васерштейна.

| | Дивергенция Кульбака-Лейблера | Расстояние Васерштейна |
|---|---|---|
| p-value квадрат в круг | 0.1682 | 0.2994 |
| p-value круг в квадрат | 0.1778 | 0.2620 |

Таблица 2: Статистическая проверка гипотезы о равенстве весов в задаче линейной регрессии для бинаризованных картинок фигур.

# 4 Заключение

В работе предложен метод решения задачи доменной адаптации через оценку параметров функции преобразования домена. Теоретически доказано, что функция сходства предложенная Адуенко не является достаточным условием совпадения распределений. По этой причине она не может использоваться для оценки параметров функции преобразования. Также описан алгоритм нахождения функции преобразования, оптимальной относительно дивергенции Кульбака-Лейблера и расстояния Васерштейна.

В ходе вычислительного эксперимента подтверждена гипотеза о том, что функция преобразования сохраняет инвариантность на классах и значениях целевых переменных. Также было установлено, что расстояние Васерштейна позволяет строить более качественную функцию преобразования. Хотя достигаемое среднеквадратическое отклонение ведет себя одинаково, но второй тест, который заключается в статистической проверке равенства весов моделей линейной регрессии показывает преимущество использования расстояния Васерштейна.

# Список литературы


[1] *Akhil Mathur and Shaoduo Gan and Anton Isopoussu and Fahim Kawsar and Nadia Berthouze and Nicholas D. Lane*. Multi-Step Decentralized Domain Adaptation, 2020.

[2] *Roshni Sahoo and Divya Shanmugam and John V. Guttag* Unsupervised Domain Adaptation in the Absence of Source Data, 2020.

[3] *Jing Wang and Jiahong Chen and Jianzhe Lin and Leonid Sigal and Clarence W. de Silva* Discriminative Feature Alignment: Improving Transferability of Unsupervised Domain Adaptation by Gaussian-guided Latent Alignment, 2020.

[4] *Yaroslav Ganin and Evgeniya Ustinova and Hana Ajakan and Pascal Germain and Hugo Larochelle and François Laviolette and Mario Marchand and Victor Lempitsky*, Domain-Adversarial Training of Neural Networks, 2016.

[5] *Sicheng Zhao and Bo Li and Colorado Reed and Pengfei Xu and Kurt Keutzer*, Multi-source Domain Adaptation in the Deep Learning Era: A Systematic Survey, 2020.

[6] *Fuzhen Zhuang and Zhiyuan Qi and Keyu Duan and Dongbo Xi and Yongchun Zhu and Hengshu Zhu and Hui Xiong and Qing He*, A Comprehensive Survey on Transfer Learning, 2019.

[7] *Manuel Pérez-Carrasco and Guillermo Cabrera-Vives and Pavlos Protopapas and Nicolas Astorga and Marouan Belhaj*, Adversarial Variational Domain Adaptation, 2019.

[8] *Yaroslav Ganin and Evgeniya Ustinova and Hana Ajakan and Pascal Germain and Hugo Larochelle and François Laviolette and Mario Marchand and Victor Lempitsky*. Domain-Adversarial Training of Neural Networks, 2016

[9] *Eric Tzeng and Judy Hoffman and Kate Saenko and Trevor Darrell*. Adversarial Discriminative Domain Adaptation, 2017

[10] *Issam Laradji and Reza Babanezhad*. M-ADDA: Unsupervised Domain Adaptation with Deep Metric Learning, 2018

[11] *Kuniaki Saito and Kohei Watanabe and Yoshitaka Ushiku and Tatsuya Harada*. Maximum Classifier Discrepancy for Unsupervised Domain Adaptation, 2018

[12] *Rui Shu and Hung H. Bui and Hirokazu Narui and Stefano Ermon*. A DIRT-T Approach to Unsupervised Domain Adaptation, 2018

[13] *А.А. Адуенко*. Выбор мультимоделей в задачах классификации, 2017

[14] *Ian J. Goodfellow and Jean Pouget-Abadie and Mehdi Mirza and Bing Xu and David Warde-Farley and Sherjil Ozair and Aaron Courville and Yoshua Bengio*. Generative Adversarial Networks, 2014

[15] *C´edric Villani*. Optimal Transport: Old and New. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, Berlin, 2009.