«Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Кафедра «Интеллектуальные системы»

Садиев Абдурахмон Абдужалолович

# Стохастические безградиентные методы для седловых задач

03.03.01 – Прикладные математика и физика

Выпускная квалификационная работа бакалавра

**Научный руководитель:**
д. ф.-м. н. Гасников Александр Владимирович

Москва
2020

# Оглавление

## Аннотация

В данной работе обобщается подход Гасникова и др., 2017, позволяющий решать (стохастические) выпуклые оптимизационные задачи с неточным оракулом без градиента, к выпукло-вогнутой седловой задаче. Предложенный подход работает, по крайней мере, как и лучшие существующие подходы. Но для специальной установки (ограничения симплексного типа и близость констант Липшица в нормах 1 и 2) данный подход уменьшает $n/\log^2 n$ в два раза от требуемого количества вызовов оракула (вычислений функций). Предложенный метод использует стохастическую аппроксимацию градиента через конечные разности. В работе приведен вычислительный эксперимент для матричной игры, сопоставляющий работу предложенного алгоритма с градиентным аналогом.



**Ключевые слова**: *безгардиентные методы оптимизации, седловая задача, стохастическая оптимизация.*

## 1. Введение

В последнее десятилетие в сообществе машинного обучения большой интерес вызывают различные приложения генеративно-состязательная сетей (Generative Adversarial Networks, GANs) [1], которые сводят проблему машинного обучения к задаче нахождения седловой точки, а также применение безградиентных методов для решения проблем обучения в целях укрепления потенциала [2]. Нейронные сети становятся довольно популярными в задачах обучения с подкреплением ( Reinforcement Learning) [3]. Таким образом, существует интерес к безградиентным методам для решения седловой задачи:

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \max_{y\in\mathcal{Y}} \varphi(x, y). \tag{1}$$

Одним из естественных подходов для этого класса задач является построение стохастической аппроксимации градиента через конечные разности. В этом случае естественно ожидать, что сложность задачи (1) с точки зрения количества вычислений функций составляет $\sim n$ раз больше по сравнению со сложностью с точки зрения количества вычислений градиентов, где $n = \dim\mathcal{X} + \dim\mathcal{Y}$. Возможно ли получить лучший результат? В данной работе показано, что этот фактор в некоторой ситуации можно уменьшить до гораздо меньшего фактора $\log n$.

В данной работе используется методика, разработанная в [4, 5] для безградиентных задач оптимизации гладких выпуклых функций (безградиентная версия зеркального спуска [6]), чтобы предложить новую версию безградиентного варианта зеркального спуска [6] для задач оптимизации негладких седловых задач (оптимизируемая целевая функция является выпуклой по одной группе переменных и вогнутой по другой и не является гладкой).

Концепция использования такого оракула с конечными разностями не нова (см. [7], [8]). Для такого оракула необходимо, чтобы функция была определена в некоторой окрестности исходного множества оптимизации, так как при вычислении конечного разности мы делаем небольшой шаг от точки, и этот шаг может вывести нас за пределы множества. Насколько нам известно, во всех предыдущих работах авторы исходили из того, что такое предположение выполнено или вообще не упоминается.

### 1.1. Обзор полученных результатов

В данной работе представлен новый метод, так называемый zeroth-order Saddle-Point Algorithm (`zoSPA`), для решения седловой задчи (1). Наш алгоритм использует оракул нулевого порядка со стохастическим и ограниченным детерминистическим шумом. Показано, что если шум $\sim \varepsilon$ (точность решения), то количество итераций, необходимых для получения решения точностью $\varepsilon$ на множестве с диаметром $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ равно $\mathcal{O}\left(\frac{M^2\Omega^2}{\varepsilon^2}n\right)$ или $\mathcal{O}\left(\frac{M^2\Omega^2}{\varepsilon^2}\log^2 n\right)$ (зависит от набора оптимизации, например, для симплекса (в этом случае просранство, на котротом решается задача, имеет 1-норму, а сопряженное к нему $\infty$-норму ), второй вариант с $\log^2 n$), где $M^2$ - это граница второго момента градиента вместе со стохастическим шумом (см. ниже, (4)).

Далее будет показано, как предложенный новый алгоритм работает на практике для различных седловых задач в сравнении с полноградиентным зеркальным спуском.

## 2. Алгоритмы и основные результаты

В данном разделе будут представлены алгоритм 1 и основная теорема об оценках сходимоти предложенного метода 1. Доказательство можно найти в статье [9]. Для удобства доказательство будет представлено в 3.3.

### 2.1. Обозначения и вспомогательные факты

Будем обозначать $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ как скалярное произведение между векторами $x, y \in \mathbb{R}^n$, где $x_i$ есть $i$-ая компонента вектора $x$ в стандартном базисе в $\mathbb{R}^n$. Тогда мы получаем определение $\ell_2$-нормы в $\mathbb{R}^n$ следующим образом: $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Определим $\ell_p$-нормы как $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}$ для $p \in (1, \infty)$, а для $p = \infty$ будем использовать следующее выражение $\|x\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$. Двойственная норма $\|\cdot\|_*$ для нормы $\|\cdot\|$ определятеся таким образом: $\|y\|_* = \max\left\{\langle x, y\rangle \|x\| \le 1\right\}$. Оператор $\mathbb{E}[\cdot]$ есть полное математическое ожидание, а оператор $\mathbb{E}_\xi[\cdot]$ выражает условное математическое ожидание.

**Определение 1** ($M$-липшицево непрерывность) *Функция $f(x)$ является $M$-липшицево непрерывной на $X \subseteq \mathbb{R}^n$ с константой $M > 0$ по отношению к норме$\|\cdot\|$, когда*

$$|f(x) - f(y)| \le M\|x - y\|, \quad \forall\ x, y \in X.$$

**Определение 2** (Прокс-функция) *Функция $d(z) : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ называется прокс-функцией, если $d(z)$ является 1-сильно выпуклой по отношению к $\|\cdot\|$-норме и дифференцируемой на $\mathcal{Z}$ функцией .*

**Определение 3** (Дивергенция Брегмана (расстояние Брегмана)) *Пусть $d(z) : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ есть прокс-функция. Для любой пары точек $z, w \in \mathcal{Z}$ мы определим дивергенцию Брегмана $V_z(w)$, определенная $d(z)$, как:*

$$V_z(w) = d(z) - d(w) - \langle \nabla d(w), z - w \rangle.$$

Обозначим диаметром Брегмана $\Omega_{\mathcal{Z}}$ множества $\mathcal{Z}$ по отношению к $V_{z_1}(z_2)$ как $\Omega_{\mathcal{Z}} = \max\{\sqrt{2V_{z_1}(z_2)} z_1, z_2 \in \mathcal{Z}\}$.

**Определение 4** (Прокс-оператор) *Пусть $V_z(w)$ - дивергенция Брегмана. Для любого $x \in \mathcal{Z}$ определим прокс-опреатор от $\xi$:*

$$\mathrm{prox}_x(\xi) = \arg\min_{y \in \mathcal{Z}} \left( V_x(y) + \langle \xi, y \rangle \right).$$

### 2.2. Негладкая седловая задача

Поставим задачу (1) более формально: мы рассматриваем седловую задачу (1), где $\varphi(\cdot, y)$ - выпуклая функция, определенная на компактном выпуклом множестве $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^{n_x}$, $\varphi(x, \cdot)$ - вогнутая функция, определенная на компактном выпуклом множестве $\mathcal{Y}. \subset \mathbb{R}^{n_y}$.

Определим неточный стохастический оракул нулевого порядка $\widetilde{\varphi}(x, y, \xi)$ на каждой итерации. Модель, используемая в данной работе, соответствует случаю, когда оракул дает неточное шумное значение функции. У модели есть два вида шума: стохастический несмещенный шум, зависящий от случайной переменной $\xi$ и смещенный детерминистический шум. Это можно записать следующим образом:

$$\tilde{\varphi}(x, y, \xi) = \varphi(x, y, \xi) + \delta(x, y), \tag{2}$$

$$. \quad \mathbb{E}_\xi[\widetilde{\varphi}(x, y, \xi)] = \widetilde{\varphi}(x, y), \quad \mathbb{E}_\xi[\varphi(x, y, \xi)] = \varphi(x, y), \tag{3}$$

где случайная переменная $\xi$ отвечает за несмещенный стохастический шум, а $\delta(x, y)$ – за детерминистический шум.

Предположим, что существует такая положительная постоянная $M$, что для всех $x, y \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ у нас есть

$$\|\nabla \varphi(x, y, \xi)\|_2 \leq M(\xi), \quad \mathbb{E}[M^2(\xi)] = M^2. \tag{4}$$

Можно доказать, что $\varphi(x, y, \xi)$ является $M(\xi)$-липшецево непрерывной по отношению к норме $\|\cdot\|_2$ и что $\|\nabla \varphi(x, y)\|_2 \leq M$. А также удовлетворены следующие предположения:

$$|\widetilde{\varphi}(x, y, \xi) - \varphi(x, y, \xi)| = |\delta(x, y)| \leq \Delta. \tag{5}$$

Для удобства обозначим $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$, тогда $z \in \mathcal{Z}$ означает $z = (x, y)$, где $x \in \mathcal{X}$, $y \in \mathcal{Y}$. Когда мы используем $\varphi(z)$, мы имеем в виду $\varphi(z) = \varphi(x, y)$, и $\varphi(z, \xi) = \varphi(x, y, \xi)$.

Для $\mathbf{e} \in \mathcal{RS}_2^n(1)$ и некоторой константы $\tau$ пусть $\tilde{\varphi}(z+\tau\mathbf{e}, \xi) = \tilde{\varphi}(x+\tau\mathbf{e}_x, y+\tau\mathbf{e}_y, \xi)$, где $\mathbf{e}_x$ - первая часть размерности $n_x = \dim(x)$, а $\mathbf{e}_y$ - вторая часть размерности $n_y = \dim(y)$. И $n = n_x + n_y$. Затем определяем оценку градиента через разность функций (безградиентная аппроксимация):

$$g(z, \xi, \mathbf{e}) = \frac{n}{2\tau} \left(\tilde{\varphi}(z + \tau\mathbf{e}, \xi) - \tilde{\varphi}(z - \tau\mathbf{e}, \xi)\right) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ -\mathbf{e}_y \end{pmatrix}. \tag{6}$$

$g(z, \xi, \mathbf{e})$ - блочный вектор, состоящий из двух векторов.

Далее определим важный объект для дальнейшего обсуждения - сглаженный вариант функции $\varphi$ (см. [10], [7]).

**Определение 5.** *Пусть функция $\hat{\varphi}(x, y) = \hat{\varphi}(z)$ определена на множестве $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ и удовлетворяет:*

$$\hat{\varphi}(z) = \mathbb{E}_{\mathbf{e}}\left[\varphi(z + \tau\mathbf{e})\right]. \tag{7}$$

Обратите внимание, что мы вводим сглаженную версию функции только для доказательства; в алгоритме мы используем только оракул нулевого порядка (6).

### 2.3. Алгоритм и основная теорема

Теперь представим новый аглоритм в терминах, введенных выше:

**Algorithm 1** Zeroth-Order Saddle-Point Algorithm (`zoSPA`)

**Вход:** Максимальное число итераций $N$.

Пусть $z_1 = \operatorname*{argmin}_{z \in \mathcal{Z}} d(z)$.

**for** $k = 1, 2, \ldots, N$ **do**

1. Сэмплируем $\mathbf{e}_k$, $\xi_k$ независимо.
2. Инициализируем $\gamma_k$.
3. $z_{k+1} = \operatorname{prox}_{z_k}(\gamma_k g(z_k, \xi_k, \mathbf{e}_k))$.

**end for**

**Выход:** $\bar{z}_N$.

где

$$\bar{z}_N = \frac{1}{\Gamma_N}\left(\sum_{k=1}^{N} \gamma_k z_k\right), \quad \Gamma_N = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k. \tag{8}$$

Проанализируем сходимость данного алгоритма 1. Для этого необходимо привести вспомогательные леммы. Обратите внимание, что мы работаем только с нормами $\|\cdot\|_p$, где $p$ от 1 до 2 ($q$ от 2 до $\infty$). В остальных частях работы, включая основные теоремы, мы предполагаем, что $p$ - это от 1 до 2.

**Лемма 1** (см. Лемма 2 от [11]) . *Для $g(z, \xi, \mathbf{e})$, определенного в (6), выполнены следующие условия:*

$$\mathbb{E}\left[\|g(z, \xi, \mathbf{e})\|_q^2\right] \le 2\left(cnM^2 + \frac{n^2\Delta^2}{\tau^2}\right) a_q^2, \tag{9}$$

*где $c$ - некоторая положительная константа (независящая от $n$), а $a_q$ определяется по $\sqrt{\mathbb{E}[\|e\|_q^4]} \le a_q^2$, и следующее утверждение истинно.*

$$a_q^2 = \min\{2q - 1, 32\log n - 8\} n^{\frac{2}{q} - 1}, \quad \forall n \ge 3. \tag{10}$$

Доказательство будет представлено в разделе 3.1.

Стоит отметить, что в случае с $p = 2, q = 2$ у нас $a_q = 1$, это следует не из (10), а из самой простой оценки. А с (10) мы получаем это с $p = 1, q = \infty$ – $a_q = \mathcal{O}({}^{\log n}/{}_{n})$ (см. также Лемма 4 с [7]).

**Лемма 2** (см. Лемма 8 с [7]) . *Пусть $\mathbf{e}$ будет оиз $\mathcal{RS}_2^n(1)$. Тогда функция $\hat{\varphi}(z, \xi)$ выпукло-вогнутая и удовлетворяет :*

$$\sup_{z \in \mathcal{Z}} |\hat{\varphi}(z) - \varphi(z)| \le \tau M + \Delta. \tag{11}$$

**Доказательство:** Используя определение (7) функции $\hat{\varphi}$:

$$\begin{aligned}\left|\hat{\varphi}(z) - \varphi(z)\right| &= \left|\mathbb{E}_{\mathbf{e}}[\varphi(z+\tau\mathbf{e})] - \varphi(z)\right| \\ &= \left|\mathbb{E}_{\mathbf{e}}\left[\varphi(z+\tau\mathbf{e}) - \varphi(z)\right]\right|.\end{aligned}$$

Поскольку $\|\nabla\varphi(z)\|_2 \leq M$, тогда $\varphi(z)$ является $M$-липшицево непрерывной:

$$\left|\mathbb{E}_{\mathbf{e}}\left[\varphi(z+\tau\mathbf{e}) - \varphi(z)\right]\right| \leq \left|\mathbb{E}_{\mathbf{e}}\left[M\|\tau\mathbf{e}\|_2\right]\right| \leq M\tau.$$

□

**Лемма 3** (см. Лемма 5.3.2 [6]) *Определим* $\Delta_k = g(z_k, \xi_k, \mathbf{e}_k) - \tilde{\nabla}\hat{\varphi}(z_k)$. *Пусть* $D(u) = \sum_{k=1}^N \gamma_k \langle \Delta_k, u - z_k\rangle$. *Тогда мы имеем*

$$\mathbb{E}\left[\max_{u\in\mathcal{Z}} D(u)\right] \leq \Omega^2 + \frac{\Delta\Omega n a_q}{\tau}\sum_{k=1}^N \gamma_k + M_{all}^2 \sum_{k=1}^N \gamma_k^2, \tag{12}$$

*где* $M_{all}^2 = 2\left(cnM^2 + \frac{n^2\Delta^2}{\tau^2}\right)a_q^2$, $a_q$ *из Леммы 1.*

Доказательство Леммы 3 будет приведено в разделе 3.2

**Лемма 4** (Лемма 10 с [7] и Лемма 2 из [11]) *Мы имеем*

$$\tilde{\nabla}\hat{\varphi}(z) = \mathbb{E}_{\mathbf{e}}\left[\frac{n}{2\tau}\left(\varphi(z+\tau\mathbf{e}) - \varphi(z-\tau\mathbf{e})\right)\begin{pmatrix}\mathbf{e}_x \\ -\mathbf{e}_y\end{pmatrix}\right], \tag{13}$$

$$\|\mathbb{E}_{\mathbf{e}}[g(z,\mathbf{e})] - \tilde{\nabla}\hat{\varphi}(z)\|_q \leq \frac{\Delta n a_q}{\tau}, \tag{14}$$

*где*

$$g(z,\mathbf{e}) = \mathbb{E}_\xi\left[g(z,\xi,\mathbf{e})\right] = \frac{n}{2\tau}\left(\tilde{\varphi}(z+\tau\mathbf{e}) - \tilde{\varphi}(z-\tau\mathbf{e})\right)\begin{pmatrix}\mathbf{e}_x \\ -\mathbf{e}_y\end{pmatrix}.$$

*Причем под этим обозначением* $\tilde{\nabla}\hat{\varphi}(z)$ *мы имеем в виду блок (вектор), состоящий из двух векторов* $\nabla_x\hat{\varphi}(x,y)$ *и* $-\nabla_y\hat{\varphi}(x,y)$.

**Доказательство:** Доказтельство (13) следует из [7] и теоремы Стокса. Тогда

$$\mathbb{E}_{\mathbf{e}}[g(z,\mathbf{e})] - \tilde{\nabla}\hat{\varphi}(z) = \mathbb{E}_{\mathbf{e}}\left[\frac{n}{2\tau}\left(\delta(z+\tau\mathbf{e}) - \delta(z-\tau\mathbf{e})\right)\begin{pmatrix}\mathbf{e}_x \\ -\mathbf{e}_y\end{pmatrix}\right].$$

Используя (5) и определение $a_q$ из Леммы 1, мы завершаем доказательство.

$\square$

Мы готовы сформулировать главную теорему. Её доказательство будет приведено в 3.3.

**Теорема 1.** *Пусть задача* (1) *с функцией* $\varphi(x,y)$ *будет решена Алгоритмом 1 с оракулом* $g(z_k,\xi_k,\mathbf{e}_k)$ *из* (6). *Положим, что функция* $\varphi(x,y)$ *и её неточная модификация* $\widetilde{\varphi}(x,y)$ *удовлетворяют условиям* (3), (4), (5). *Обозначим за* $N$ *число итераций. Пусть шаг Алгоритма 1* $\gamma_k = \frac{\Omega}{M_{all}\sqrt{N}}$. *Тогда скорость сходимости Алгоритма 1:*

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon_{sad}(\bar{z}_N)\right] \;\; \leq \;\; \frac{3M_{all}\Omega}{\sqrt{N}} + \frac{\Delta\Omega n a_q}{\tau} + 2\tau M,$$

*где* $\bar{z}_N$ *определено в* (8), $\Omega$ *есть диаметр множества* $\mathcal{Z}$, $M_{all}^2 = 2\left(cnM^2 + \frac{n^2\Delta^2}{\tau^2}\right)a_q^2$ *и*

$$\varepsilon_{sad}(\bar{z}_N) = \max_{y'\in\mathcal{Y}}\varphi(\bar{x}_N, y') - \min_{x'\in\mathcal{X}}\varphi(x', \bar{y}_N), \tag{15}$$

$\bar{x}_N$, $\bar{y}_N$ *определяются так же, как и* $\bar{z}_N$ *в* (8).

### 2.4. Вспомагательные леммы

**Лемма 5** (см. неравенство 5.3.18 с [6]) . *Пусть* $d(z) : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ *- прокс-функция, и* $V_z(w)$ *определена как дивергенция Брегмана, определенное* $d(z)$. *Тогда имеет место следующее уравнение для* $x, y, u \in X$*:*

$$\langle \nabla d(x) - \nabla d(y), u - x\rangle = V_y(u) - V_x(u) - V_y(x). \tag{16}$$

**Лемма 6** (Факт 5.3.2 от [6]) *Зададим норму* $\|\cdot\|$ *на пространстве* $\mathcal{Z}$ *и прокс-функцию* $d(z)$, *пусть* $z \in \mathcal{Z}$, $w \in \mathbb{R}^n$ *и* $z_+ = prox_z(w)$. *Тогда для всех* $u \in \mathcal{Z}$.

$$\langle w, z_+ - u\rangle \leqslant V_z(u) - V_{z_+}(u) - V_z(z_+). \tag{17}$$

**Лемма 7.** *Для произвольного целого* $n \geq 1$ *и произвольного множества положительных чисел* $a_1, \ldots, a_n$ *мы имеем*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^2 \leq m\sum_{i=1}^{m} a_i^2. \tag{18}$$

**Лемма 8** (Лемма 9 от [7]) *Для любой функции $g$, которая является $L$-липшицево непрерывной по отношению к $\ell_2$-норме, и если $e$ равномерно распределен на евклидовой единичной сфере, выполнено:*

$$\sqrt{\mathbb{E}[(g(e) - \mathbb{E}g(e))^4]} \leq c\frac{L^2}{n}$$

*для какой-то числовой константы $c$. Можно отметить, что $c \leq 3$.*

Теперь проведем анализ основного результата:

**Следствие 1.** *При допущениях Теоремы 1 пусть $\varepsilon$ будет точность решения задачи (1), полученная с помощью алгоритма 1. Предположим, что*

$$\tau = \Theta\left(\frac{\varepsilon}{M}\right), \quad \Delta = \mathcal{O}\left(\frac{\varepsilon^2}{M\Omega n a_q}\right), \tag{19}$$

*тогда количество итераций $N$ для нахождения $\varepsilon$-решения*

$$N = \mathcal{O}\left(\frac{\Omega^2 M^2 n^{2/q}}{\varepsilon^2} C^2(n,q)\right),$$

*где $C(n,q) \overset{def}{=} \min\{2q-1, 32\log n - 8\}$.*

**Доказательство:** Из условий следствия мы имеем:

$$M_{all}^2 = \Theta(nM^2a_q^2) = \Theta(n^{2/q}M^2C(n,q)).$$

Это сразу же дает нам утверждение следствия.

$\square$

Рассмотрим отдельно случаи с $p = 1$ и $p = 2$.

| $p$, $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ | $q$, $(2 \leqslant q \leqslant \infty)$ | $N$, Количесво итераций |
|---|---|---|
| $p = 2$ | $q = 2$ | $\mathcal{O}\left(\frac{\Omega^2 M^2}{\varepsilon^2} n\right)$ |
| $p = 1$ | $q = \infty$ | $\mathcal{O}\left(\frac{\Omega^2 M^2}{\varepsilon^2} \log^2(n)\right)$ |

Таблица 1. Сводка оценок сходимости для негладкого случая: $p = 2$ и $p = 1$.

Отметим, что в случае с $p = 2$ количество итераций увеличивается в $n$ раз по сравнению с [6], а в случае с $p = 1$ – только $\log^2 n$ раз.

## 3. Доказательство основного результата

В данном разделе сначала приведены доказательства для основных вспомогательных лемм 1,3, после представлено доказательство основной теоремы 1.

### 3.1. Доказательство Леммы 1

**Доказательство:** Рассмотрим следующую цепочку неравенств, где мы используем простой факт (18):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|g(z,\xi,\mathbf{e})\|_q^2\right] &= \mathbb{E}\left[\left\|\frac{n}{2\tau}\left(\widetilde{\varphi}(z+\tau\mathbf{e},\xi)-\widetilde{\varphi}(z-\tau\mathbf{e},\xi)\right)\mathbf{e}\right\|_q^2\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\left\|\frac{n}{2\tau}\left(\varphi(z+\tau\mathbf{e},\xi)+\delta(z+\tau\mathbf{e})-\varphi(z-\tau\mathbf{e},\xi)-\delta(z-\tau\mathbf{e})\right)\mathbf{e}\right\|_q^2\right] \\
&\le \frac{n^2}{2\tau^2}\mathbb{E}\left[\|(\varphi(z+\tau\mathbf{e},\xi)-\varphi(z-\tau\mathbf{e},\xi))\,\mathbf{e}\|_q^2\right] \\
&\quad+\frac{n^2}{2\tau^2}\mathbb{E}\left[\|(\delta(z+\tau\mathbf{e})-\delta(z-\tau\mathbf{e}))\,\mathbf{e}\|_q^2\right] \\
&\le \frac{n^2}{2\tau^2}\mathbb{E}\left[(\varphi(z+\tau\mathbf{e},\xi)-\varphi(z-\tau\mathbf{e},\xi))^2\,\|\mathbf{e}\|_q^2\right] \\
&\quad+\frac{n^2}{\tau^2}\mathbb{E}\left[\left(\delta^2(z+\tau\mathbf{e})+\delta^2(z-\tau\mathbf{e})\right)\|\mathbf{e}\|_q^2\right]
\end{aligned}$$

По независимости $\xi$,$\mathbf{e}$ и снова (18) мы имеем:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|g(z,\xi,\mathbf{e})\|_q^2\right] &\le \frac{n^2}{2\tau^2}\mathbb{E}_\xi\left[\mathbb{E}_\mathbf{e}\left[(\varphi(z+\tau\mathbf{e},\xi)-\alpha-\varphi(z-\tau\mathbf{e},\xi)+\alpha)^2\,\|\mathbf{e}\|_q^2\right]\right] \\
&\quad+\frac{n^2}{\tau^2}\mathbb{E}\left[\left(\delta^2(z+\tau\mathbf{e})+\delta^2(z-\tau\mathbf{e})\right)\|\mathbf{e}\|_q^2\right] \\
&\le \frac{n^2}{\tau^2}\mathbb{E}_\xi\left[\mathbb{E}_\mathbf{e}\left[\left((\varphi(z+\tau\mathbf{e},\xi)-\alpha)^2+(\varphi(z-\tau\mathbf{e},\xi)-\alpha)^2\right)\|\mathbf{e}\|_q^2\right]\right] \\
&\quad+\frac{n^2}{\tau^2}\mathbb{E}\left[\left(\delta^2(z+\tau\mathbf{e})+\delta^2(z-\tau\mathbf{e})\right)\|\mathbf{e}\|_q^2\right]
\end{aligned}$$

С учетом симметричного распределения неравенства $\mathbf{e}$ и неравенства Коши-Шварца:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|g(z,\xi,\mathbf{e})\|_q^2\right] &\le \frac{2n^2}{\tau^2}\mathbb{E}_\xi\left[\mathbb{E}_\mathbf{e}\left[(\varphi(z+\tau\mathbf{e},\xi)-\alpha)^2\,\|\mathbf{e}\|_q^2\right]\right] \\
&\quad+\frac{n^2}{\tau^2}\mathbb{E}\left[\left(\delta^2(z+\tau\mathbf{e})+\delta^2(z-\tau\mathbf{e})\right)\|\mathbf{e}\|_q^2\right] \\
&\le \frac{2n^2}{\tau^2}\mathbb{E}_\xi\left[\sqrt{\mathbb{E}_\mathbf{e}\left[(\varphi(z+\tau\mathbf{e},\xi)-\alpha)^4\right]}\sqrt{\mathbb{E}_\mathbf{e}\left[\|\mathbf{e}\|_q^4\right]}\right] \\
&\quad+\frac{n^2}{\tau^2}\sqrt{\mathbb{E}\left[(\delta^2(z+\tau\mathbf{e})+\delta^2(z-\tau\mathbf{e}))^2\right]}\sqrt{\mathbb{E}\left[\|\mathbf{e}\|_q^4\right]} \\
&\le \frac{2n^2a_q^2}{\tau^2}\mathbb{E}_\xi\left[\sqrt{\mathbb{E}_\mathbf{e}\left[(\varphi(z+\tau\mathbf{e},\xi)-\alpha)^4\right]}\right]+\frac{2n^2a_q^2\Delta^2}{\tau^2}
\end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы используем (5) и (10). Замена $\alpha = \mathbb{E}_{\mathbf{e}}\left[\varphi(z+\tau\mathbf{e},\xi)\right]$, применяя Лемму 8 с тем, что $\varphi(z+\tau\mathbf{e},\xi)$ - это $\tau M(\xi)$-липшецево непрерывная функция от $\mathbf{e}$, в пересчете на $\|\cdot\|_2$-норму мы получаем

$$\mathbb{E}\left[\|g(z,\xi,\mathbf{e})\|_q^2\right] \leq 2cna_q^2 \cdot \mathbb{E}_\xi\left[M^2(\xi)\right] + \frac{2n^2a_q^2\Delta^2}{\tau^2} = 2a_q^2\left(cn\cdot M^2 + \frac{n^2\Delta^2}{\tau^2}\right)$$

□

### 3.2. Доказательство Леммы 3

Приведем полное доказательство Леммы 3:

**Доказательство:** Определим последовательность $v$: $v_1 \overset{\text{def}}{=} z_1$, $v_{k+1} \overset{\text{def}}{=} \text{prox}_{v_k}(-\rho\gamma_k\Delta_k)$ за $\rho > 0$:

$$\begin{aligned} D(u) &= \sum_{k=1}^N \gamma_k\langle -\Delta_k, z_k - u\rangle \\ . &= \sum_{k=1}^N \gamma_k\langle -\Delta_k, z_k - z_1\rangle + \sum_{k=1}^N \gamma_k\langle -\Delta_k, z_1 - v_k\rangle \\ &\quad + \sum_{k=1}^N \gamma_k\langle -\Delta_k, v_k - u\rangle \end{aligned} \tag{20}$$

По определению $v$ и оптимальному состоянию для прокси-оператора, мы имеем для всех $u$ в $Z$.

$$\langle -\gamma_k\rho\Delta_k - \nabla d(v_{k+1}) + \nabla d(v_{k+1}), u - v_{k+1}\rangle \geq 0.$$

Переписывая это неравенство, мы получаем

$$\langle -\gamma_k\rho\Delta_k, v_k - u\rangle \leq \langle -\gamma_k\rho\Delta_k, v_k - v_{k+1}\rangle + \langle \nabla d(v_{k+1}) - \nabla d(v_k), u - v_{k+1}\rangle.$$

Используя (16):

$$\langle -\gamma_k\rho\Delta_k, v_k - u\rangle \leq \langle -\gamma_k\rho\Delta_k, v_k - v_{k+1}\rangle + V_{v_k}(u) - V_{v_{k+1}}(u) - V_{v_k}(v_{k+1}).$$

Принимая во внимание свойство дивергенции Брегмана $2V_x(y) \geq \|x-y\|_p^2$:

$$\langle -\gamma_k\rho\Delta_k, v_k - u\rangle \leq \langle -\gamma_k\rho\Delta_k, v_k - v_{k+1}\rangle + V_{v_k}(u) - V_{v_{k+1}}(u) - \frac{1}{2}\|v_{k+1} - v_k\|_p^2.$$

Используя определение двойственной нормы:

$$\begin{aligned} \langle -\gamma_k\rho\Delta_k, v_k - u\rangle &\leq \|\gamma_k\rho\Delta_k\|_q \cdot \|v_k - v_{k+1}\|_p + V_{v_k}(u) - V_{v_{k+1}}(u) - \frac{1}{2}\|v_{k+1} - v_k\|_p^2 \\ &\leq \frac{\rho^2\gamma_k^2}{2}\|\Delta_k\|_q^2 + V_{v_k}(u) - V_{v_{k+1}}(u). \end{aligned}$$

Сумма по всем $k$ от 1 до $N$:

$$\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \rho \langle -\Delta_k, v_k - u \rangle \leq V_{v_1}(u) - V_{v_{N+1}}(u) + \frac{\rho^2}{2} \sum_{k=1}^{N} \gamma_k^2 \|\Delta_k\|_q^2.$$

Заметим, что $V_x(y) \geq 0$ и $V_{v_1}(u) \leq {}^{\Omega^2}/_{2}$:

$$\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \langle -\Delta_k, v_k - u \rangle \leq \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^{N} \gamma_k^2 \|\Delta_k\|_q^2. \tag{21}$$

Подставляя (21) в (20):

$$D(u) \quad \leq \quad \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \langle \Delta_k, v_k - z_k \rangle + \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^{N} \gamma_k^2 \|\Delta_k\|_q^2.$$

Правая часть не зависит от $u$, тогда

$$\max_{u \in \mathcal{Z}} D(u) \quad \leq \quad \sum_{k=1}^{N} \gamma_k \langle \Delta_k, v_k - z_k \rangle + \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\rho}{2} \sum_{k=1}^{N} \gamma_k^2 \|\Delta_k\|_q^2.$$

Беря полное матимачитеское ожидание и вводя новое обозначение $\tilde{\Delta}_k \overset{\text{def}}{=} g(z_k, \xi_k, \mathbf{e}_k) - g(z_k, \mathbf{e}_k)$, мы получаем:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\max_{u \in \mathcal{Z}} D(u)\right] \quad &\leq \quad \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \langle \Delta_k, v_k - z_k \rangle\right] + \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\rho}{2} \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} \gamma_k^2 \|\Delta_k\|_q^2\right] \\
&\leq \quad \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \langle \tilde{\Delta}_k, v_k - z_k \rangle\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \langle \Delta_k - \tilde{\Delta}_k, v_k - z_k \rangle\right] \\
&\quad + \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\rho}{2} \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} \gamma_k^2 \|\Delta_k\|_q^2\right].
\end{aligned}$$

Используя независимость $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_N, \xi_1, \ldots, \xi_N$, мы имеем

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\max_{u \in \mathcal{Z}} D(u)\right] \quad &\leq \quad \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \mathbb{E}_{\xi_k}\left[\langle \tilde{\Delta}_k, v_k - z_k \rangle\right]\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \mathbb{E}_{\mathbf{e}_k}\left[\langle \Delta_k - \tilde{\Delta}_k, v_k - z_k \rangle\right]\right] \\
&\quad + \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\rho}{2} \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} \gamma_k^2 \|\Delta_k\|_q^2\right].
\end{aligned}$$

Заметим, что $v_k - z_k$ не зависит от $\mathbf{e}_k$, $\xi_k$ и $\mathbb{E}_{\xi_k} \tilde{\Delta}_k = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\max_{u \in \mathcal{Z}} D(u)\right] \quad &\leq \quad \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \langle \mathbb{E}_{\xi_k}\left[\tilde{\Delta}_k\right], v_k - z_k \rangle\right] + \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \langle \mathbb{E}_{\mathbf{e}_k}\left[\Delta_k - \tilde{\Delta}_k\right], v_k - z_k \rangle\right] \\
&\quad + \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\rho}{2} \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} \gamma_k^2 \|\Delta_k\|_q^2\right] \\
&= \quad \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} \gamma_k \langle \mathbb{E}_{\mathbf{e}_k}\left[\Delta_k - \tilde{\Delta}_k\right], v_k - z_k \rangle\right] + \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\rho}{2} \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{N} \gamma_k^2 \|\Delta_k\|_q^2\right].
\end{aligned}$$

Согласно (14) и определению диаметра $\Omega$ мы получаем

$$\mathbb{E}\left[\max_{u\in\mathcal{Z}} D(u)\right] \leq \frac{\Delta\Omega n a_q}{\tau}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k + \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\rho}{2}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k^2\mathbb{E}\left[\|\Delta_k\|_q^2\right].$$

Чтобы доказать лемму, намследует оценить $\mathbb{E}\left[\|\Delta_k\|_q^2\right]$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\|\Delta_k\|_q^2\right] &\leq \mathbb{E}\left[\|g(z_k,\xi_k,\mathbf{e}_k) - \tilde{\nabla}\hat{\varphi}(z_k)\|_q^2\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\|g(z_k,\xi_k,\mathbf{e}_k)\|_q^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\|\tilde{\nabla}\hat{\varphi}(z_k)\|_q^2\right] \\
&\leq 2\mathbb{E}\left[\|g(z_k,\xi_k,\mathbf{e}_k)\|_q^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left\|\frac{n\left(\varphi(z+\tau\mathbf{e}) - \varphi(z-\tau\mathbf{e})\right)}{2\tau}\mathbf{e}\right\|_q^2\right].
\end{aligned}$$

Используя Лемму 2,мы имеем $\mathbb{E}\left[\|\Delta_k\|_q^2\right] \leq 4M_{all}^2$, таким образом

$$\mathbb{E}\left[\max_{u\in\mathcal{Z}} D(u)\right] \leq \frac{\Omega^2}{2\rho} + \frac{\Delta\Omega n a_q}{\tau}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k + 2\rho\sum_{k=1}^{N}\gamma_k^2 M_{all}^2.$$

Приравнивая $\rho = {}^1\!/_2$, мы завершаем доказательство.

□

### 3.3. Доказательство основного результата для метода zoSPA

Доказательство будет разбито на три шага.

**Шаг 1.** Пусть $g_k \overset{\text{def}}{=} \gamma_k g(z_k,\xi_k,\mathbf{e}_k)$. Согласно шагу алгоритма 1, $z_{k+1} = \mathrm{prox}_{z_k}(g_k)$. Принимая во внимание (17), мы получаем, что для всех $u \in \mathcal{Z}$

$$\langle g_k, z_{k+1} - u\rangle = \langle g_k, z_{k+1} - z_k + z_k - u\rangle \leq V_{z_k}(u) - V_{z_{k+1}}(u) - V_{z_k}(z_{k+1}).$$

Производя простые преобразования:

$$\begin{aligned}
\langle g_k, z_k - u\rangle &\leq \langle g_k, z_k - z_{k+1}\rangle + V_{z_k}(u) - V_{z_{k+1}}(u) - V_{z_k}(z_{k+1}) \\
&\leq \langle g_k, z_k - z_{k+1}\rangle + V_{z_k}(u) - V_{z_{k+1}}(u) - \frac{1}{2}\|z_{k+1} - z_k\|_p^2.
\end{aligned}$$

В последнем неравенстве цепочки выше мы используем свойство дивергенции Брегмана : $V_x(y) \geq \frac{1}{2}\|x-y\|_p^2$. Используя неравенство Гёльдера и факт, что : $ab - {}^{b^2}\!/_2 \leqslant {}^{a^2}\!/_2$, имеем

$$\begin{aligned}
\langle g_k, z_k - u\rangle &\leq \|g_k\|_q\|z_k - z_{k+1}\|_p + V_{z_k}(u) - V_{z_{k+1}}(u) - \frac{1}{2}\|z_{k+1} - z_k\|_p^2 \\
&\leq V_{z_k}(u) - V_{z_{k+1}}(u) + \frac{1}{2}\|g_k\|_q^2. \qquad (22)
\end{aligned}$$

Суммируя (22) по всем $k$ от 1 до $N$ и по определению $g_k$ и $\Omega$ (диаметра множества $\mathcal{Z}$):

$$\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\langle g(z_k,\xi_k,\mathbf{e}_k), z_k-u\rangle \le \frac{\Omega^2}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k^2\|g(z_k,\xi_k,\mathbf{e}_k)\|_q^2, \quad \forall u\in\mathcal{Z}. \tag{23}$$

Подставляя определение $D(u)$ из Леммы 3 в (23), мы получаем для всех $u\in\mathcal{Z}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\langle g(z_k,\mathbf{e}_k), z_k-u\rangle &\le \frac{\Omega^2}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k^2\|g(z_k,\xi_k,\mathbf{e}_k)\|_q^2+D(u)\\ &\le \frac{\Omega^2}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k^2\|g(z_k,\xi_k,\mathbf{e}_k)\|_q^2+\max_{u\in\mathcal{Z}}D(u).\end{aligned} \tag{24}$$

**Шаг 2.** Рассмотрим связь между функциями $\hat{\varphi}(z)$ и $\varphi(z)$. Объединяя (15) и (11) получаем:

$$\varepsilon_{sad}(\bar{z}_N) \le \max_{y'\in\mathcal{Y}}\hat{\varphi}(\bar{x}_N,y')-\min_{x'\in\mathcal{X}}\hat{\varphi}(x',\bar{y}_N)+2\tau M.$$

Таким образом, по определению $\bar{x}_N$ и $\bar{y}_N$ (см. (15)), неравенству Йенсена и выпуклости-вогнутости $\hat{\varphi}$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{sad}(\bar{z}_N) &\le \max_{y'\in\mathcal{Y}}\hat{\varphi}\left(\frac{1}{\Gamma_N}\left(\sum_{k=1}^{N}\gamma_k x_k\right),y'\right)-\min_{x'\in\mathcal{X}}\hat{\varphi}\left(x',\frac{1}{\Gamma_N}\left(\sum_{k=1}^{N}\gamma_k y_k\right)\right)\\ &\quad +2\tau M\\ &\le \frac{1}{\Gamma_N}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\left(\max_{y'\in\mathcal{Y}}\hat{\varphi}(x_k,y')-\min_{x'\in\mathcal{X}}\hat{\varphi}(x',y_k)\right)+2\tau M.\end{aligned}$$

Используя факт линейной независимости $x'$ и $y'$:

$$\varepsilon_{sad}(\bar{z}_N) \le \frac{1}{\Gamma_N}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\max_{(x',y')\in\mathcal{Z}}\left(\hat{\varphi}(x_k,y')-\hat{\varphi}(x',y_k)\right)+2\tau M.$$

Используя выкулость по одной группе переменных и вогнутость по другой группе переменных функции $\hat{\varphi}$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{sad}(\bar{z}_N) &\le \frac{1}{\Gamma_N}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\max_{(x',y')\in\mathcal{Z}}\left(\hat{\varphi}(x_k,y')-\hat{\varphi}(x',y_k)\right)+2\tau M\\ &= \frac{1}{\Gamma_N}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\max_{(x',y')\in\mathcal{Z}}\left(\hat{\varphi}(x_k,y')-\hat{\varphi}(x_k,y_k)+\hat{\varphi}(x_k,y_k)-\hat{\varphi}(x',y_k)\right)\\ &\quad +2\tau M\\ &\le \frac{1}{\Gamma_N}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\max_{(x',y')\in\mathcal{Z}}\left(\langle\nabla_y\hat{\varphi}(x_k,y_k),y'-y_k\rangle+\langle\nabla_x\hat{\varphi}(x_k,y_k),x_k-x'\rangle\right)\\ &\quad +2\tau M\\ &\le \frac{1}{\Gamma_N}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k\max_{u\in\mathcal{Z}}\langle\tilde{\nabla}\hat{\varphi}(z_k),z_k-u\rangle+2\tau M.\end{aligned} \tag{25}$$

Под $\tilde{\nabla}\hat{\varphi}(z)$ имеем в виду блочный вектор, состоящий из двух векторов $\nabla_x\hat{\varphi}(x,y)$ и $-\nabla_y\hat{\varphi}(x,y)$.

**Шаг 3.** Объединяя выражения (24), (25), мы получаем

$$\begin{aligned}\varepsilon_{sad}(\bar{z}_N) \quad &\leq \quad \frac{\Omega^2}{2\Gamma_N} + \frac{1}{2\Gamma_N}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k^2\mathbb{E}\left[\|g(z_k,\xi_k,\mathbf{e}_k)\|_q^2\right] + \frac{1}{\Gamma_N}\max_{u\in\mathcal{Z}} D(u) \\ &+2\tau M.\end{aligned}$$

Беря полное математическое ожидание и используя (12) и (9) , мы имеем

$$\mathbb{E}\left[\varepsilon_{sad}(\bar{z}_N)\right] \quad \leq \quad \frac{3\Omega^2}{2\Gamma_N} + \frac{3M_{all}^2}{2\Gamma_N}\sum_{k=1}^{N}\gamma_k^2 + \frac{\Delta\Omega n a_q}{\tau} + 2\tau M.$$

Подставляя значение $\gamma_k = \frac{\Omega}{M_{all}\sqrt{N}}$, завершаем доказательство теоремы.

□

## 4. Вычичслительный эксперимент

В серии наших экспериментов мы сравниваем алгоритм нулевого порядка 1 (`zoSPA`), предложенный в данной работе, с алгоритмом Зеркального спуска [6], использующим оракул первого порядка. Рассматривается классическая седловая задача на вероятностном симплексе:

$$\min_{x\in\Delta_n}\max_{y\in\Delta_k}\left[y^TCx\right], \tag{26}$$

Эта проблема имеет много различных приложений и интерпретаций, одна из основных - матричная игра (см. Часть 5 на [6]), т.е. элемент $c_{ij}$ матрицы интерпретируется как выигрыш, при условии, что игрок $X$ выбрал $i$-ую стратегию, а игрок $Y$ выбрал $j$-стратегию, задача одного из игроков - максимизировать выигрыш, а задача оппонента - свести к минимуму.

Кратко опишем, как должен выглядеть шаг алгоритма для этого случая. Прокс-функция $d(x)=\sum_{i=1}^n x_i\log x_i$ (энтропия) и $V_y(x)=\sum_{i=1}^n x_i\log {x_i}/{y_i}$ (расстояние (дивергенция) Кульбака — Лейблера). Результат проксимального оператора

$$u = \mathrm{prox}_{z_k}(\gamma_k g(z_k,\xi_k^{\pm},\mathbf{e}_k)) = z_k\exp(-\gamma_k g(z_k,\xi_k^{\pm},\mathbf{e}_k)),$$

под этой записью мы имеем в виду: $u_i=[z_k]_i\exp(-\gamma_k[g(z_k,\xi_k^{\pm},\mathbf{e}_k)]_i)$. Используя проекцию Брегмана на симплекс следующим образом $P(x)={x}/{\|x\|_1}$, у нас есть

$$[x_{k+1}]_i = \frac{[x_k]_i\exp(-\gamma_k[g_x(z_k,\xi_k^{\pm},\mathbf{e}_k)]_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n}[x_k]_j\exp(-\gamma_k[g_x(z_k,\xi_k^{\pm},\mathbf{e}_k)]_j)},$$

$$[y_{k+1}]_i = \frac{[y_k]_i \exp(\gamma_k [g_y(z_k, \xi_k^{\pm}, \mathbf{e}_k)]_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} [y_k]_j \exp(\gamma_k [g_y(z_k, \xi_k^{\pm}, \mathbf{e}_k)]_j)},$$

где под $g_x, g_y$ подразумеваются части $g$, которые отвечают за $x$ и за $y$. Из теоретических результатов видно, что в нашем случае один и тот же шаг должен быть использован в Алгоритме 1 и Зеркальном спуске с [6], так как $n^{1/q} = 1$ для $q = \infty$.

В первой части эксперимента берем матрицу $200 \times 200$. Все элементы матрицы генерируются из равномерного распределения от 0 до 1. Далее выбираем одну строку матрицы и генерируем ее элементы из равномерного распределения от 5 до 10. Наконец, берем один элемент из этой строки и генерируем его равномерно от 1 до 5. Затем берём ту же матрицу, но теперь на каждой итерации добавляем к элементам матрицы нормальный шум с нулевым ожиданием и дисперсией 10, 20, 30, 40 % от значения матричного элемента. Результаты эксперимента приведены на рисунке 1.

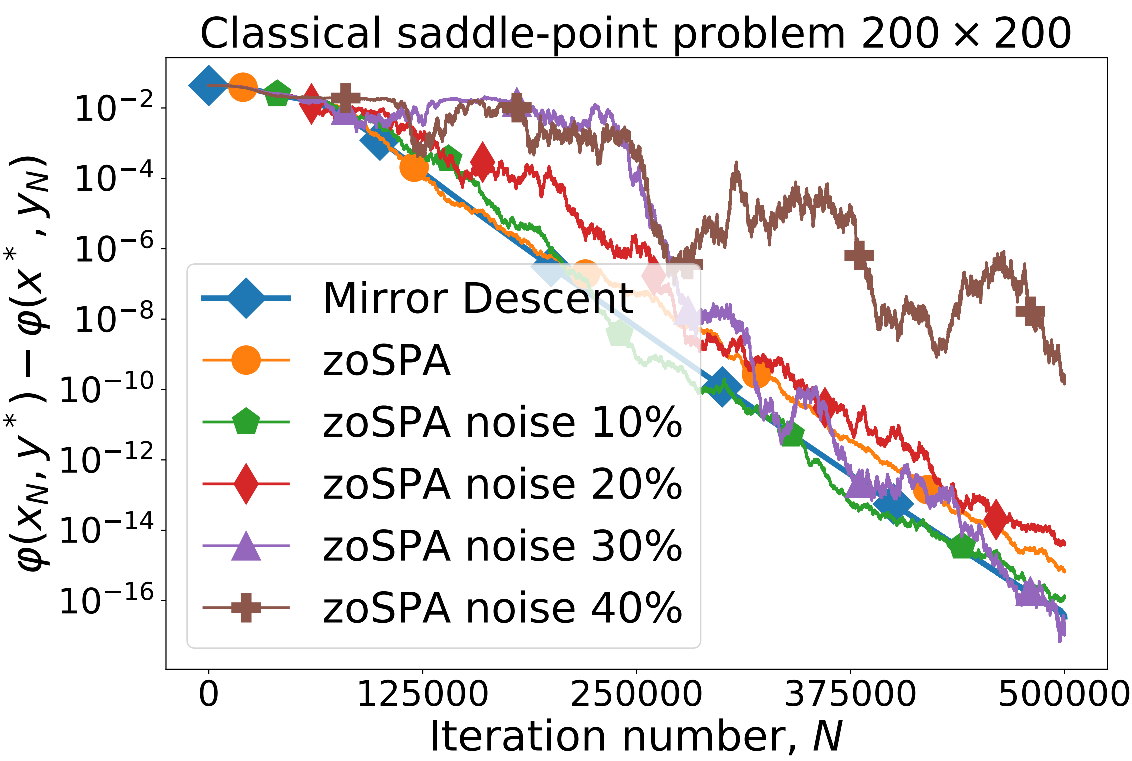


Рис. 1. `zoSPA` с 0 - 40 % шума и `Mirror Descent`, примененные для решения седловой задачи. (26).

По результатам экспериментов видно, что для рассматриваемых задач методы с одним и тем же шагом работают либо так, как это описано в теории (более медленные $n$ или $\log^2 n$ раз), либо идентично методу, использующему полный градиент.

## 5. Обсуждение результатов

В этой работе мы рассматриваем негладкий случай. Наши результаты можно обобщить для случая сильно выпуклых функций, используя технику рестартов (см., например, [12]). Похоже, что это можно сделать аналогичным образом. Точнее говоря, это можно сделать аналогичным образом для детерминистической установки. Что касается стохастической установки, то в данной работе мы должны улучшить оценки, изменив диаметры Брегмана из рассматриваемых выпуклых множеств $\Omega$ на расхождение Брегмана между начальной точкой и решением. Это требует более точных расчетов (как в [13]) и не рассмотренно в данной работе. Обратите внимание, что все константы, характеризующие стохастичность, липшивость во всех оценках в данной работе можно определить на пересечении рассматриваемых выпуклых множеств и шаров Брегмана вокруг решения радиуса, равного (до логарифмических факторов) расхождению Брегмана между начальной точкой и решением. Если попробовать перенести результаты на гладкий случай, то оценка количества итераций, необходимых для нахождения решения седловой задачи 1 с точность $\varepsilon$, будет порядка $\sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$. Однако известен алгоритм [6] (Mirror Prox), использующий оракул первого порядка. Для него оценка количества итераций, необходимых для нахождения решения седловой задачи $\sim \mathcal{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$. Видимо, для гладкого случая нужно использовать уже другую идею. Обобщение результатов [13, 14] и [15, 16] для безградиентной установки точки седла является более сложной задачей. Также, на основе комбинаций идей из [15, 17] было бы интересно разработать смешанный метод с градиентным оракулом за $x$ (внешняя минимизация) и безградиентным оракулом за $y$ (внутренняя максимизация).

# Список литературы

1. Goodfellow I. NIPS 2016 tutorial: Generative adversarial networks // arXiv preprint arXiv:1701.00160. 2016.
2. Sutton R. S., Barto A. G. Reinforcement learning: An introduction. MIT press, 2018.
3. Langley P. Crafting Papers on Machine Learning // Proceedings of the 17th International Conference on Machine Learning (ICML 2000) / Ed. by P. Langley. Stanford, CA: Morgan Kaufmann, 2000. P. 1207–1216.
4. Gasnikov A. V., Krymova E. A., Lagunovskaya A. A. et al. Stochastic online optimization. Single-point and multi-point non-linear multi-armed bandits. Convex and strongly-convex case // Automation and remote control. 2017. Vol. 78, no. 2. P. 224–234.
5. Gasnikov A. V., Lagunovskaya A. A., Usmanova I. N., Fedorenko F. A. Gradient-free proximal methods with inexact oracle for convex stochastic nonsmooth optimization problems on the simplex // Automation and Remote Control. 2016. Vol. 77, no. 11. P. 2018–2034.
6. Ben-Tal A., Nemirovski A. Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications. 2019.
7. Shamir O. An Optimal Algorithm for Bandit and Zero-Order Convex Optimization with Two-Point Feedback. // Journal of Machine Learning Research. 2017. Vol. 18, no. 52. P. 1–11.
8. Duchi J. C., Jordan M. I., Wainwright M. J., Wibisono A. Optimal rates for zero-order convex optimization: the power of two function evaluations. 2013. arXiv:math.OC/1312.2139.
9. Beznosikov A., Sadiev A., Gasnikov A. Gradient-Free Methods with Inexact Oracle for Convex-Concave Stochastic Saddle-Point Problem // arXiv preprint arXiv:2005.05913. 2020.
10. Nesterov Y., Spokoiny V. G. Random Gradient-Free Minimization of Convex Functions // Foundations of Computational Mathematics. 2017. Vol. 17, no. 2. P. 527–566.
11. Beznosikov A., Gorbunov E., Gasnikov A. Derivative-Free Method For Composite Optimization With Applications To Decentralized Distributed Optimization // arXiv preprint arXiv:1911.10645. 2019.
12. Gasnikov A. Universal gradient descent // arXiv preprint arXiv:1711.00394. 2017.

13. Gorbunov E., Dvurechensky P., Gasnikov A. An accelerated method for derivative-free smooth stochastic convex optimization // arXiv preprint arXiv:1802.09022. 2018.
14. Dvurechensky P., Gorbunov E., Gasnikov A. An accelerated directional derivative method for smooth stochastic convex optimization // arXiv preprint arXiv:1804.02394. 2018.
15. Alkousa M., Dvinskikh D., Stonyakin F. et al. Accelerated methods for composite non-bilinear saddle point problem // arXiv preprint arXiv:1906.03620. 2019. arXiv:math.OC/1906.03620.
16. Lin T., Jin C., Jordan M. et al. Near-Optimal Algorithms for Minimax Optimization // arXiv preprint arXiv:2002.02417. 2020.
17. Ivanova A., Gasnikov A., Dvurechensky P. et al. Oracle Complexity Separation in Convex Optimization // arXiv preprint arXiv:2002.02706. 2020.