СПЕЦКУРС

Логический анализ данных в распознавании
(Logical data analysis in recognition)

лектор д.ф.-м.н. Елена Всеволодовна Дюкова

Спецкурс посвящён вопросам применения аппарата дискретной математики в задачах интеллектуального анализа данных. Излагаются общие принципы, лежащие в основе логического подхода к задачам машинного обучения. Описываются методы конструирования процедур классификации по прецедентам с использованием понятий теории булевых функций и теории покрытий булевых матриц. Рассматриваются основные модели логических процедур классификации, вопросы сложности их реализации и качества решения прикладных задач.

Спецкурс для бакалавров 2-4 курсов ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова.

По спецкурсу издано учебное пособие:
http://www.ccas.ru/frc/papers/djukova03mp.pdf

Лекция 5
Построение сокращенной ДНФ булевой функции, заданной КНФ. Построение сокращенной ДНФ для не всюду определенной булевой функции.

Рассматривается следующая задача.

Дана конъюнктивная нормальная форма (КНФ) вида

$$\boldsymbol{D_1} \& \dots \& \boldsymbol{D_u} \ (\boldsymbol{D_i} \ , \boldsymbol{i} \in \{\mathbf{1,2, \dots ,} \boldsymbol{u}\} \text{, − ЭД}) \qquad (*)$$

реализующая булеву функцию $\boldsymbol{F}$ от $\boldsymbol{n}$ переменных. Требуется построить сокращённую ДНФ функции $\boldsymbol{F}$.

Если каждая из дизъюнкций $\boldsymbol{D_1, \dots, D_u}$ содержит в точности $\boldsymbol{n}$ слагаемых, то КНФ (*) называют совершенной.

Известным фактом (см. лекцию 4) является

Утверждение 1. *Задание множества нулей функции* $\boldsymbol{F}$ *(множества* $\boldsymbol{N_{\overline{F}}}$*) равносильно заданию ее совершенной КНФ.*

- Через $\boldsymbol{D_c(F)}$ будем обозначать сокращенную ДНФ функции $\boldsymbol{F}$. Рассмотрим задачу построени $\boldsymbol{D_c(F)}$ в случае, когда $\boldsymbol{F}$ задана совершенной КНФ .

- Нам понадобятся приводимые ниже утверждения $2 - 5$.

- **Утверждение 2.** *ЭК* **B** *является допустимой для* **F** *тогда и только тогда, когда в* КНФ (*) *каждая дизъюнкция* $\boldsymbol{D_i}$, $\boldsymbol{i \in \{1,\ 2,\ ...,\ u\}}$, *содержит хотя бы один множитель из* **B** *вида* $\boldsymbol{x^\sigma}$.

- **Доказательство**. 1 Пусть $\boldsymbol{B}$ − допустимая конъюнкция для $\boldsymbol{F}$. Покажем, что каждая дизъюнкция $\boldsymbol{D_i}$, $\boldsymbol{i \in \{1,\ 2,\ ...,\ u\}}$, содержит хотя бы один множитель из $\boldsymbol{B}$.

- Предположим противное. Пусть некоторая дизъюнкция $\boldsymbol{D_i}$ не содержит ни одного множителя из $\boldsymbol{B}$. Не ограничивая общности можно считать, что $\boldsymbol{B = x_1^{\sigma_1} \& \ldots \& x_r^{\sigma_r}}$. Тогда $\boldsymbol{D_i}$ имеет вид

- $\boldsymbol{D_i = x_1^{\overline{\sigma}_1}} \vee \ \ldots \vee \boldsymbol{x_n^{\overline{\sigma}_r}} \vee \boldsymbol{x_{r+1}^{\sigma_{r+1}}} \vee \ \ldots \vee \boldsymbol{x_n^{\sigma_n}}$.

- Рассмотрим набор $\boldsymbol{\alpha} = (\boldsymbol{\sigma_1}, \dots, \boldsymbol{\sigma_r}, \boldsymbol{\bar{\sigma}_{r+1}}, \dots, \boldsymbol{\bar{\sigma}_n})$. По построению $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{N_B} \subseteq \boldsymbol{N_F}$. С другой стороны, набор $\boldsymbol{\alpha}$ обращает $\boldsymbol{D_i}$ в $\mathbf{0}$ и, следовательно, $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{N_{\bar{F}}}$. Противоречие.

- 2. Пусть каждая дизъюнкция $\boldsymbol{D_i}$, $\boldsymbol{i} \in \{\mathbf{1,2,\dots}, \boldsymbol{u}\}$, содержит некоторый множитель из $\boldsymbol{B}$. Тогда, очевидно, любой набор из $\boldsymbol{N_B}$ обращает КНФ $\boldsymbol{D_1} \,\&\, \dots \,\&\, \boldsymbol{D_u}$ в $\mathbf{1}$, т.е. принадлежит $\boldsymbol{N_F}$.

- Утверждение доказано

- Пусть $\boldsymbol{B}$ − ЭК. Очевидным является

- **Утверждение 3.** *Набор* $(\boldsymbol{\sigma_1}, \dots, \boldsymbol{\sigma_n})$, *принадлежит* $\boldsymbol{N_B} \cap \boldsymbol{N_{\bar{F}}}$ *тогда и только тогда, когда в КНФ* **(*)** *найдётся дизъюнкция вида* $\boldsymbol{x_1^{\bar{\sigma}_1}} \vee \dots \vee \boldsymbol{x_n^{\bar{\sigma}_n}}$ *и эта дизъюнкция не содержит переменные из* $\boldsymbol{B}$.

- Из утверждения 3 в частности следует, что мощность $\boldsymbol{N_B} \cap \boldsymbol{N_{\bar{F}}}$ равна числу дизъюнкций в КНФ (*), не содержащих переменных из $\boldsymbol{B}$.

- **Утверждение 4.** *ЭК* $\boldsymbol{B}$ *является неприводимой для* $\boldsymbol{F}$ *тогда и только тогда, когда для каждой переменной* $\boldsymbol{x^{\sigma}}$ *из* $\boldsymbol{B}$ *в КНФ* $\boldsymbol{D_1} \& \ldots \& \boldsymbol{D_u}$ *можно указать хотя бы одну дизъюнкцию, содержащую* $\boldsymbol{x^{\sigma}}$ *и не содержащую никакой другой переменной из* $\boldsymbol{B}$.

- Доказательство. 1. Пусть ЭК $\boldsymbol{B}$ является неприводимой для $\boldsymbol{F}$ и пусть утверждение не выполнено. Это означает, что в $\boldsymbol{B}$ можно указать переменную $\boldsymbol{x^{\sigma}}$ такую, что для каждой дизъюнкции $\boldsymbol{D_i}$ в исходной КНФ выполнено одно из двух следующих условий:

- 1) $\boldsymbol{D_i}$ не содержит $\mathbf{x^{\sigma}}$;

- 2) $\boldsymbol{D_i}$ содержит $\boldsymbol{x^{\sigma}}$ и $\boldsymbol{D_i}$ содержит некоторую другую переменную из $\boldsymbol{B}$.

- Удалим множитель x^{σ} из конъюнкции B. Получим ЭК B'. Обозначим через $M(B)$ множество дизъюнкций в исходной КНФ, не содержащих переменные из B, через $M(B')$ аналогичное множество для B'. Очевидно, $N_{B'} \supset N_B$ и $M(B') = M(B)$. Отсюда в силу утверждения 3 следует, что $N_{B'} \cap N_{\overline{F}} = N_B \cap N_{\overline{F}}$. Противоречие.

- 2. Пусть для $B = x_1^{\sigma_1} \& \dots \& x_r^{\sigma_r}$ выполнено условие утверждения. Покажем, что B неприводимая конъюнкция для F.

- Предположим противное. Тогда можно указать ЭК B' такую, что $N_{B'} \supset N_B$ и $N_{B'} \cap N_{\overline{F}} = N_B \cap N_{\overline{F}}$. ЭК B' получается из B удалением хотя бы одного множителя x^{σ}. В исходной КНФ есть дизъюнкция, содержащая x^{σ} и не содержащая ни одной другой переменной из B. Таким образом, $M(B') \supset M(B)$ и, значит, $N_{B'} \cap N_{\overline{F}} \neq N_B \cap N_{\overline{F}}$. Противоречие.

- Утверждение доказано.

- Из утверждений 2 и 3 сразу следует
- **Утверждение 5.** *ЭК* $\boldsymbol{B}$ *является максимальной для* $\boldsymbol{F}$ *тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия: 1) каждая дизъюнкция в КНФ* $\boldsymbol{D_1}\&\ldots\&\boldsymbol{D_u}$ *содержит хотя бы один множитель из* $\boldsymbol{B}$ *вида* $\boldsymbol{x^\sigma}$*; 2) для каждой переменной* $\boldsymbol{x^\sigma}$ *из* $\boldsymbol{B}$ *в КНФ* $\boldsymbol{D_1}\&\ldots\&\boldsymbol{D_u}$ *можно указать хотя бы одну дизъюнкцию, содержащую* $\boldsymbol{x^\sigma}$ *и не содержащую никакой другой переменной из* $\boldsymbol{B}$.

- Утверждения 2, 4 и 5 справедливы и в случае, когда КНФ имеет произвольный вид, т.е. не обязательно является совершенной. Эти утверждения являются соответственно критериями допустимости, неприводимости и максимальности ЭК для функции, заданной КНФ.

- Приведем описание наиболее известного алгоритма построения ДНФ $\boldsymbol{D_c(F)}$. Работа алгоритма (**алгоритма 1**) состоит из трех этапов.

- **Этап 1**. *Умножение логических скобок с использованием закона дистрибутивности.*
- **Этап 2**. *Упрощение полученной на этапе* 1 *ДНФ с использованием правил* $\boldsymbol{x\bar{x} = 0}$, $\boldsymbol{xx = x}$, $\boldsymbol{x \vee x = x}$ *(устранение повторяющихся конъюнкций и замена не элементарных конъюнкций на элементарные).*
- **Этап 3.** *Устранение элементарных поглощений с применением равенства* $\boldsymbol{x' \vee x'x'' = x'}$.
- Таким образом, сначала строятся все допустимые конъюнкции для **F** (этапы 1 и 2), а затем из построенного множества конъюнкций удаляются конъюнкции, не являющиеся неприводимыми (этап 3).
- Алгоритм 1 впервые описан для случая, когда ***F*** - монотонная булева функция в статье: *Чегис И.А., Яблонский С.В. Логические способы контроля электрических схем // Тр. МИАН СССР, М., 1958.* Он не эффективен, если число переменных велико (даже при относительно небольшом числе скобок ***u***). В случае, когда число скобок мало по сравнению с числом переменных ***n*** , более эффективным будет **алгоритм 2**, который основан на построении сначала неприводимых конъюнкций, а затем отбрасывании тех из них, которые не являются допустимыми.

- Дело в том, что в рассматриваемом случае при $\boldsymbol{n} \to \infty$ число максимальных конъюнкций почти всегда асимптотически равно числу неприводимых конъюнкций, а число допустимых конъюнкций почти всегда по порядку больше числа максимальных конъюнкций. Алгоритм 2 впервые описан работе: *Дюкова Е.В. Об асимптотически оптимальном алгоритме построения тупиковых тестов // ДАН СССР. 1977. 233. № 4. С. 527–530.*
- Рассмотрим теперь случай не всюду определенных (частичных) функций алгебры логики.
- Пусть функция $\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{x_1, \dots, x_n})$ задана на множестве $\boldsymbol{M_f} \subseteq \boldsymbol{E^n}$ и принимает значения **0** и **1**. Множество $\boldsymbol{M_f}$ разбивается на два подмножества $\boldsymbol{N_f}$ и $\boldsymbol{N_{\bar{f}}}$ $(\boldsymbol{N_f} \cap \boldsymbol{N_{\bar{f}}} = \emptyset)$, на которых функция $\boldsymbol{f}$ принимает соответственно значение **1** и **0**. На наборах из $\boldsymbol{E^n} \setminus \boldsymbol{M_f}$ функция $\boldsymbol{f}$ не определена.
- Таким образом, функция $\boldsymbol{f}$ определяется заданием пары непересекающихся подмножеств $\boldsymbol{N_f}$ и $\boldsymbol{N_{\bar{f}}}$.

- Будем говорить, что ДНФ $\boldsymbol{D}$ реализует частичную функцию $\boldsymbol{f}$, если $\boldsymbol{N_f} \subseteq \boldsymbol{N_D}$, $\boldsymbol{N_D} \cap \boldsymbol{N_{\bar{f}}} = \emptyset$.
- Данные в лекции 5 определения допустимой, почти допустимой, неприводимой и максимальной конъюнкции всюду определенной булевой функции полностью переносятся на случай частичной булевой функции.
- Для построения сокращенной ДНФ частичной булевой функции $\boldsymbol{f}$ обычно используется следующий прием. Строится сокращенная ДНФ $\boldsymbol{D_c(F)}$ всюду определенной булевой функции $\boldsymbol{F}$ такой, что $\boldsymbol{N_F} = \boldsymbol{E^n} \backslash \boldsymbol{N_{\bar{f}}}$. Затем из $\boldsymbol{D_c(F)}$ удаляются все конъюнкции $\boldsymbol{B}$ такие, что $\boldsymbol{N_B} \cap \boldsymbol{N_f} = \emptyset$.
- Альтернативный способ построения сокращенной ДНФ частичной булевой функции $\boldsymbol{f}$ основан на многократном решении задачи построения сокращенной ДНФ монотонной булевой функции.

- Действительно, пусть N_f $=\{\alpha_1, \dots, \alpha_\nu\}$, $N_{\bar f}$ $=\{\beta_1, \cdots, \beta_u\}$. Обозначим через $G(i)$, $i \in\{1, 2,\dots,\nu\}$, множество пар вида (α_i, β_j), где $j \in\{1,2,\dots, u\}$. Паре (α_i, β_j) из $G(i)$ поставим в соответствие ЭД $D_{ij} = x_{t_1} \vee \cdots \vee x_{t_q}$, где $t_1, \cdots, t_q$ - номера тех разрядов, в которых различаются наборы α_i и β_j. Набору α_i поставим в соответствие монотонную булеву функцию f_i, которая реализуется КНФ $D_{i1} \& \dots \& D_{iu}$. Имеет место
- **Утверждение 6**. *ЭК* $x_{j_1}^{\sigma_1} \dots x_{j_r}^{\sigma_r}$ *является максимальной для* f *тогда и только тогда, когда можно указать* i , $i \in\{1,2,\dots,\nu\}$, *такое, что конъюнкция* $x_{j_1} \& \dots \& x_{j_r}$ *является максимальной для* f_i *и при* $t \in\{1, 2, \dots, r\}$ *координата с номером* j_t *набора* α_i *равна* σ_t.
- Таким образом, первый способ построения сокращённой ДНФ функции f основан на преобразовании совершенной КНФ в сокращенную ДНФ. Во втором в качестве исходных рассматривается ряд КНФ, не содержащих отрицаний переменных и не являющихся совершенными.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать утверждения 2, 4 и 5 для случая, когда булева функция $\boldsymbol{F}$ задана произвольной КНФ.

2. Доказать утверждение 6.