Уточнение экспертных оценок с помощью измеряемых данных

М. П. Кузнецов

Московский физико-технический институт
Факультет управления и прикладной математики
Кафедра интеллектуальных систем

Научный руководитель к.ф.-м.н., н.с. ВЦ РАН В. В. Стрижов

Москва,
2011 г.

План доклада

- Математическая постановка задачи
- Обзор существующих подходов к решению
- Постановка задачи в ранговых шкалах
- Решение с использованием конусов
- Решение с использованием монотонной интерполяции
- Вычислительный эксперимент

Определения

- Задана матрица описаний объектов: $X = \{x_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$,
  x_{ij} — значение j-го признака i-го объекта.
- **Интегральный индикатор** — это вектор $(y_1, \ldots, y_m)$, поставленный в соответствие набору из m объектов.
- Принята линейная модель

$$\mathbf{y} = X\mathbf{w},$$

$\mathbf{w}$ — вектор весов (значений важности) каждого признака.

Ранговые шкалы

Пусть экспертные оценки заданы в ранговой шкале.

- Ранее: $Y = \{0, 1, ..., s\}$ — ранговая шкала, $h_1, ..., h_s$ — разбиение действительной оси на $s+1$ интервал,

$$\begin{cases} \widehat{f}(x) < h_1 \Rightarrow \widehat{f}(x) = 0, \\ h_1 \leqslant \widehat{f}(x) < h_2 \Rightarrow \widehat{f}(x) = 1, \\ ... \\ h_s \leqslant \widehat{f}(x) \Rightarrow \widehat{f}(x) = s. \end{cases}$$

- Сейчас:

$$\begin{cases} y_1 \geqslant ... \geqslant y_m \geqslant 0, \\ w_1 \geqslant ... \geqslant w_n \geqslant 0. \end{cases}$$

Конусы оценок экспертов

Эти же оценки можно записать в виде:

$$\begin{cases} J_m\mathbf{y} \geqslant 0, \\ J_n\mathbf{w} \geqslant 0, \end{cases} \quad \text{где } J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Системы неравенств задают два конуса в пространстве интегральных индикаторов и в пространстве весов признаков:

$$\mathcal{Y} = \{\mathbf{y} \,|\, J_m\mathbf{y} \geqslant 0\},$$

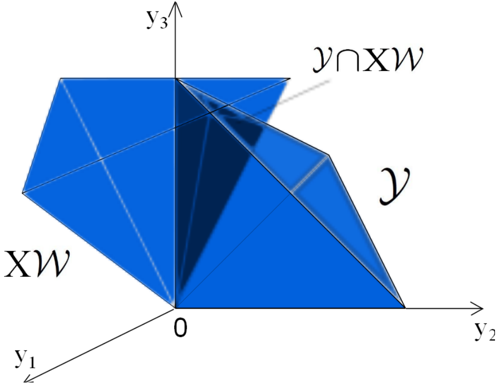
$$\mathcal{W} = \{\mathbf{w} \,|\, J_n\mathbf{w} \geqslant 0\}.$$

Геометрическое место точек, в которое отображение $X : \mathcal{W} \to \mathcal{Y}$ переводит конус, является конусом.

Непротиворечивые экспертные оценки

Экспертные оценки — непротиворечивые, если:

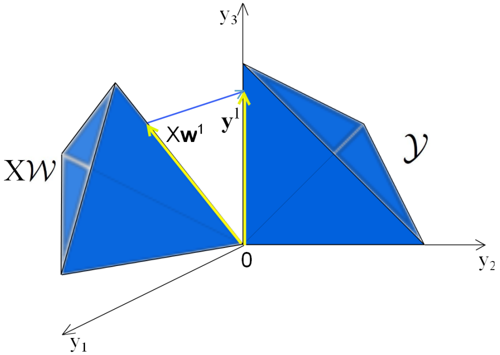
$$A\mathcal{W} \cap \mathcal{Y} \neq \emptyset.$$



Поиск ближайших векторов в конусах

Требуется найти векторы $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{w}_1$, такие, что

$$(\mathbf{y}^1, \mathbf{w}^1) = \min_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y},\ \mathbf{w}\in\mathcal{W}} \|\mathbf{y} - X\mathbf{w}\|, \text{ при } \|X\mathbf{w}\| = 1, \|\mathbf{y}\| = 1.$$



Корреляция Спирмена

Коэффицент корреляции Спирмена между векторами $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ — мера линейной связи между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

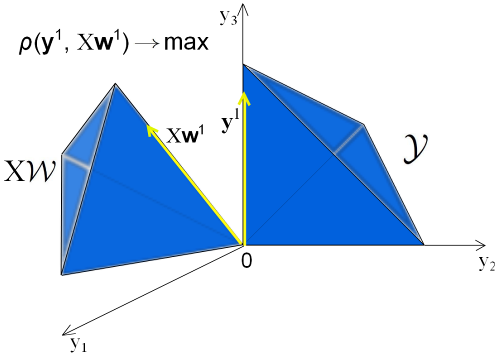
$$\rho(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1 - \frac{6}{m(m-1)(m+1)} \sum_{i=1}^{m} (R_i(\mathbf{a}) - S_i(\mathbf{b}))^2,$$

где $R_i(\mathbf{a})$ — i-й по порядку член в вариационном ряду $\mathbf{a}$, $S_i(\mathbf{b})$ — i-й по порядку член в вариационном ряду $\mathbf{b}$.

Максимум корреляции

Найти векторы $\mathbf{w}_1$ и $\mathbf{y}_1$, между которыми коэффициент корреляции Спирмена принимает наибольшее значение:

$$(\mathbf{y}^1, \mathbf{w}^1) = \max_{\mathbf{y}\in\mathcal{Y},\ \mathbf{w}\in\mathcal{W}} \rho(\mathbf{y}, X\mathbf{w}),\ \text{при}\ \|X\mathbf{w}\| = 1, \|\mathbf{y}\| = 1.$$



Алгоритм поиска наиболее коррелированных векторов

Итерационный алгоритм, последовательно находящий приближения векторов $w^{(2k)}, y^{(2k+1)}$ на четном и нечетном шаге.

Задача $2k$:		Задача $2k+1$:	
maximize	$\rho(\mathbf{y}, X\mathbf{w}^{(2k)})$,	maximize	$\rho(\mathbf{y}^{(2k+1)}, X\mathbf{w})$,
subject to	$\mathbf{y}^T\mathbf{y} = 1$,	subject to	$\mathbf{w}^T X^T X\mathbf{w} = 1$,
	$J_m\mathbf{y} \geqslant 0$.		$J_n\mathbf{w} \geqslant 0$.

Предлагается: монотонная интерполяция

Задача монотонной интерполяции:

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{w}} = \arg\min\limits_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n} \sum\limits_{j=1}^{n} (\widetilde{w}_j - w_j)^2, \\ w_1 \leqslant \ldots \leqslant w_n, \end{cases}$$

где $\widetilde{\mathbf{w}}$ — вектор весов, полученный действием псевдообратного отображения на $\mathbf{y}$:

$$\widetilde{\mathbf{w}} = X^+ y,$$

$$X^+ = (X^T X)^{-1} X^T \text{ — матрица Мура-Пенроуза.}$$

Предлагается: монотонная интерполяция

Введем регуляризатор λ,

$$\widehat{\mathbf{w}} = \arg\min_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(\widetilde{w}_j - w_j)^2 + \lambda \sum_{j=1}^{n-1}(w_j - w_{j+1})_+ \right),$$

- при $\lambda = 0$ вектор $\widehat{\mathbf{w}} = \widetilde{\mathbf{w}}$; мы доверяем экспертным оценкам объектов;
- при больших значениях λ мы получаем монотонную последовательность координат $\widehat{\mathbf{w}}$, то есть, доверяем экспертным оценкам весов признаков.

Схема решения задачи монотонной интерполяции

$$\widehat{\mathbf{w}} = \arg\min_{\mathbf{w}\in\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} (\widetilde{w}_j - w_j)^2 + \lambda \sum_{j=1}^{n-1} (w_j - w_{j+1})_+ \right),$$

- если $\widetilde{w}_{k+1} < \widetilde{w}_k$, необходимо выполнить условие $\widehat{w}_{k+1} = \widehat{w}_k$, для достаточно больших λ.

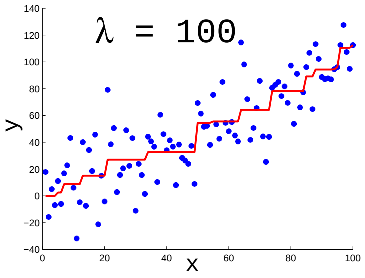
Решение задачи монотонной интерполяции

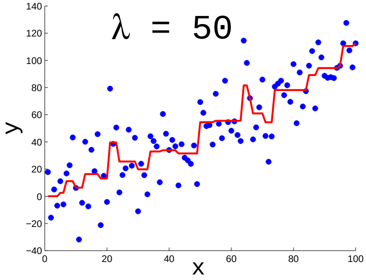
Вход: $\lambda = 0,\ K_\lambda = n,\ A_k = \{k\},\ \widehat{w}_{\lambda,A_k} = \widetilde{w}_k$ для $k = 1, \ldots, n,$

1. $D_k = \frac{1}{|A_k|}([\widehat{w}_{\lambda,A_{k-1}} - \widehat{w}_{\lambda,A_k} > 0] - [\widehat{w}_{\lambda,A_k} - \widehat{w}_{\lambda,A_{k+1}} > 0])$ — производные $\frac{d\widehat{w}_{\lambda,A_k}}{d\lambda}$.
2. $t_{k,k+1} = \frac{\widehat{w}_{\lambda,A_{k+1}} - \widehat{w}_{\lambda,A_k}}{D_k - D_{k+1}} + \lambda$, для всех $k = 1, .., K_\lambda - 1,$
3. $k' = \arg\min\limits_{k: t_{k,k+1} > \lambda} t_{k,k+1}$ — индекс множества, которое будет объединено с соседним. Если такого k' не существует, то выход.
4. $\widehat{\lambda} = t_{k',k'+1}$ — новое значение регуляризатора.
5. присвоить
$$\widehat{w}_{\widehat{\lambda},A_k} = \widehat{w}_{\lambda,A_k} + D_k(\widehat{\lambda} - \lambda)$$
для всех $k = 1, \ldots, K_\lambda,$
$A_{k'} = A_{k'} \cup A_{k'+1},\ K_\lambda = K_\lambda - 1,\ \lambda = \widehat{\lambda}.$

Пример работы алгоритма

Выборка: $y_i = x_i + \varepsilon_i$, $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 20)$



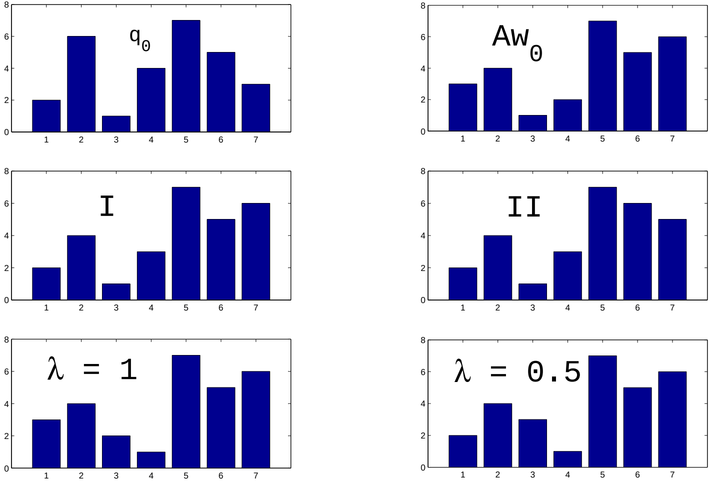


Вычислительный эксперимент

Используемые данные: хорватские электростанции. Матрица «объекты-признаки»:

N	Power Plant	Available net capacity (MW)	Electricity (GWh)	Heat (TJ)	SO_2 (t)	NO_x (t)	Particles (t)
1	Plomin 1 TPP	98	452	0	1950	1378	140
2	Plomin 2 TPP	192	1576	0	581	1434	60
3	Rijeka TPP	303	825	0	6392	1240	171
4	Sisak TPP	396	741	0	3592	1049	255
5	TE-TO Zagreb CHP	337	1374	481	2829	705	25
6	EL-TO Zagreb CHP	90	333	332	1259	900	19
7	TE-TO Osijek CHP	42	114	115	1062	320	35
	Optimal value	max	max	max	min	min	min

Уточненные экспертные оценки



Результаты

- обобщены ранее полученные результаты по согласованию экспертных оценок с использованием конусов
- предложено использовать алгоритм монотонной интерполяции для согласования экспертных оценок
- разработана программная система для получения согласованных экспертных оценок
- проведен вычислительный эксперимент