МОРФЛЕТЫ: новый класс древовидных морфологических описаний формы изображений на основе систем хааροподобных вейвлетов

Ю.В.Визильтер, **В.С.Горбацевич**, С.Ю. Желтов, А.Ю.Рубис, А.В. Вортников
ФГУП «ГосНИИАС»

ИОИ-2014

Основная идея

Морфология Пытьева

Вейвлеты Хаара

Хаароподобные признаки

→ МОРФЛЕТЫ

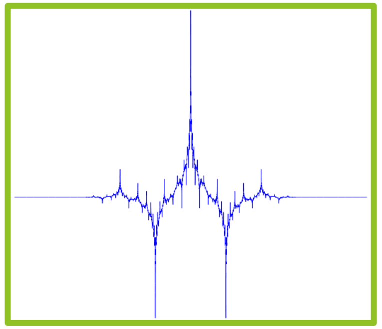
Вейвлеты

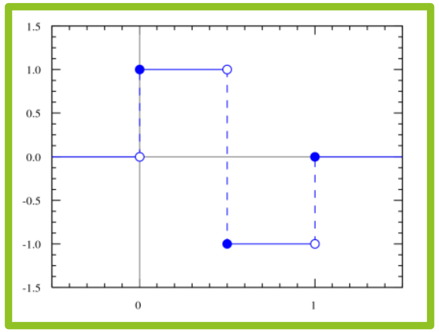
wavelet (от французского «ondelette») - «короткая (маленькая) волна»

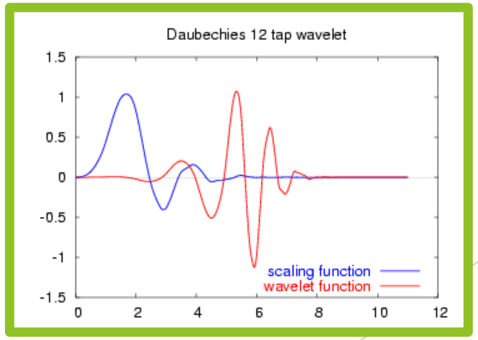
Ограниченность. Квадрат нормы функции должен быть конечным.

Локализация. ВП в отличие от преобразования Фурье использует локализованную исходную функцию и во времени, и по частоте.

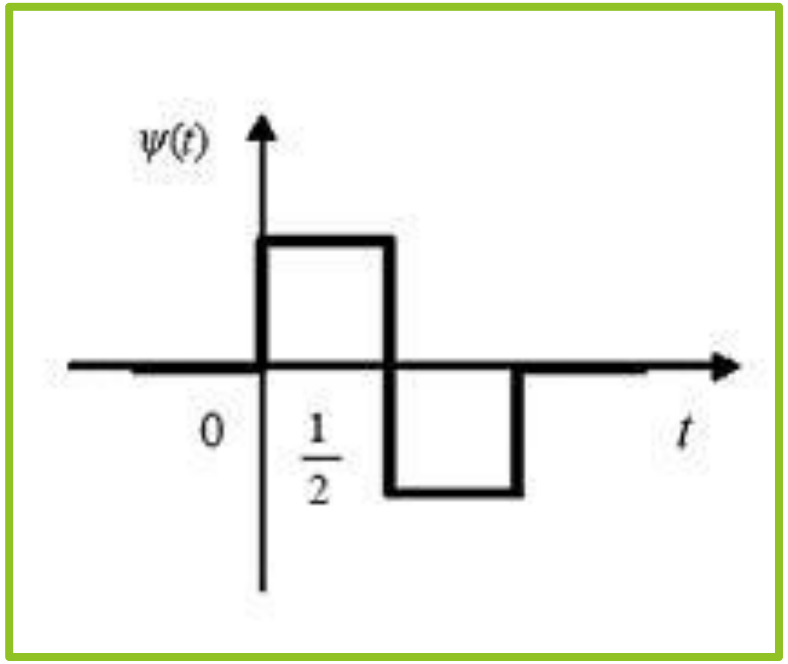
Нулевое среднее. Вейвлет - дифференциальный оператор.







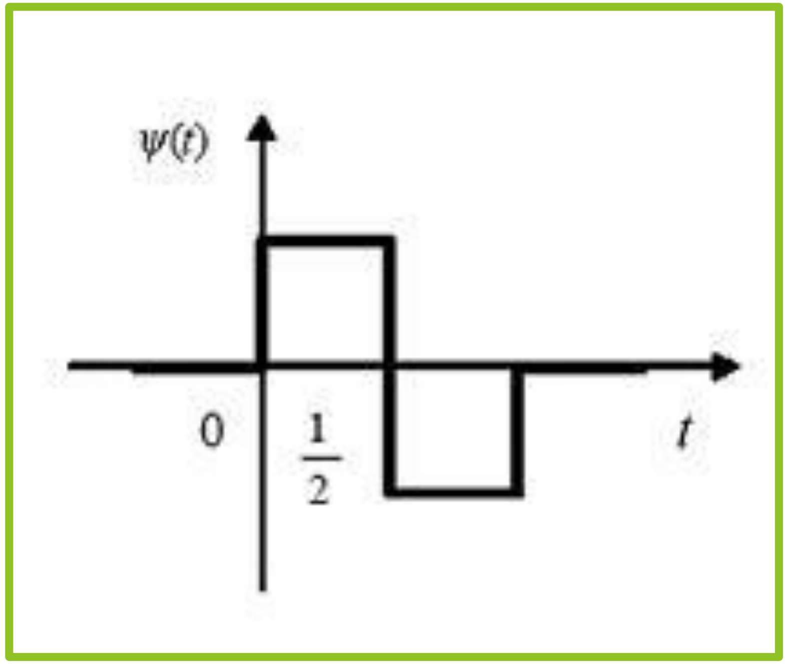
Вейвлеты Хаара



$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1/2 \\ -1, & 1/2 \le x < 1 \\ 0, & x \notin [0, 1) \end{cases}$$

Вейвлет Хаара - наиболее распространенный тип вейвлетов из использующихся в обработке изображений.

Вейвлеты Хаара



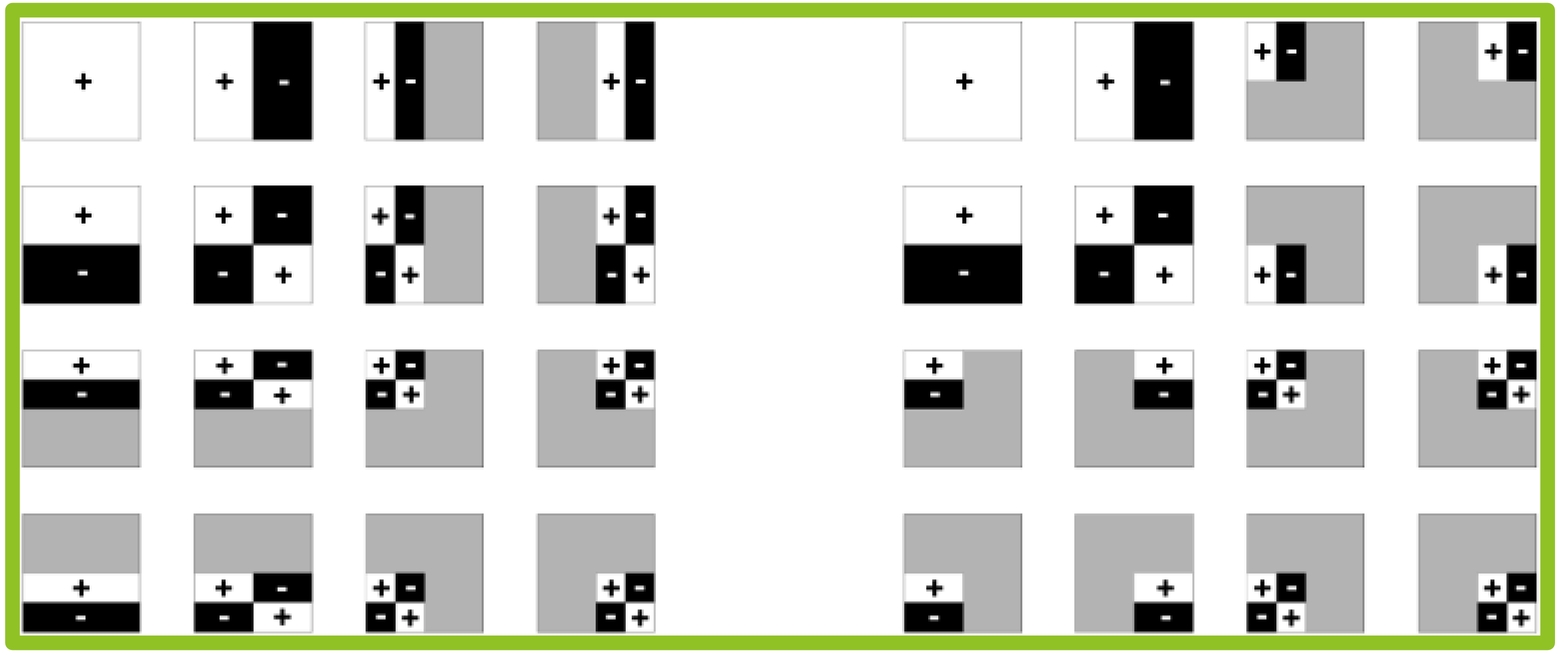
Свойства:

1. Локализация
2. Ограниченность
3. Дифф. Оператор

4. Система вейвлетов Хаара порождает ортонормированный базис

5. Система вейвлетов Хаара порождается материнской функцией путем сдвигов и масштабировании.

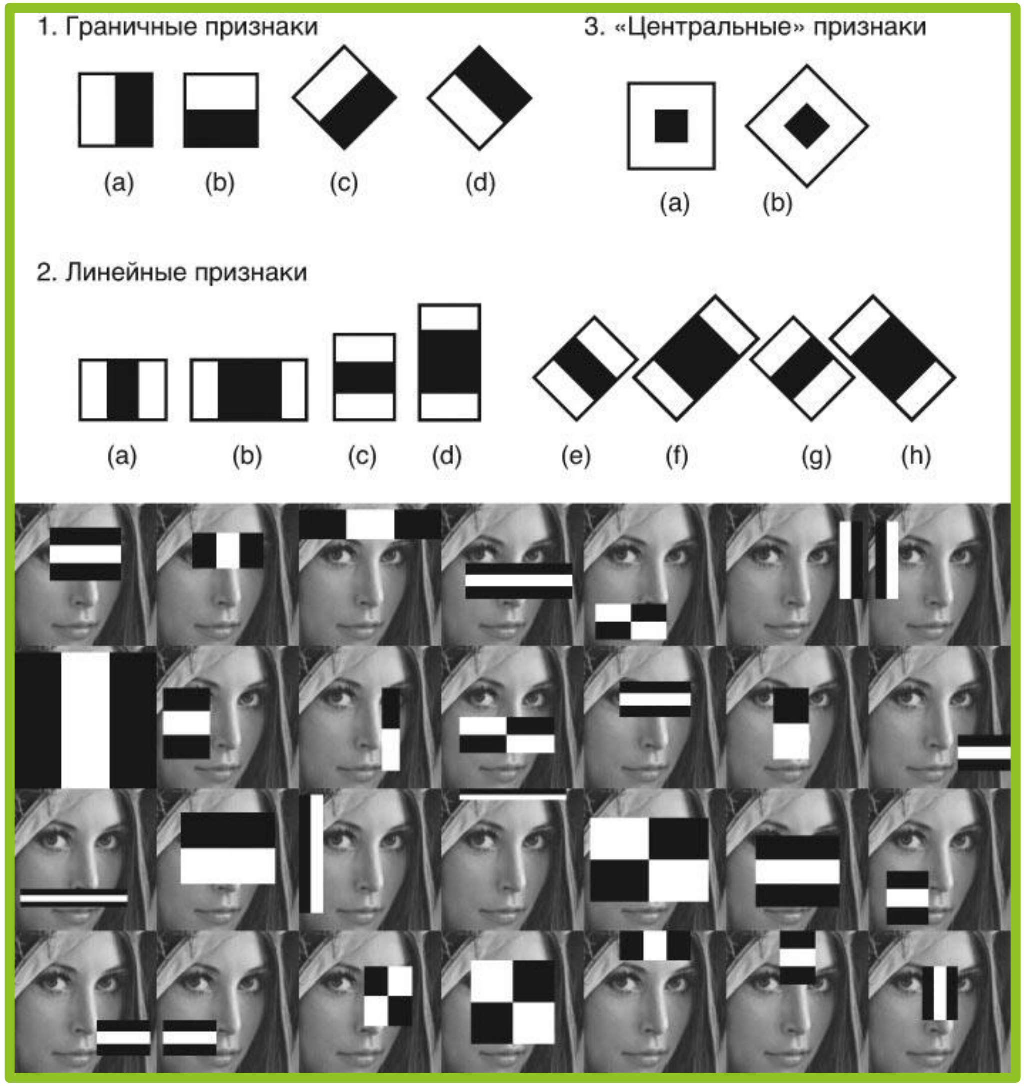
Вейвлеты Хаара



Области применения

1. Обработка изображений
2. Сжатие изображений
3. Сравнение изображений

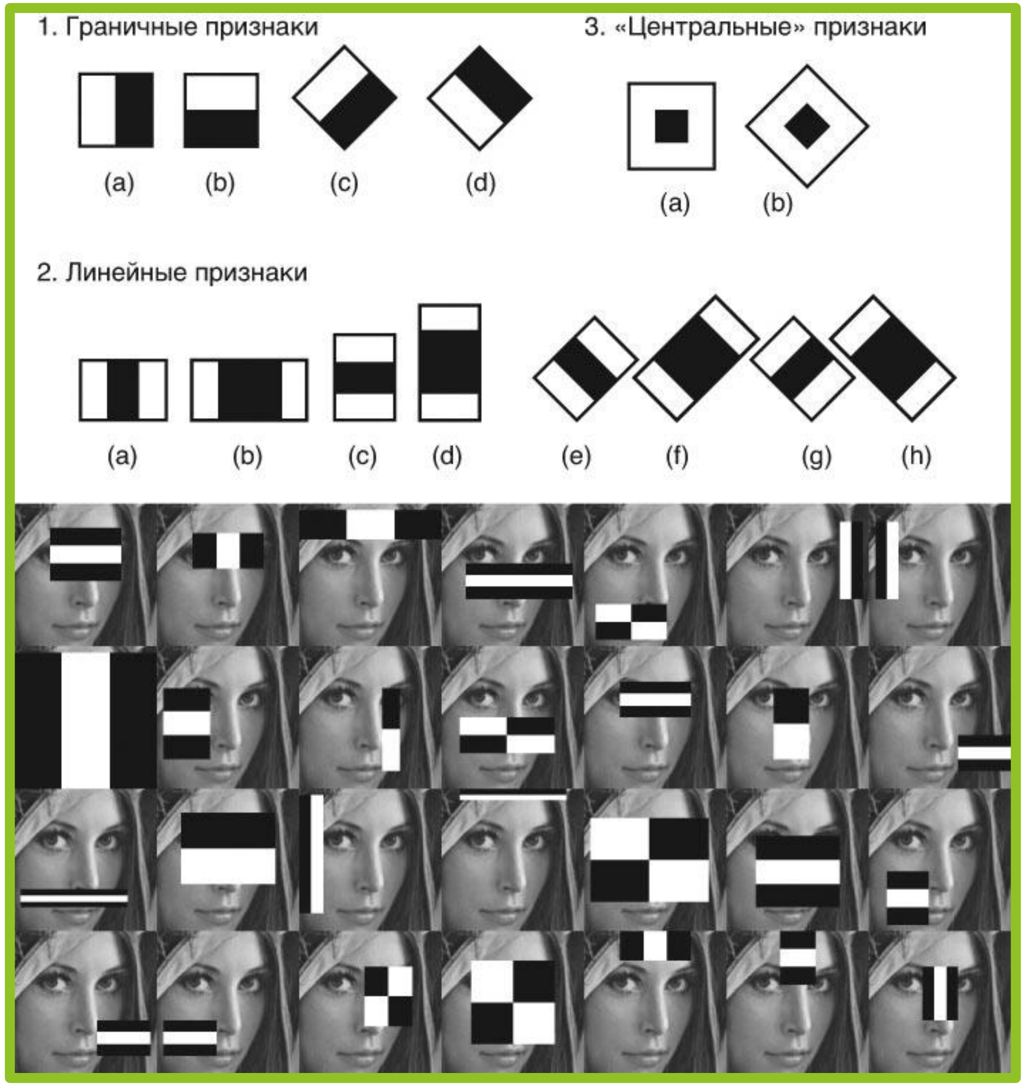
Хаароподобные признаки



Со времен работы [1] Виолы и Джонса хаароподобные признаки являются одними из наиболее популярных и эффективных в системах распознавания объектов.

1. Viola, Jones: Robust Real-time Object Detection, IJCV 2001

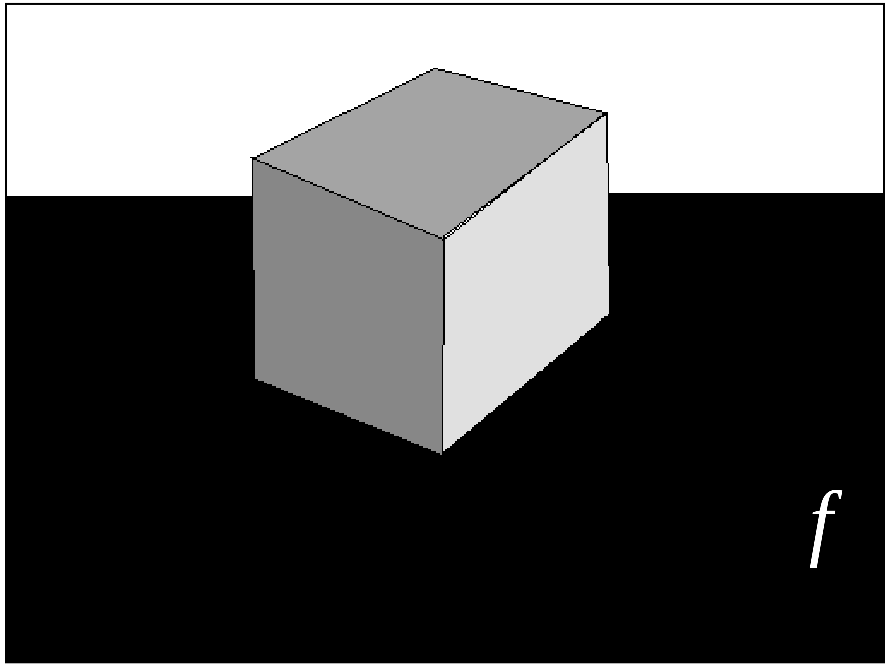
Хаароподобные признаки

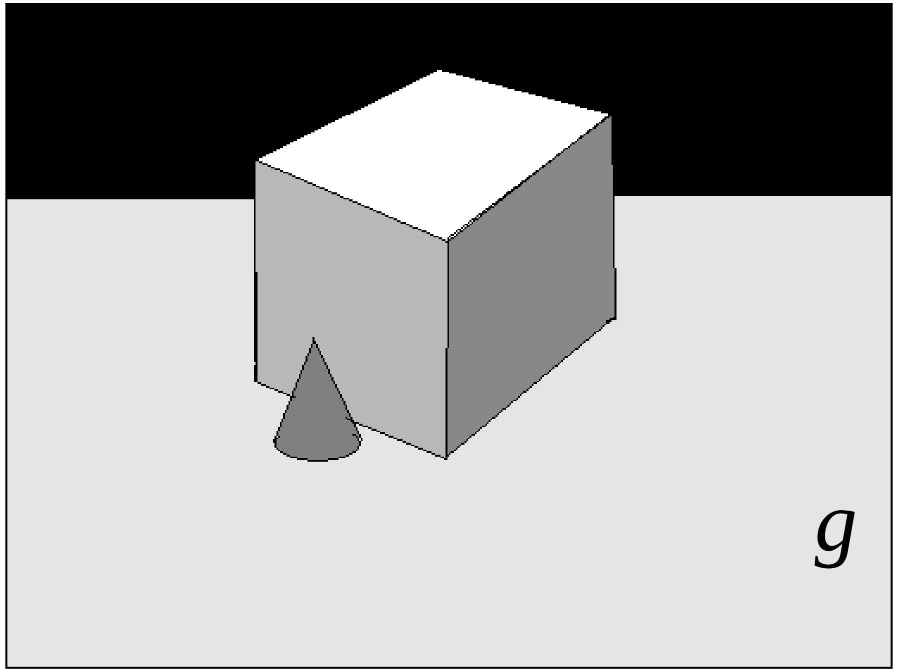


Свойства:

1. Локализация
2. Ограниченность
3. Дифф. Оператор

Морфологический анализ изображений





Насколько похожи эти изображения?

Чем они отличаются?

Как описать форму этих изображений

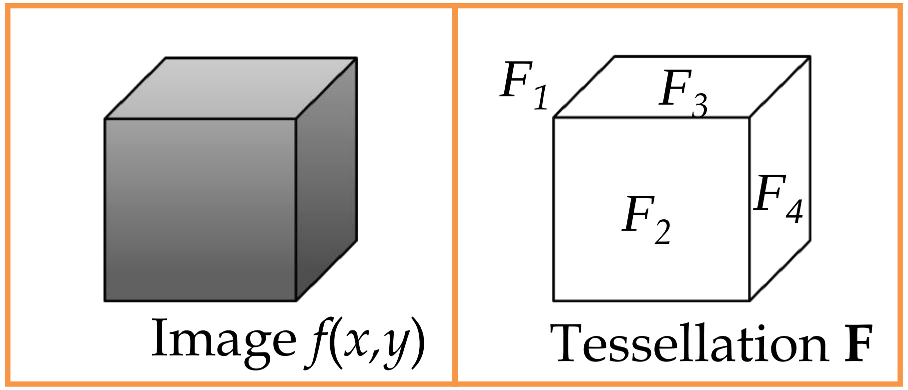
Морфологическое описание формы: Формы как разбиения

В морфологии Пытьева [1] предложена схема описания формы изображений на основе базисных функций, связанных с разбиением кадра на непересекающиеся области.

$$f(x,y) = \sum_{i=1,..,n} f_i \, \chi_{Fi}(x,y).$$

$$F = \{ \sum_{i=1,..,n} f_i \, \chi_{Fi}(x,y) : \mathbf{f} \in R^n \}.$$

$$\chi_{F_i}(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{if } (x,y) \in F_i; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$



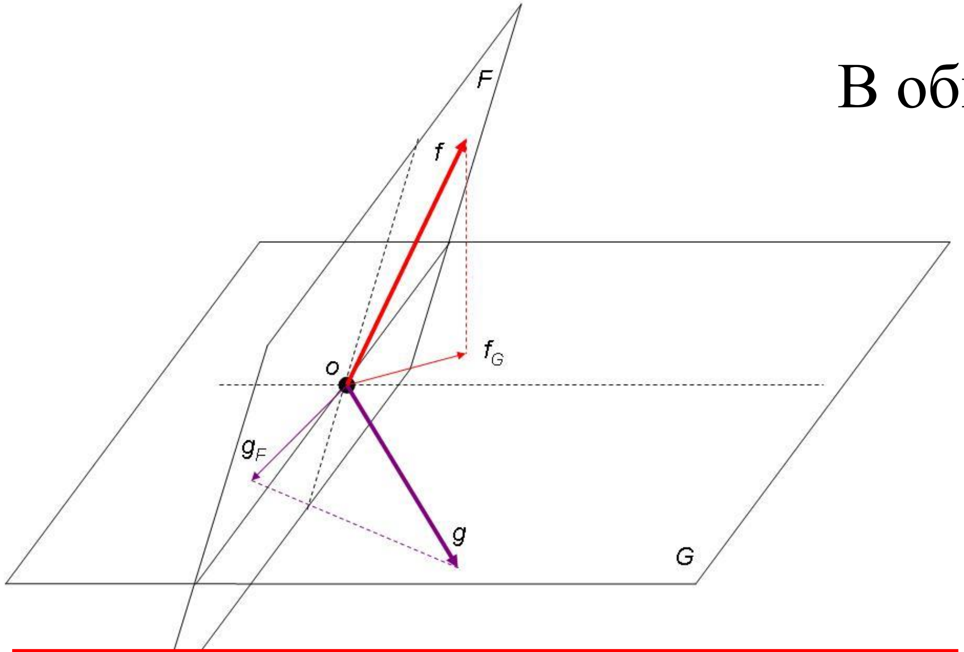
[1] Пытьев Ю.П., Чуличков А.И. Методы морфологического анализа изображений // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 336с.

Сравнение изображений с формой

Морфологические квази-расстояния

$$d_M(g,F) = \|g - P_F g\|,$$

$$d_M(f,G) = \|f - P_G f\|$$



$$\boxed{f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} f_i \chi_{Fi}(x,y)}$$

Морфологические коэффициенты корреляции Пытьева:

$$K_M(g,F) = \|P_F g\| / \|g\|,$$

$$K_M(f,G) = \|P_G f\| / \|f\|$$

В общем случае $K_M(g,F) \neq K_M(f,G)$.

Изображение = вектор,
Форма = гиперплоскость (подпространство),
Характеристические функции областей = ортогональный базис формы (подпространства),
Морфологический фильтр = проекция на форму,
Морфологическая корреляция = сравнение изображения с формой

Свойства вейвлетов Хаара

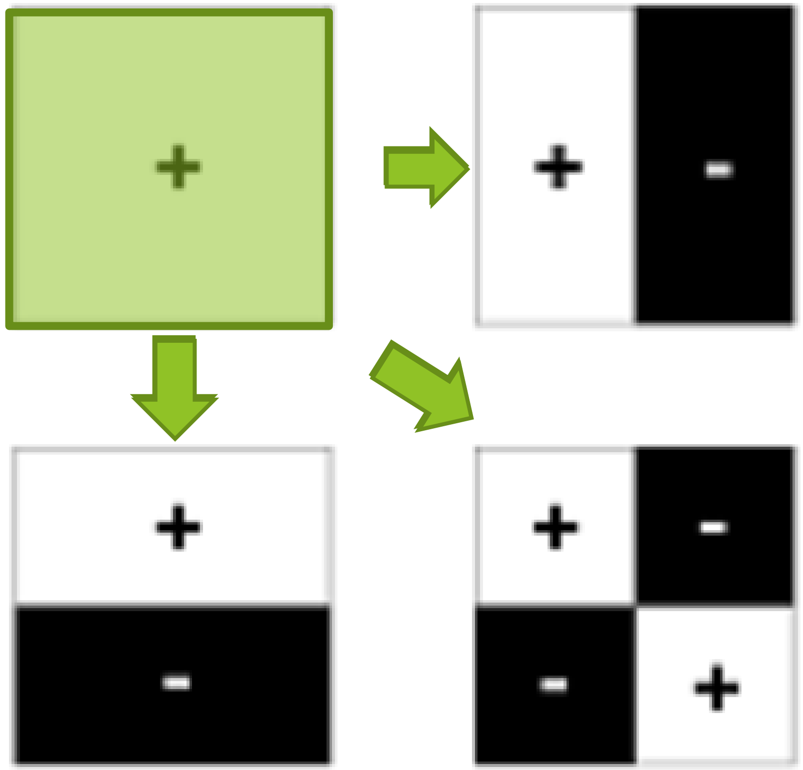
1) Вейвлеты Хаара представляют собой кусочно-постоянные функции с нулевым средним, что соответствует определенному классу Пытьевских форм.

2) Носители вейвлетов меньшего масштаба всегда принадлежат областям постоянных значений вейвлетов большего масштаба.

3) Система вейвлетов Хаара образует дерево разбиений кадра, поэтому масштаб вейвлета может быть выражен не в абсолютных геометрических, а в относительных иерархических терминах – как его положение на дереве вейвлетов относительно других вейвлетов.

От вейвлетов Хаара к Хаароподобным вейвлетам

Именно эти 3 особенности автоматически обеспечивают ортогональность системы разномасштабных дифференциальных операторов.



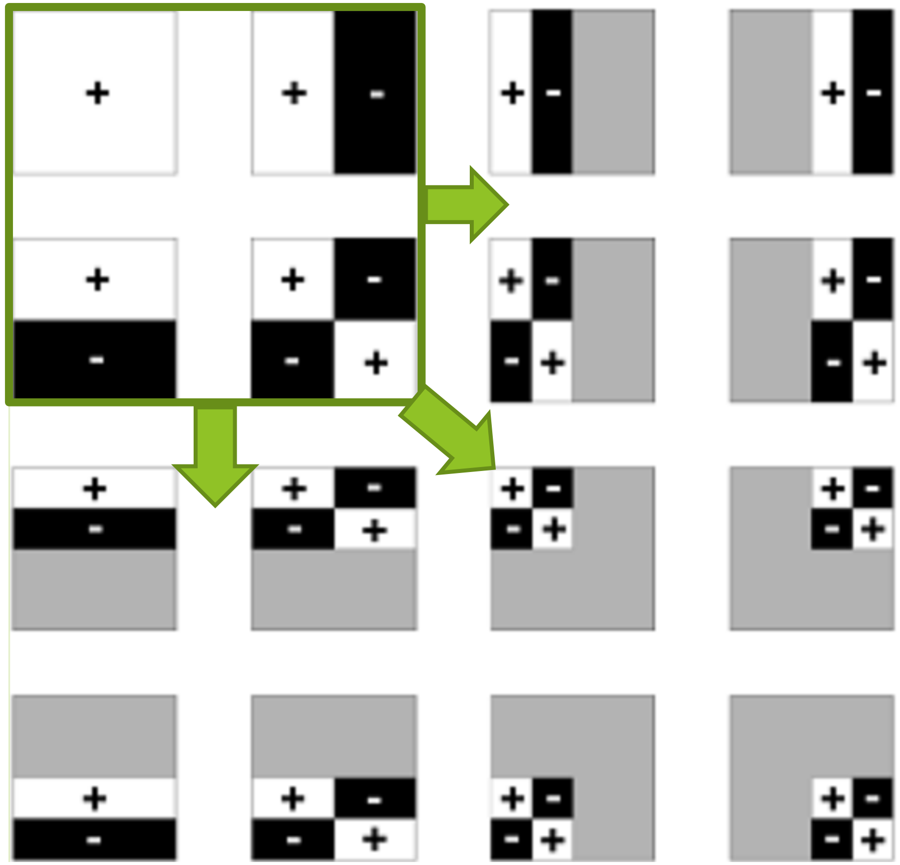
При переходе от верхнего уровня дерева к нижнему уровню:

- Усложнение Пытьевской формы

- Область постоянного значения на верхнем уровне соответствует области действия дифф. оператора нижнего уровня

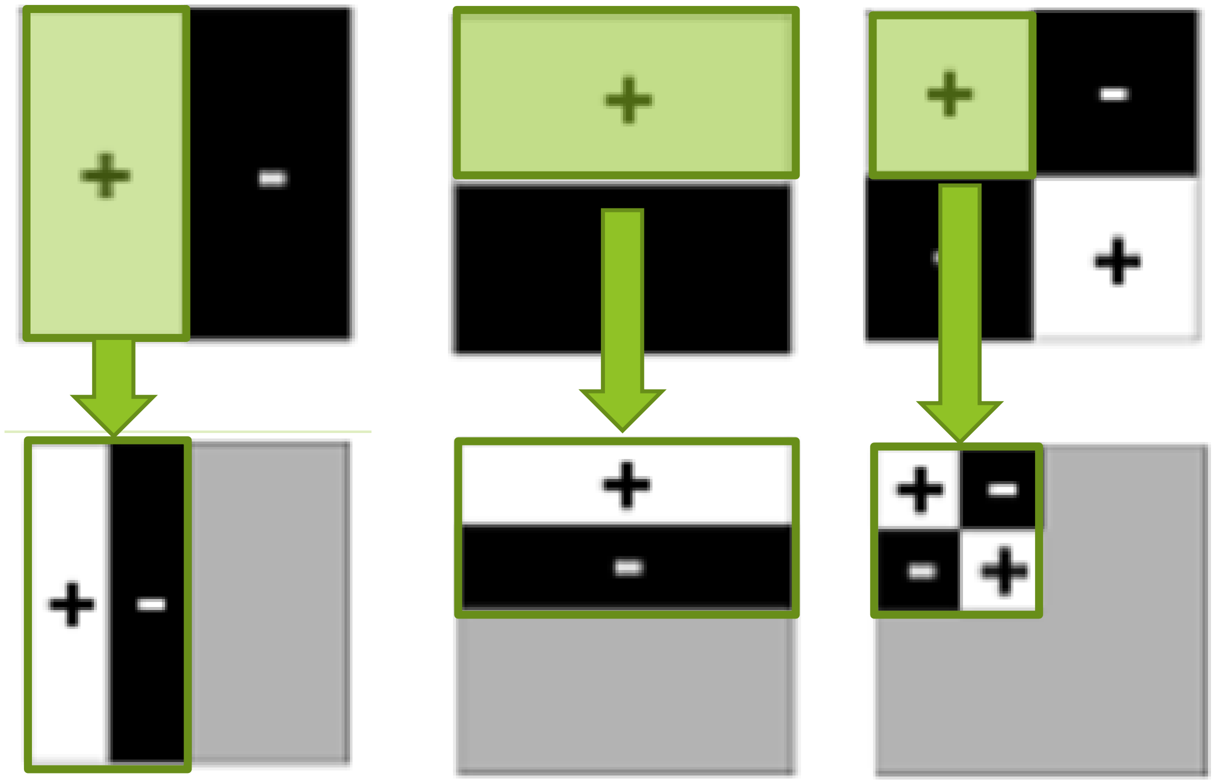
От вейвлетов Хаара к Хааруподобным вейвлетам

Именно эти 3 особенности автоматически обеспечивают ортогональность системы разномасштабных дифференциальных операторов.



От вейвлетов Хаара к Хааροподобным вейвлетам

Именно эти 3 особенности автоматически обеспечивают ортогональность системы разномасштабных дифференциальных операторов.



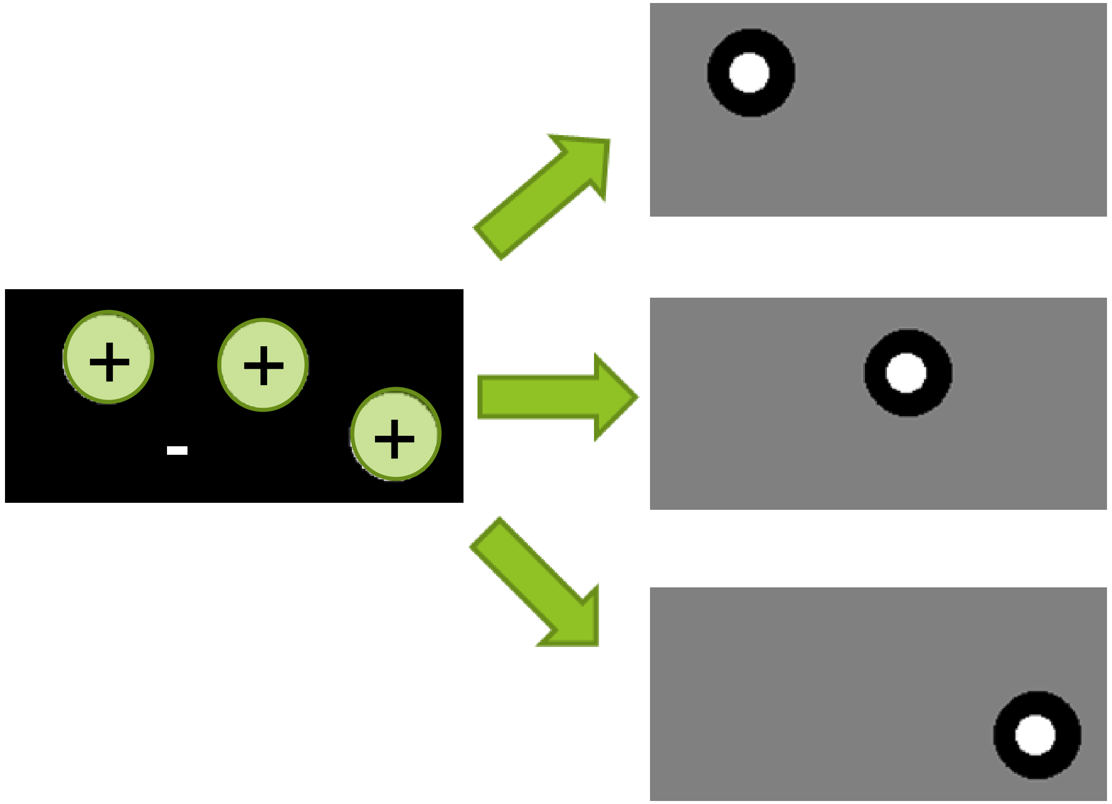
При переходе от верхнего уровня дерева к нижнему уровню:

- Усложнение Пытьевской формы

- Область постоянного значения на верхнем уровне соответствует области действия дифф. оператора нижнего уровня

От вейвлетов Хаара к Хааороподобным вейвлетам

Именно эти 3 особенности автоматически обеспечивают ортогональность системы разномасштабных дифференциальных операторов *даже если они не порождены единым набором масштабируемых функций*.



При переходе от верхнего уровня дерева к нижнему уровню:

- Усложнение Пытьевской формы

- Область постоянного значения на верхнем уровне соответствует области действия дифф. оператора нижнего уровня

От вейвлетов Хаара к Хаароподобным вейвлетам

Именно эти 3 особенности автоматически обеспечивают ортогональность системы разномасштабных дифференциальных операторов *даже если они не порождены единым набором масштабируемых функций*.

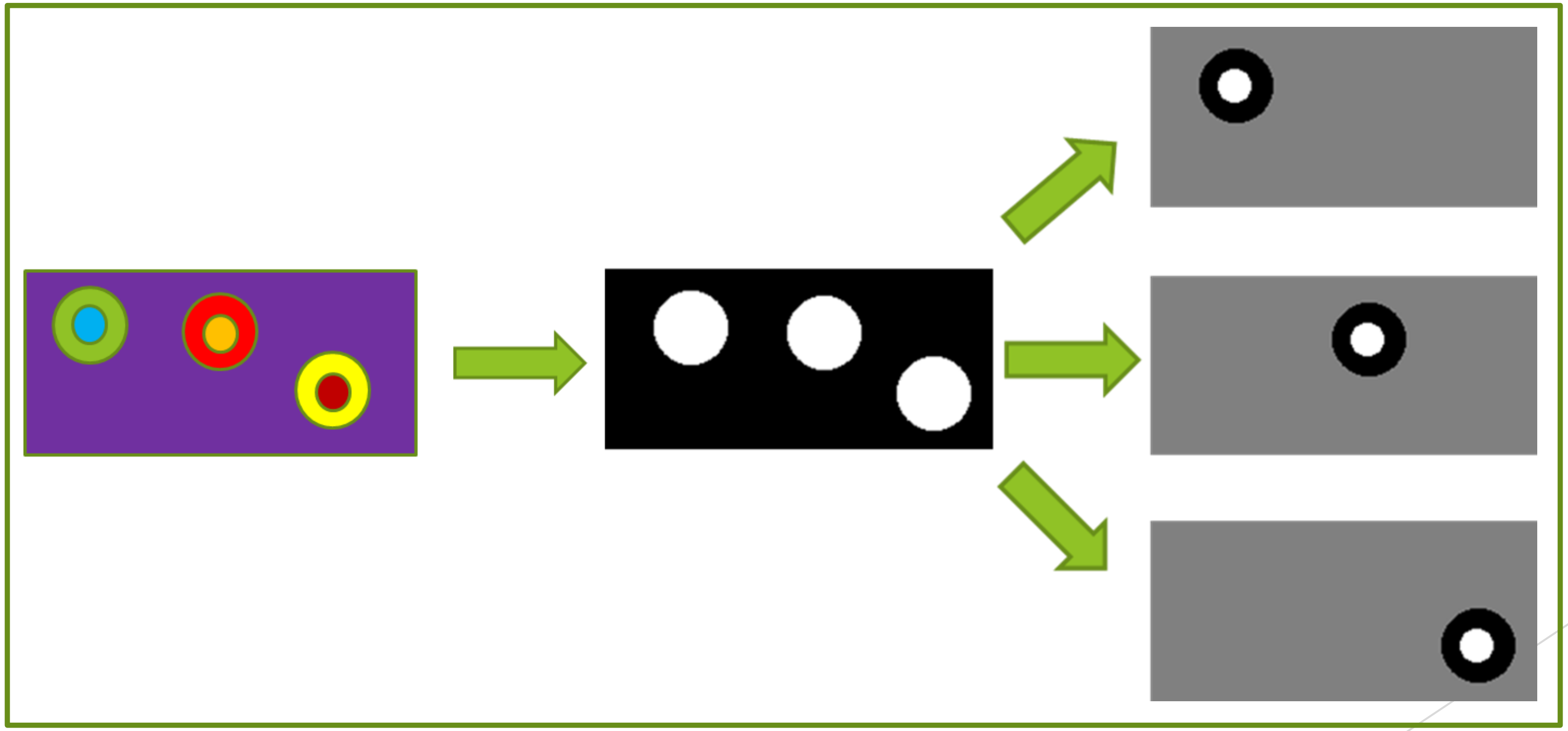
Это приводит к новой схеме построения систем разномасштабных кусочно-постоянных дифференциальных операторов *произвольной формы*, которые естественно назвать «хаароподобными вейвлетами».

В отличие от «хаароподобных признаков» такие хаароподобные вейвлеты могут быть определены строгим образом и обладают свойствами, аналогичными свойствам классических вейвлетов. (Вейвлеты Хаара являются частным случаем таких хаароподобных вейвлетов)

От Хааропробных вейвлетов к Морфлетам

Свобода формы хаароподобных вейвлетов + связь хаароподобных вейвлетов с морфологией Пытьева

Построение системы вейвлетов, согласованной с формой изображения или некоторого класса изображений (то есть задающей вейвлет-базис определенной Пытьевской формы).



От Хаароподобных вейвлетов к Морфлетам

Свобода формы хаароподобных вейвлетов + связь хаароподобных вейвлетов с морфологией Пытьева

↓

Построение системы вейвлетов, согласованной с формой изображения или некоторого класса изображений (то есть задающей вейвлет-базис определенной Пытьевской формы).

Для этого нужно ввести некоторые правила адаптивного определения формы вейвлетов с учетом распределения свойств изображения на носителе текущего уровня дерева.

Такие морфологические хаароподобные вейвлеты мы назвали *морфлетами*.

Морфология центрированных изображений

Изображение

Средняя яркость

Центрированное изображение

Можем ли мы разложить центрированное изображение по базису из характеристических функций областей? Можем.

Корректно ли это? Нет!

Поскольку центрированная форма замкнута относительно линейных операций, и все входящие в нее изображения имеют нулевое среднее, а характеристические функции областей имеют ненулевое среднее (они неотрицательны), значит, они не принадлежат центрированной форме.

Таким образом, ортогональный базис центрированной формы нужно искать в том же классе кусочно-постоянных функций с нулевым средним.

Формальная теория. Морфологии центрированных изображений

Формы центрированных изображений:

$\mathcal{F} = \{\, f(x,y) = \sum_{i=1,..,n} f_i\, \chi_{Fi}(x,y),\ \mathbf{f} \in R^n \mid \sum_{i=1,..,n} f_i\, S_{Fi} = 0\}$,

где $S_{Fi} = \|\, \chi_{Fi}(x,y)\, \|^2$. – площадь соответствующей области разбиения F_i.

Формы $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ являются *независимыми*, если

$\forall f \in \mathcal{F},\ g \in \mathcal{G}$: $\|\, f_{\mathcal{G}}\, \| = \|\, g_{\mathcal{F}}\, \| = 0$.

Форма $\mathcal{G}$ *сложнее (не проще)* формы $\mathcal{F}$, если

$P_{\mathcal{G}} P_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{F}},\ P_{\mathcal{F}} P_{\mathcal{G}} \neq P_{\mathcal{G}}$.

Морфологические коэффициенты корреляции центрированных изображений

$K_M(g,\mathcal{F}) = \|\, P_{\mathcal{F}}\, g\, \| \,/\, \|\, P_{\mathcal{G}}\, g\, \|$,

$K_M(f,\mathcal{G}) = \|\, P_{\mathcal{G}}\, f\, \| \,/\, \|\, P_{\mathcal{F}}\, f\, \|$

Формальная теория. Хаароподобные функции и хаароподобные базисы центрированных форм

<u>*Определение 1*</u>. Класс *хаароподобных функций* $\mathbb{H}$ есть множество всех кусочно-постоянных функций с нулевым средним функций вида

$\mathbb{H} = \{h(x,y) = \sum_{i=1,..,n} h_i\, \chi_{Hi}(x,y),\ n=1,2,\ldots,\ \mathbf{h}\in R^n,\ \mathbf{H}\in\mathbb{T}_n(\Omega),\ \Omega\in R^2 \,|\, \sum_{i=1,..,n} h_i\, S_{Hi} = 0\}$,

где $\mathbb{T}_n(\Omega)$ – множество всех возможных разбиений кадра Ω на n областей; $\mathbf{H}=\{H_1,\ldots,H_n\}$; $\mathbf{h}=(h_1,\ldots,h_n)$; S_{Hi} – площадь области разбиения H_i.

<u>*Определение 2*</u>. Ортогональный базис некоторого линейного подпространства, состоящий из *хаароподобных функций*, будем называть хаароподобным базисом.

<u>*Утверждение 1*</u>. Любое линейное замыкание любого хаароподобного базиса является центрированной Пытьевской формой, и напротив, любая центрированная Пытьевская форма имеет хаароподобный базис, размерность которого на 1 меньше размерности базиса исходной нецентрированной формы.

Формальная теория. Проекция на центрированную форму при помощи хаароподобного базиса

Пусть известен хаароподобный базис $H_{\mathcal{F}} = \{\omega_{\mathcal{F}i}\}_{i=1,..,k}$ центрированной формы $\mathcal{F}$.

Тогда мы можем описать эту форму в альтернативном эквивалентном виде:

$\mathcal{F} = \{f(x,y) = \sum_{i=1,..,k} f_{\mathcal{F}i}\, \omega_{\mathcal{F}i}(x,y),\ \mathbf{f}_{\mathcal{F}} \in R^k\}$,

Теперь может быть определена *проекция на форму* $\mathcal{F}$:

$g_{\mathcal{F}}(x,y) = P_{\mathcal{F}}\, g(x,y) = \sum_{i=1,..,k} g_{\mathcal{F}i}\, \omega_{\mathcal{F}i}(x,y)$,

$g_{\mathcal{F}i} = (\omega_{Fi}, g) \,/\, \| \omega_{Fi} \|^2,\ i = 1,\ldots,k.$

При этом поскольку любому изображению g соответствует его Пытьевская форма G и центрированная форма $\mathcal{G}$, центрирование функции g можно описать как ее проецирование на центрированную форму:

$P_{\mathcal{G}}\, g(x,y) = g_{\mathcal{G}}(x,y) = g(x,y) - g_0$, где g_0 – среднее значение $g(x,y)$ на Ω.

Формальная теория. Морфология локализованных форм

Носитель изображения f:

$\Omega_f = \Omega(f) = \{(x,y)\in R^2\colon f(x,y)\neq 0\}$.

Носителем формы F является максимальный (по включению) носитель входящих в нее изображений. $\Omega_{\mathbf{F}} = \Omega_F = \Omega_{\mathcal{F}}$.

Пусть имеется два изображения f и g с локализацией $\Omega_{\mathcal{F}}$ и $\Omega_{\mathcal{G}}$.

Проекция изображения на носитель:

$P_\Omega\, g(x,y) = \{g\,(x,y)$, если $(x,y)\in\Omega\cap\Omega_{\mathcal{G}}$;

0, если $(x,y)\in(\Omega\cap\Omega_{\mathcal{G}} \setminus \Omega)\}$.

Проектор P_Ω естественно назвать *оператором локализации* функции на носителе Ω.

Формальная теория. Морфология локализованных форм

Проекция на форму локализованного изображения:

$g_{\mathcal{F}}(x,y) = P_{\mathcal{F}} P_{\Omega\mathcal{F}}\, g(x,y) = \{\sum_{i=1,..,k} g_{\mathcal{F}i}\, \omega_{\mathcal{F}i}(x,y)$, если $(x,y)\in\Omega_{\mathcal{F}}\cap\Omega_{\mathcal{G}}$;

0, если $(x,y)\in(\Omega_{\mathcal{F}}\cap\Omega_{\mathcal{G}} \setminus \Omega_{\mathcal{F}})\}$,

где $\Omega_{\mathcal{F}}\cap\Omega_{\mathcal{G}} \setminus \Omega_{\mathcal{F}}$ – дополнение $\Omega_{\mathcal{F}}\cap\Omega_{\mathcal{G}}$ до $\Omega_{\mathcal{F}}$.

Сумма и скалярное произведение локализованных изображений:

$f(x,y) + g(x,y) = P_{\Omega\mathcal{F}\cup\Omega\mathcal{G}}\, f(x,y) + P_{\Omega\mathcal{F}\cup\Omega\mathcal{G}}\, g(x,y)$,

$(f(x,y), g(x,y)) = (P_{\Omega\mathcal{F}\cup\Omega\mathcal{G}}\, f(x,y), P_{\Omega\mathcal{F}\cup\Omega\mathcal{G}}\, g(x,y))$.

Прямая сумма локализованных форм:

$\mathcal{F}+\mathcal{G} = \{f(x,y) + g(x,y)\colon f\in\mathcal{F};\, g\in\mathcal{G}\}$.

Таким образом, можно считать определенной *морфологию локализованных изображений*, для которой полностью актуальны все определения и инструменты морфологии Пытьева.

Формальная теория. Хаароподобные локусы и хаароподобные вейвлет-базисы

<u>*Определение 3*</u>. Класс *хаароподобных локусов* $\mathbb{HL}$ есть класс локализованных хаароподобных функций, действия с которыми определены так, как это описано выше: $\mathbb{HL} = \{P_{\Omega}\, h(x,y),\ h(x,y) \in \mathbb{H},\ \Omega \in R^2\}$.

<u>*Определение 4*</u>. Ортогональный базис, состоящий из хаароподобных локусов с совпадающим носителем, будем называть *локальным хаароподобным базисом*.

<u>*Определение 5*</u>. *Разномасштабным хаароподобным базисом* называется такой ортогональный хаароподобный базис, который включает несколько различных локальных ортогональных хаароподобных базисов с различными носителями $\{\Omega_{\mathcal{F}1}, \ldots, \Omega_{\mathcal{F}N}\}$, причем между носителями любой пары локальных базисов имеется отношение строгого включения.

Формальная теория. Хаароподобные локусы и хаароподобные вейвлет-базисы

Определение 6. Базис называется *полным* для формы $\mathcal{F}$, если его замыкание совпадает с формой $\mathcal{F}$ на носителе $\Omega_{\mathcal{F}}$.

Определение 7. Если некоторый разномасштабный ортогональный хаароподобный базис является полным для центрированной формы $\mathcal{F}$ с носителем $\Omega_{\mathcal{F}}$, то такой базис называется *хаароподобным вейвлет-базисом формы* $\mathcal{F}$, а все составляющие его хаароподобные локусы называются *хаароподобными вейвлетами формы* $\mathcal{F}$.

Примечание. Обычно мы по умолчанию имеем в виду только один вид формы (разбиения кадра) – прямоугольную решетку пиксельных единичных квадратных областей. Если же мы будем отталкиваться от другого типа решетки (например, шестиугольной) или вообще от нерегулярных разбиений области определения (например, по триангуляции особых точек), мы получим другие системы хаароподобных вейвлетов, допустимые согласно данному определению, но они будут полными только относительно заданной мозаичной формы.

Формальная теория. Хааролодобные вейвлет-преобразования

Определение 8. Пусть для формы $\mathcal{F}$ известен хааролодобный вейвлет-базис $HW_{\mathcal{F}}$ $=\{\omega_{\mathcal{F}i}\}_{i=1,..,k}$, и следовательно $f\in\mathcal{F}$ имеет вид

$f(x,y) = \sum_{i=1,..,k} f_{\mathcal{F}i}\ \omega_{\mathcal{F}i}(x,y)$, $\mathbf{f}_{\mathcal{F}}\in R^k$.

Тогда вектор $\mathbf{f}_{\mathcal{F}} =\{f_{\mathcal{F}i}\}_{i=1,..,k}$ называется *вейвлет-разложением* функции f по $HW_{\mathcal{F}}$,

ψ: $\mathcal{F} \to R^k$, $f(x,y) \to \mathbf{f}_{\mathcal{F}}$

называется *хааролодобным вейвлет-преобразованием с базисом* $HW_{\mathcal{F}}$, а

ψ^{-1}: $R^k \to \mathcal{F}$, $\mathbf{f}_{\mathcal{F}} \to f(x,y) = \sum_{i=1,..,k} f_{\mathcal{F}i}\ \omega_{\mathcal{F}i}(x,y)$

называется *обратным хааролодобным вейвлет-преобразованием с базисом* $HW_{\mathcal{F}}$.

Как видно, хааролодобные вейвлет-преобразования (прямое и обратное) оказались определены относительно некоторой центрированной Пытьевской формы с учетом ее локализации и задаваемого ей мозаичного разбиения соответствующего носителя.

Формальная теория. Хааროподобные вейвлет-преобразования

<u>*Определение 8*</u>. Пусть для формы $\mathcal{F}$ известен хаароподобный вейвлет-базис $HW_{\mathcal{F}}$ $=\{\omega_{\mathcal{F}i}\}_{i=1,..,k}$, и следовательно $f\in\mathcal{F}$ имеет вид

$f(x,y) = \sum_{i=1,..,k} f_{\mathcal{F}i}\, \omega_{\mathcal{F}i}(x,y)$, $\mathbf{f}_{\mathcal{F}}\in R^k$.

Тогда вектор $\mathbf{f}_{\mathcal{F}} =\{f_{\mathcal{F}i}\}_{i=1,..,k}$ называется *вейвлет-разложением* функции f по $HW_{\mathcal{F}}$,

$\psi\colon \mathcal{F} \to R^k$, $f(x,y) \to \mathbf{f}_{\mathcal{F}}$

называется *хаароподобным вейвлет-преобразованием с базисом* $HW_{\mathcal{F}}$, а

$\psi^{-1}\colon R^k \to \mathcal{F}$, $\mathbf{f}_{\mathcal{F}} \to f(x,y) = \sum_{i=1,..,k} f_{\mathcal{F}i}\, \omega_{\mathcal{F}i}(x,y)$

называется *обратным хаароподобным вейвлет-преобразованием с базисом* $HW_{\mathcal{F}}$.

Как видно, хаароподобные вейвлет-преобразования (прямое и обратное) оказались определены относительно некоторой центрированной Пытьевской формы с учетом ее локализации и задаваемого ей мозаичного разбиения соответствующего носителя.

Формальная теория. Хааροподобные вейвлет-преобразования

Утверждение 2. Пусть дан *базис хаароподобных вейвлетов* формы $\mathcal{F}$, который включает несколько различных локальных ортогональных хаароподобных базисов с различными носителями $HW_{\mathcal{F}} = \{HW_{\mathcal{F}1}, \ldots, HW_{\mathcal{F}N}\}$, тогда форма $\mathcal{F}$ есть прямая сумма составляющих ее локальных форм: $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 + \ldots + \mathcal{F}_N$.

Доказательство следует непосредственно из ортогональности всех вейвлетов в базисе $HW_{\mathcal{F}}$ и полноты этого вейвлет-базиса.

Формальная теория. Иерархии локализованных форм

Локализованную форму **G** с носителем Ω_G назовем *дочерней* по отношению к форме **F**=$\{F_1,\ldots,F_n\}$ с носителем Ω_F, если $\exists i$: $\Omega_G = F_i$. Форма **F** по отношению к **G** называется *родительской*.

<u>*Определение 9*</u>. Множество мозаичных форм называется *пространственной иерархией форм*, если для любой формы в данном множестве имеется либо дочерняя, либо родительская, причем родительских форм не имеет только одна форма, называемая *корнем иерархии*.

<u>*Утверждение 3*</u>. Иерархии форм всегда может быть поставлен в соответствие граф типа дерево, вершины которого соответствуют локальным формам из иерархии, а ребра связывают только дочерние и родительские формы. Такой граф можно назвать *деревом локализованных форм*.

Формальная теория. Иерархии локализованных форм

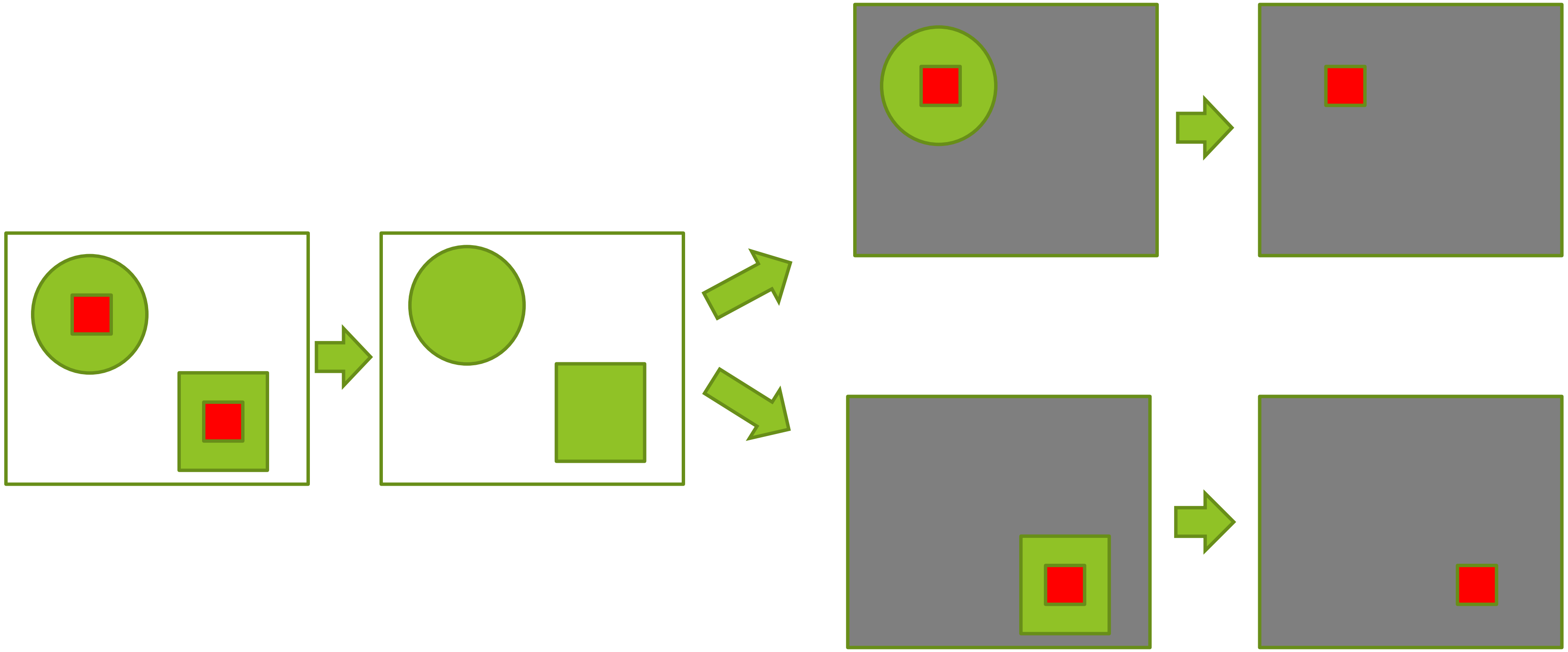
Определение 10. Пространственная иерархия форм называется *полной иерархией подформ формы* $\mathcal{F}$, если сумма всех форм данной иерархии равна $\mathcal{F}$.

Утверждение 4. Для любой формы $\mathcal{F}$ можно построить полную иерархию подформ.

Утверждение 5. Множество локальных хаароподобных базисов некоторой полной иерархии подформ формы $\mathcal{F}$ составляют ее хаароподобный вейвлет-базис.

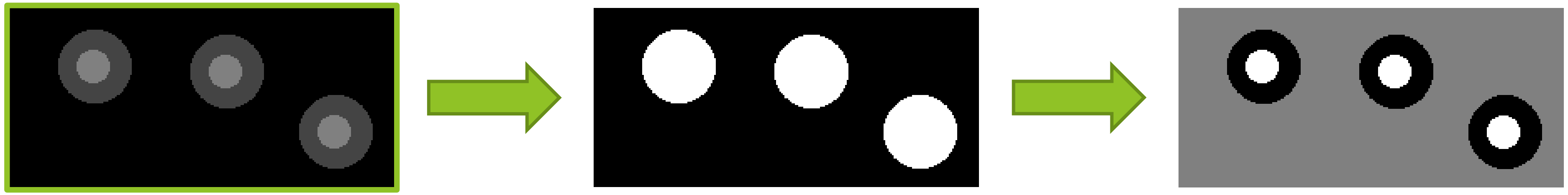
Определение 11. *Деревом хаароподобных вейвлетов формы* $\mathcal{F}$ называется хаароподобный вейвлет-базис, состоящий из множества локальных хаароподобных базисов некоторой полной иерархии подформ формы $\mathcal{F}$.

Морфлеты как дерево локализованных форм

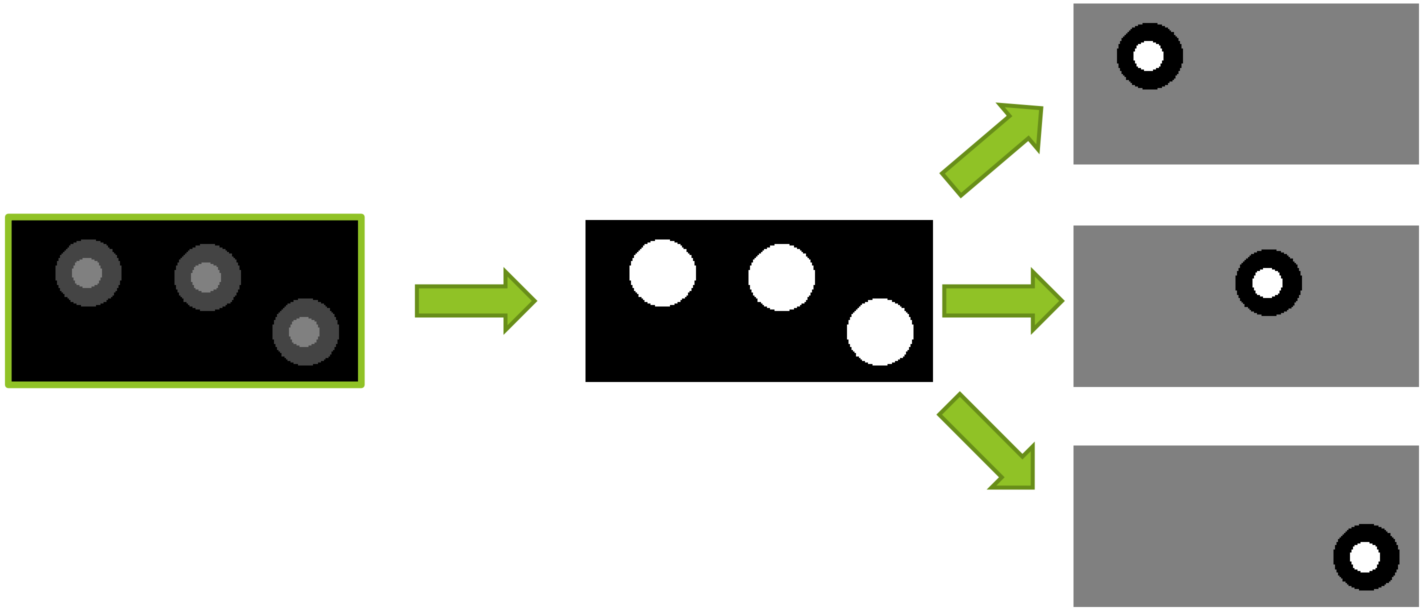


Свойства морфлетов позволяют строить иерархическое описание формы изображения, как набора форм отдельных объектов на изображении и набора отношений между ними по включению, что позволяет использовать алгоритмы работы с деревьями совместно с математическим аппаратом морфологии Пытьева.

Деревья морфлетов разной топологии



Бинарное дерево морфлетов



Дерево морфлетов

Способы построения морфлетных описаний

Морфлеты на базе уровневых деревьев

Морфлеты на базе α-деревьев

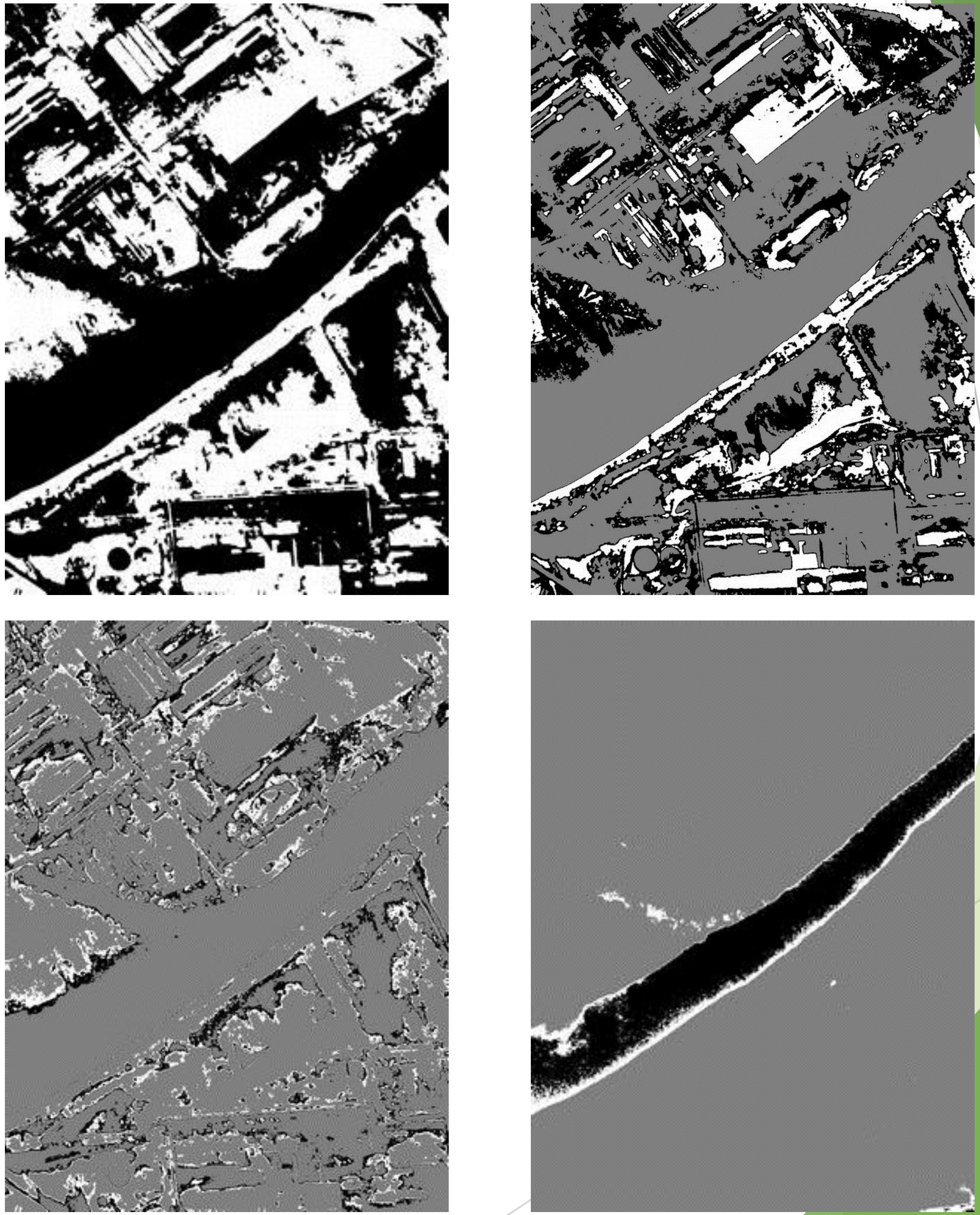
Морфлеты на базе гистограммной сегментации (Отсу-деревья)

Морфлеты на базе линейных разбиений плоскости

…

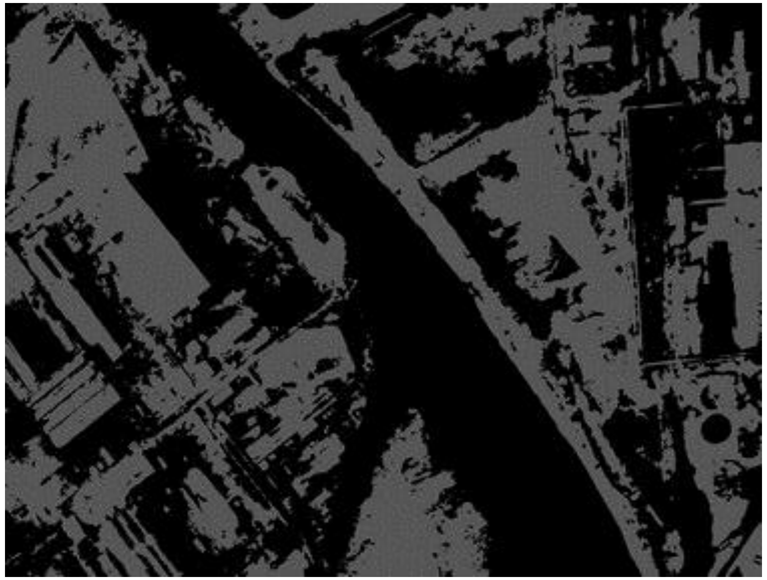
Пример построения морфлетного описания формы изображения

Исходное изображение



Пример построения морфлетной проекции на свою форму

Исходное изображение



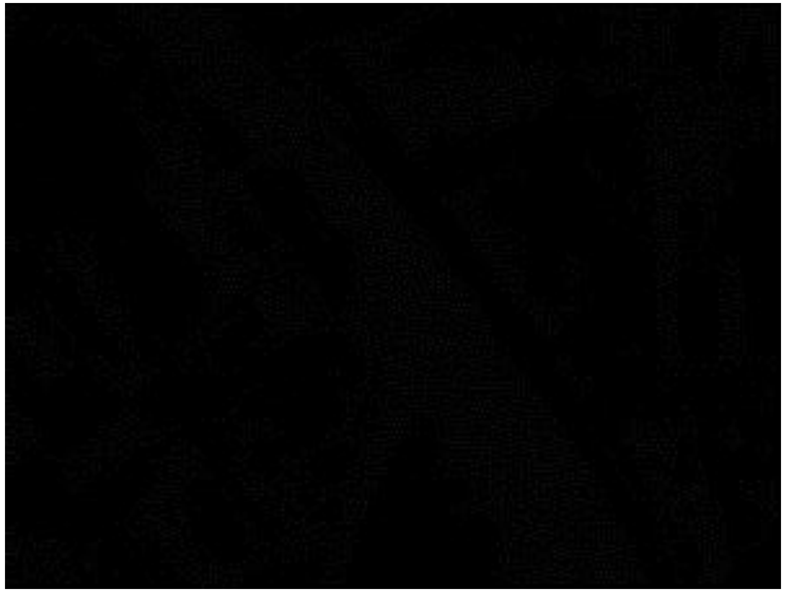
Проекция на 1 уровень

Проекция на 2 уровня

Проекция на 3 уровня

Пример построения морфлетной проекции на чужую форму

Исходное изображение

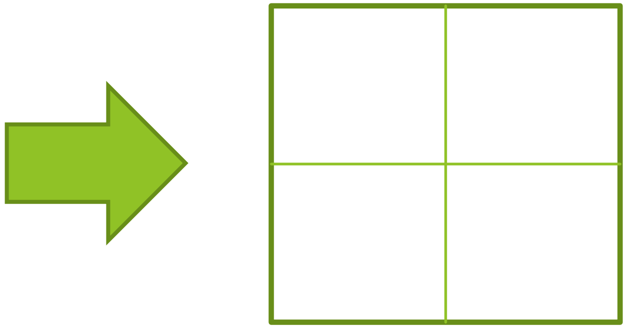


Проекция на 1 уровень

Проекция на 2 уровня

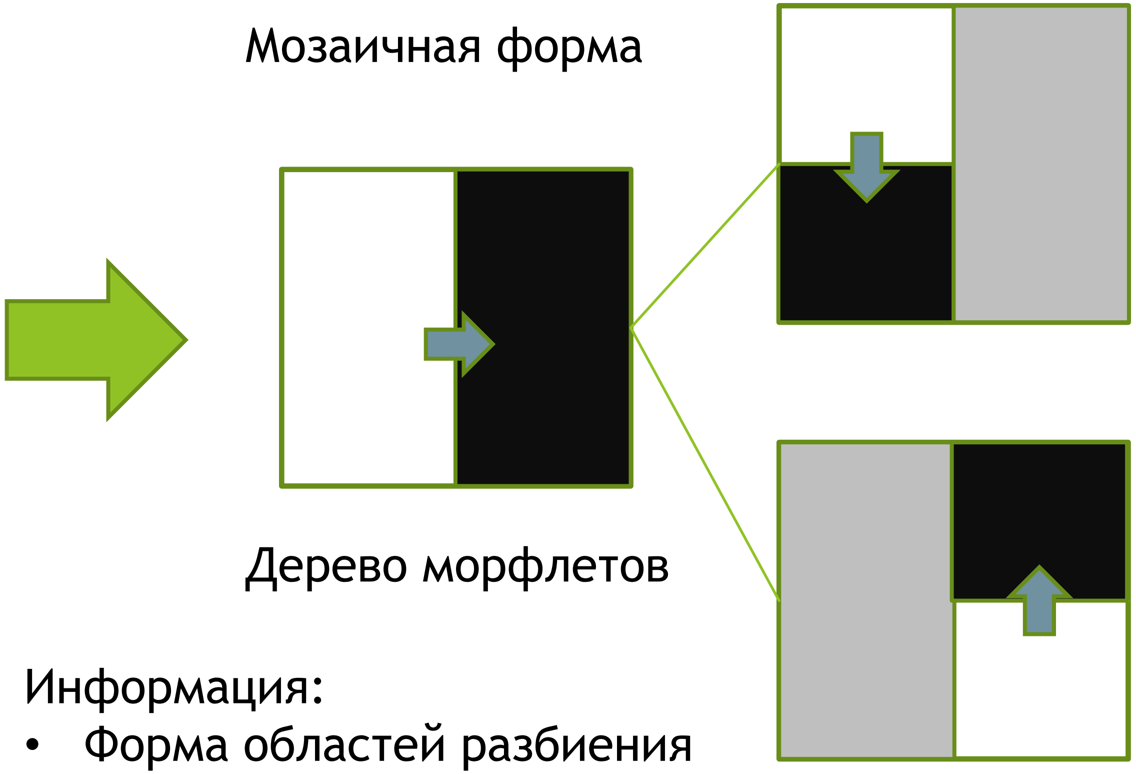
Проекция на 3 уровня

Почему морфлетная проекция более селективна?



Информация:
- Форма областей разбиения
- Отношения различий по яркости

Мозаичная форма

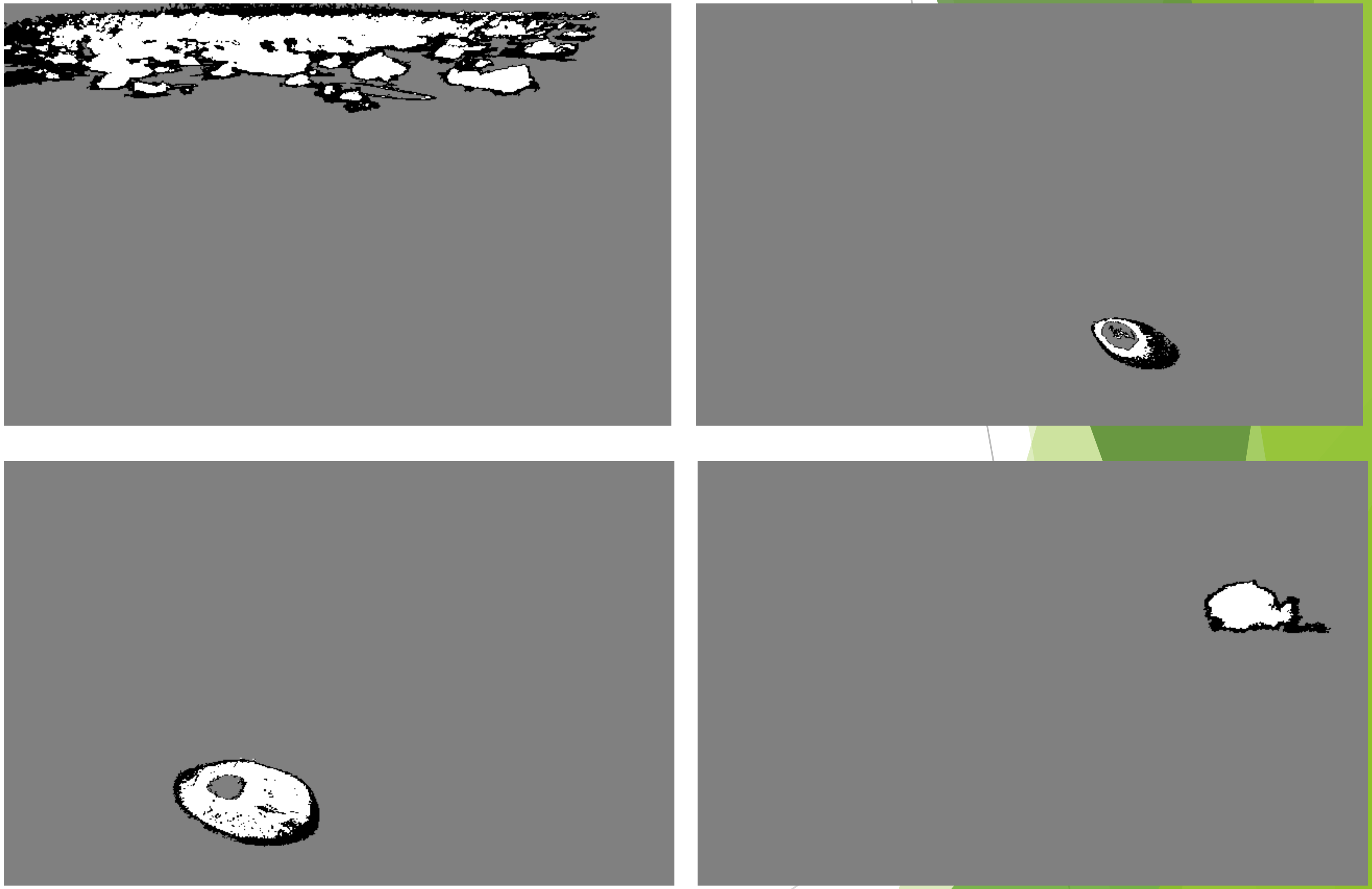


Дерево морфлетов

Информация:
- Форма областей разбиения
- Иерархия значимых контрастов в различных масштабах
- Знаки отношений между элементами (опционально)

Примеры построения морфлетных описаний формы изображения

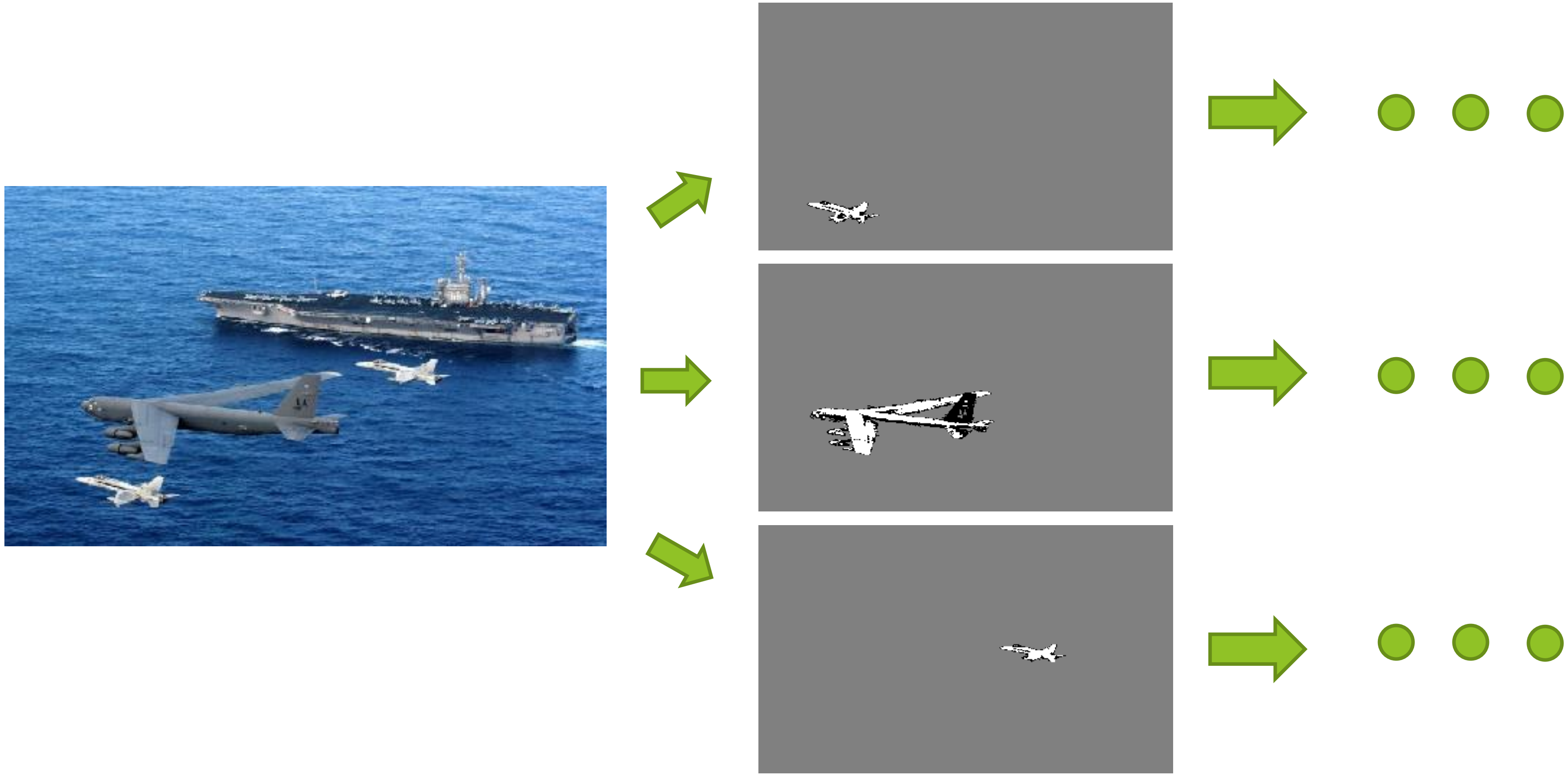
Исходное изображение



Примеры построения морфлетных описаний формы изображения

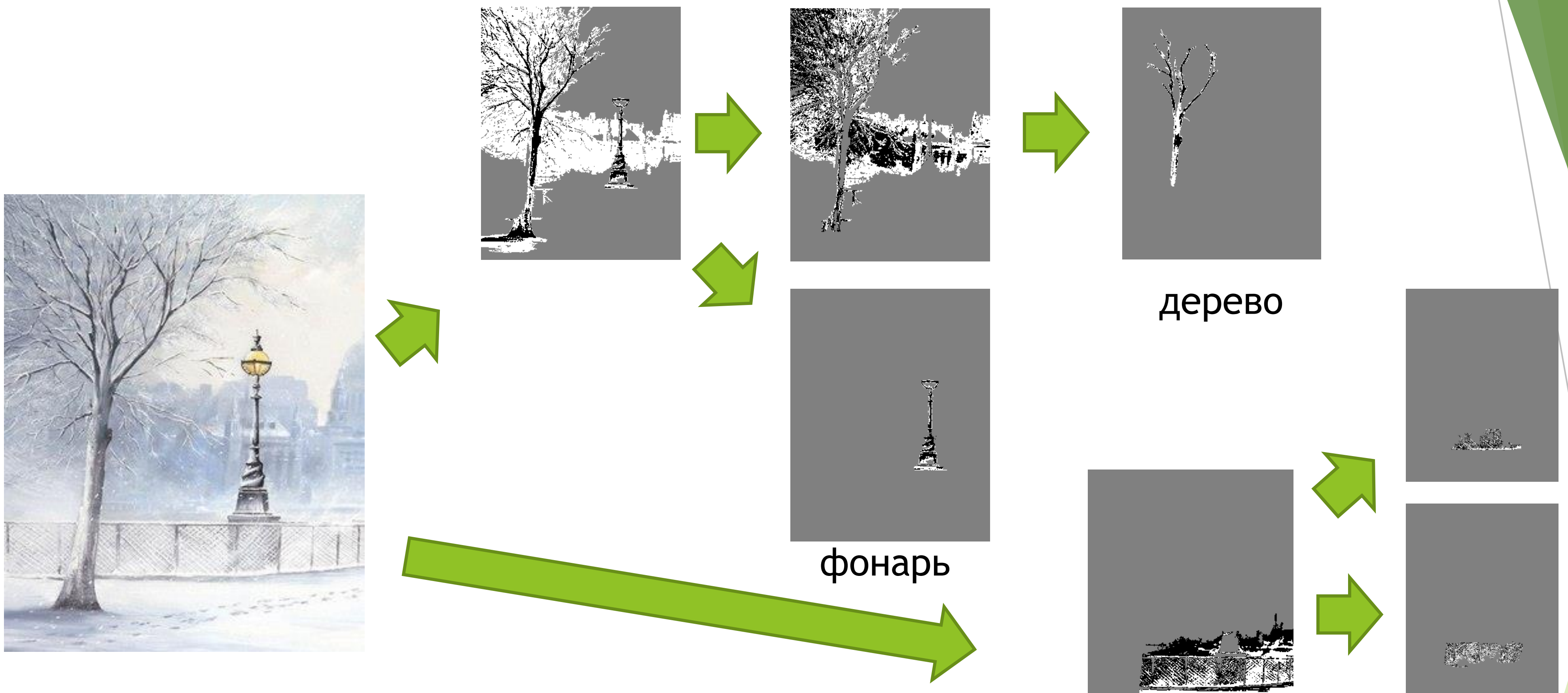
Исходное изображение

Задачи поиска объектов на изображении



Каждое поддерево дерева морфлетов характеризует форму изображения в пределах своего носителя. Поэтому задача поиска объектов может решаться крайне эффективно путем поиска и сравнения поддеревьев с использованием классических морфологических коэффициентов корреляции.

Распознавание объектов и анализ сцены



Благодаря наличию четкой иерархии форм дерево морфлетов может использоваться в задачах распознавания объектов и анализа сцены. При этом можно в полной мере использовать математический аппарат морфологии центрированных изображений.

Заключение

1. На основе обобщения схемы построения системы вейвлетов Хаара и установления их связи с морфологией Пытьева предложен новый класс древовидных описаний формы изображений.

2. Показано, что Пытьевские морфологии центрированных изображений могут быть построены на основе хаароподобных базисов.

3. Определены морфологии локализованных форм и соответствующие хаароподобные вейвлеты.

4. Указан формальный способ построения иерархии локализованных форм и соответствующих деревьев хаароподобных вейвлетов.

5. Введено понятие морфлетов как хаароподобных вейвлетов, согласованных по форме с изображением или ансамблем (классом) изображений.