NP- трудность евклидовой задачи о максимальном разрезе

А.А.Агеев, А.В.Кельманов, А.В.Пяткин

10-я Международная конференция
«Интеллектуализация обработки информации-2014»

Задача Max-Cut

- Дан полный реберно взвешенный граф $G=(V,E)$. Найти в нем разбиение $V=X\cup Y$, $X\cap Y=\varnothing$, с максимальным суммарным весом ребер, соединяющих X и Y.

- Задача Max-Cut (причем с весами ребер 0 и 1) является одной из первых известных NP-трудных задач (№21 в списке Карпа).

Задача Euclidean Max-Cut

- Пусть вершинами полного графа $G=(V,E)$ являются точки q-мерного евклидова пространства, а веса ребер равны евклидовой норме расстояний между его концами.
- Найти в G разбиение $V=X\cup Y$, $X\cap Y=\emptyset$, с максимальным суммарным весом ребер, соединяющих X и Y.

Задача Quadratic Euclidean Max-Cut

- Пусть вершинами полного графа $G=(V,E)$ являются точки q-мерного евклидова пространства, а веса ребер равны квадратам евклидовой нормы расстояний между его концами.
- Найти в G разбиение $V=X\cup Y$, $X\cap Y=\varnothing$, с максимальным суммарным весом ребер, соединяющих X и Y.

Связь с задачами кластеризации

- В задаче кластеризации требуется разбить множество данных (точек в R^q) на группы, состоящие из похожих элементов.
- Решение задачи Euclidean Max-Cut будет представлять собой два кластера, каждый из которых содержит элементы, наиболее непохожие на элементы другого кластера.

Известные результаты

- Задача Metric Max-Cut (в которой вершинами являются точки произвольного метрического пространства, а веса ребер равны расстояниям между ними) является NP-трудной в сильном смысле (F.De la Vega, C.Kenyon, 2001).

Известные результаты

- Проблема определения сложности задачи Euclidean Max-Cut упомянута как открытая в обзоре
- M.Bern, D.Eppstein. Approximation algorithms for geometric problems // Approximation algorithms for NP-hard problems. 1997.
- Сложность задачи Quadratic Euclidean Max-Cut ранее не изучалась.

Основные результаты

- Теорема 1. Задача Euclidean Max-Cut NP-трудна в сильном смысле. Более того, для нее не существует FPTAS.

- Теорема 2. Задача Quadratic Euclidean Max-Cut NP-трудна в сильном смысле. Более того, для нее не существует FPTAS.

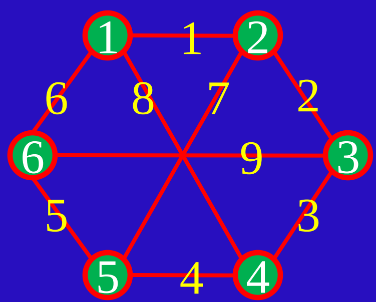
Идея доказательства

- Сведение известной NP-трудной задачи
- Minimum Bisection of cubic graph. Дан однородный граф $H=(V,E)$ степени 3. Найти в нем разбиение $V=X\cup Y$, $X\cap Y=\varnothing$, $|X|=|Y|$ с минимальным числом ребер, соединяющих X и Y.
- NP-полнота этой задачи доказана в 1987 году (T.N.Bui, S.Chaudhuri, F.T.Leighton, M.Sipser).

Идея доказательства

- По примеру графа H с $n=2k$ вершинами и m ребрами задачи Minimum Bisection of cubic graph строим матрицу A размера $n\times(m+n)$, состоящую из матрицы инциденций графа H размера $n\times m$ и диагональной матрицы размера $n\times n$ с диагональным элементом t, где $t=k$ для задачи Euclidean Max-Cut и $t=k^2$ для задачи Quadratic Euclidean Max-Cut

Идея доказательства



Граф H

t	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0
0	t	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0
0	0	t	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	t	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0
0	0	0	0	t	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	t	0	0	0	0	1	1	0	0	1

Матрица A

- Строки матрицы A рассматриваются как вершины графа G (точки пространства R^q, где $q=m+n$).

Идея доказательства

- Доказываются следующие факты:
- 1. Минимальные бисекции графа H соответствуют бисекциям максимального веса в графе G.
- 2. Вес любой бисекции графа G больше веса любого разреза с долями неравных размеров.
- Отсюда вытекает NP-полнота в сильном смысле.

Идея доказательства

- Отсутствие FPTAS для задачи Quadratic Euclidean Max-Cut вытекает из ее NP-трудности в сильном смысле и того факта, что целевая функция в сведении целочисленная.
- Отсутствие FPTAS для задачи Euclidean Max-Cut следует из сведения: доказывается, что существует такая константа $c>0$, что разность весов любых двух разрезов отличается по абсолютной величине не менее чем на c.

Открытая проблема

- Какова сложность задач Euclidean Max-Cut и Quadratic Euclidean Max-Cut при фиксированной размерности пространства?
- В случае $q=1$ задача Euclidean Max-Cut полиномиально разрешима (M.Karpinski et al, 2013).

Спасибо за внимание!