

# Анализ априорных распределений в задаче смеси экспертов

Грабовой Андрей Валериевич

Московский физико-технический институт

МФТИ, г. Долгопрудный

**Цель:** предложить метод построения ансамбля локально аппроксимирующих моделей для поиска окружностей на изображении.

## Задачи

- 1 Предложить метод поиска окружности при помощи линейной модели, для поиска нескольких окружностей предложить метод построения смеси локальных аппроксимирующих моделей.
- 2 Предложить априорные распределения на параметры локальных моделей.

## Исследуемая проблема

- 1 Снижение размерности пространства описаний изображения.

## Метод решения

В качестве мультимодели предлагается использовать смесь экспертов. Для повышения качества мультимодели предлагается ввести априорные распределения параметров локальных моделей. Вводится *регуляризация* априорных распределений для учета взаимосвязи между априорными распределениями разных локальных моделей смеси.

- 1 *Yuksel Seniha Esen, Wilson Joseph N., Gader Paul D* Twenty Years of Mixture of Experts // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. 2012. Issues. 23, No 8. pp. 1177–1193.
- 2 *A. P. Dempster, N. M. Laird and D. B. Rubin* Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), Vol. 39, No. 1 pp. 1-38, 1977.
- 3 *Bishop C.* Pattern Recognition and Machine Learning. — Berlin: Springer, 2006. 758 p.
- 4 *I. Matveev* Detection of iris in image by interrelated maxima of brightness gradient projections // Appl.Comput. Math. 9 (2), 252–257, 2010.
- 5 *K. Bowyer, K. Hollingsworth, P. Flynn* A Survey of Iris Biometrics Research: 2008–2010.

# Постановка задачи нахождения параметров окружностей

Задано бинарное изображение:

$$\mathbf{M} \in \{0, 1\}^{m_1 \times m_2},$$

где 1 — черная точка, 0 — белая точка фона.

По изображению  $\mathbf{M}$  строится выборка  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times 2},$$

где  $N$  — число черных точек на изображении  $\mathbf{M}$ .

Пусть  $x_0, y_0$  — центр окружности, которую требуется найти, а  $r$  ее радиус.

Точки  $(x_i, y_i) \in \mathbf{C}$  должны удовлетворять уравнению окружности:

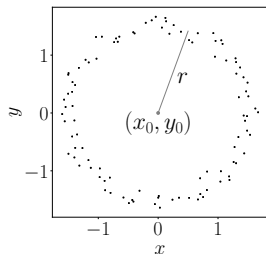
$$(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 = r^2 \Rightarrow (2x_0) \cdot x_i + (2y_0) \cdot y_i + (r^2 - x_0^2 - y_0^2) \cdot 1 = x_i^2 + y_i^2.$$

Задачу линейной регрессии для нахождения окружности:

$$\mathbf{X}\mathbf{w} \approx \mathbf{y}, \quad \mathbf{X} = [\mathbf{C}, \mathbf{1}], \quad \mathbf{y} = [x_1^2 + y_1^2, x_2^2 + y_2^2, \dots, x_N^2 + y_N^2]^\top,$$

где найденные оптимальные параметры линейной регрессии  $\mathbf{w} = [w_1, w_2, w_3]^\top$  восстанавливают параметры окружности:

$$x_0 = \frac{w_1}{2}, \quad y_0 = \frac{w_2}{2}, \quad r = \sqrt{w_3 + x_0^2 + y_0^2}.$$



Задана выборка:

$$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{N \times n},$$

где  $N$  — число объектов в выборке, а  $n$  — размерность признакового пространства.

## Definition

Смесь экспертов — мультимодель, определяющая правдоподобие веса  $\pi_k$  каждой локальной модели  $\mathbf{f}_k$  на признаковом описании объекта  $\mathbf{x}$ .

$$\hat{\mathbf{f}} = \sum_{k=1}^K \pi_k \mathbf{f}_k, \quad \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) : \mathbb{R}^{n \times |\mathbf{V}|} \rightarrow [0, 1], \quad \sum_{k=1}^K \pi_k(\mathbf{x}, \mathbf{V}) = 1,$$

где  $\hat{\mathbf{f}}$  — мультимодель, а  $\mathbf{f}_k$  является локальной моделью,  $\pi_k$  — шлюзовая функция,  $\mathbf{w}_k$  — параметры  $k$ -й локальной модели,  $\mathbf{V}$  — параметры шлюзовой функции.

В качестве локальных моделей  $\mathbf{f}_k$  и шлюзовой функции  $\pi$  рассматриваются следующие функции:

$$\mathbf{f}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{w}_k^T \mathbf{x}, \quad \pi(\mathbf{x}, \mathbf{V}) = \text{softmax}(\mathbf{V}_1^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{V}_2^T \mathbf{x})),$$

где  $\mathbf{V} = \{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2\}$  — параметры шлюзовой функции.

Параметры локальных моделей оптимизируются согласно принципу максимального правдоподобия модели:

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}) = \prod_{k=1}^K p^k(\mathbf{w}_k) \prod_{i=1}^N \left( \sum_{k=1}^K \pi_k p_k(y_i | \mathbf{w}_k, \mathbf{x}_i) \right),$$

где  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_K]^T$ .

Задача оптимизации параметров локальных моделей и параметров смеси:

$$\hat{\mathbf{W}}, \hat{\mathbf{V}} = \arg \max_{\mathbf{W}, \mathbf{V}} p(\mathbf{y}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}).$$

Рассматривается вероятностная постановка задачи:

- 1) правдоподобие выборки  $p_k(y_i | \mathbf{w}_k, \mathbf{x}_i) = \mathcal{N}(y_i | \mathbf{w}_k^T \mathbf{x}_i, \beta^{-1})$ , где  $\beta$  уровень шума,
- 2) априорное распределение параметров  $p^k(\mathbf{w}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{w}_k | \mathbf{w}_k^0, \mathbf{A}_k)$ , где  $\mathbf{w}_k^0$  — вектор размера  $n \times 1$ ,  $\mathbf{A}_k$  — ковариационная матрица параметров,
- 3) регуляризация априорного распределения  $p(\boldsymbol{\varepsilon}_{k,k'} | \boldsymbol{\alpha}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\varepsilon}_{k,k'} | \mathbf{0}, \boldsymbol{\Xi})$ , где  $\boldsymbol{\Xi}$  — ковариационная матрица общего вида,  $\boldsymbol{\varepsilon}_{k,k'} = \mathbf{w}_k^0 - \mathbf{w}_{k'}^0$ .

Правдоподобие модели включает правдоподобие выборки, априорное распределение параметров, а также их регуляризацию

$$p(\mathbf{y}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{W}^0, \Xi, \beta) = \prod_{k,k'=1}^K \mathcal{N}(\boldsymbol{\varepsilon}_{k,k'} | \mathbf{0}, \Xi) \cdot \prod_{k=1}^K \mathcal{N}(\mathbf{w}_k | \mathbf{w}_k^0, \mathbf{A}_k) \prod_{i=1}^N \left( \sum_{k=1}^K \pi_k \mathcal{N}(y_i | \mathbf{w}_k^\top \mathbf{x}_i, \beta^{-1}) \right),$$

где  $\mathbf{A} = \{\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_K\}$ . Введем скрытые переменные  $\mathbf{Z} = [z_{ik}]$ , где  $z_{ik} = 1$  тогда и только тогда, когда  $k_i = k$ :

$$\begin{aligned} \log p(\mathbf{y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{W}^0, \Xi, \beta) = & \\ & \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K z_{ik} \left[ \log \pi_k(\mathbf{x}_i, \mathbf{V}) - \frac{\beta}{2} (y_i - \mathbf{w}_k^\top \mathbf{x}_i)^2 + \frac{1}{2} \log \frac{\beta}{2\pi} \right] + \\ & + \sum_{k=1}^K \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k^0)^\top \mathbf{A}_k^{-1} (\mathbf{w}_k - \mathbf{w}_k^0) + \frac{1}{2} \log \det \mathbf{A}_k^{-1} - \frac{n}{2} \log 2\pi \right] + \\ & + \sum_{k=1}^K \sum_{k'=1}^K \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{w}_k^0 - \mathbf{w}_{k'}^0)^\top \hat{\boldsymbol{\alpha}}^{-1} (\mathbf{w}_k^0 - \mathbf{w}_{k'}^0) + \frac{1}{2} \log \det \Xi - \frac{n}{2} \log 2\pi \right]. \end{aligned}$$

Задача оптимизации параметров локальных моделей и параметров смеси принимает следующий вид:

$$\mathbf{W}, \mathbf{Z}, \mathbf{V}, \mathbf{W}^0, \mathbf{A}, \beta = \arg \max_{\mathbf{W}, \mathbf{Z}, \mathbf{V}, \mathbf{W}^0, \mathbf{A}, \beta} \log p(\mathbf{y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{W}^0, \Xi, \beta).$$

Для оптимизации используется вариационный EM-алгоритм с аппроксимацией среднего поля  $q(\mathbf{Z}, \mathbf{W}) = q(\mathbf{Z})q(\mathbf{W})$ .

E и M шаги алгоритма имеют следующий вид:

① E-шаг:

$$\begin{aligned} \log q(\mathbf{Z}^s) &\propto E_{q/\mathbf{Z}} \log p(\mathbf{y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}^{s-1}, \mathbf{A}^{s-1}, \mathbf{W}^{0,s-1}, \Xi, \beta^{s-1}), \\ \log q(\mathbf{W}^s) &\propto E_{q/\mathbf{W}} \log p(\mathbf{y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}^{s-1}, \mathbf{A}^{s-1}, \mathbf{W}^{0,s-1}, \Xi, \beta^{s-1}), \end{aligned}$$

② M-шаг:

$$\mathbf{W}^{0,s}, \mathbf{A}^s, \mathbf{V}^s, \beta^s = \arg \max_{\mathbf{W}^0, \mathbf{A}, \mathbf{V}, \beta} E_{q^s} \log p(\mathbf{y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{W}^0, \Xi, \beta),$$

где  $s$  — номер итерации.



Итерационные формулы EM-алгоритма:

1 E-шаг:

$$p(z_{ik} = 1) = \frac{\exp(\log \pi_k(\mathbf{x}_i, \mathbf{V}) - \frac{\beta}{2} (\mathbf{x}_i^T \mathbf{E} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{E} \mathbf{w}_k))}{\sum_{k'=1}^K \exp(\log \pi_{k'}(\mathbf{x}_i, \mathbf{V}) - \frac{\beta}{2} (\mathbf{x}_i^T \mathbf{E} \mathbf{w}_{k'} \mathbf{w}_{k'}^T \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^T \mathbf{E} \mathbf{w}_{k'}))},$$

$$q(\mathbf{w}_k) = \mathcal{N}(\mathbf{w}_k | \mathbf{m}_k, \mathbf{B}_k),$$

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{B}_k \left( \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{w}_k^0 + \beta \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i y_i \mathbf{E} z_{ik} \right), \quad \mathbf{B}_k = \left( \mathbf{A}_k^{-1} + \beta \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \mathbf{x}_i^T \mathbf{E} z_{ik} \right)^{-1}.$$

2 M-шаг:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{E} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T - \mathbf{w}_k^0 \mathbf{E} \mathbf{w}_k^T - \mathbf{E} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^{0T} + \mathbf{w}_k^0 \mathbf{w}_k^{0T},$$

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^K \left[ y_i^2 - 2y_i \mathbf{x}_i^T \mathbf{E} \mathbf{w}_k + \mathbf{x}_i^T \mathbf{E} \mathbf{w}_k \mathbf{w}_k^T \mathbf{x}_i \right] \mathbf{E} z_{ik},$$

$$\mathbf{w}_k^0 = [\mathbf{A}_k^{-1} + (K-1) \mathbf{\Xi}]^{-1} \left( \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{E} \mathbf{w}_k + \mathbf{\Xi} \sum_{k'=1, k' \neq k}^K \mathbf{w}_{k'}^0 \right),$$

$$\mathbf{V} = \arg \max_{\mathbf{V}} \mathbf{E}_{q^s} \log p(\mathbf{y}, \mathbf{Z}, \mathbf{W} | \mathbf{X}, \mathbf{V}, \mathbf{A}, \mathbf{W}^0, \mathbf{\Xi}, \beta).$$

Вычислительный эксперимент делится на следующие этапы:

- 1 Анализ синтетических данных с разным типом шума в изображении;
- 2 Анализ изменения параметров локальных моделей во время обучения;
- 3 Анализ мультимodelей в зависимости от уровня шума в изображении;
- 4 Анализ качества модели на реальных данные.

Гиперпараметры заданы следующим образом:

- 1 Априорные распределения на параметры локальных моделей в эксперименте задано следующим образом:

$$p^1(\mathbf{w}_1) \sim \mathcal{N}(\mathbf{w}_1^0, \mathbf{I}), \quad p^2(\mathbf{w}_2) \sim \mathcal{N}(\mathbf{w}_2^0, \mathbf{I}),$$

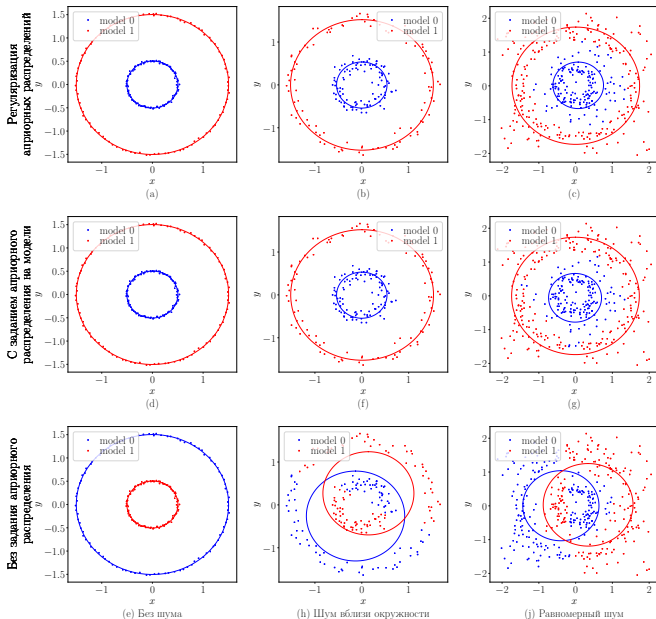
где  $\mathbf{w}_1^0 = [0, 0, 0.1]$ ,  $\mathbf{w}_2^0 = [0, 0, 2]$ .

- 2 Параметр регуляризации:

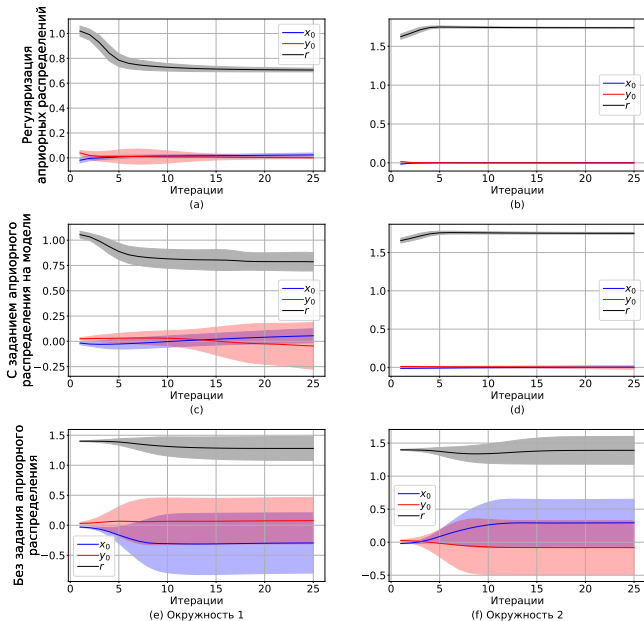
$$\Xi = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

что указывает на концентричность окружностей.

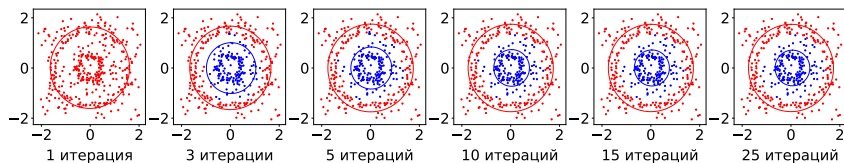
# Синтетические данные с разным типом шума в изображении



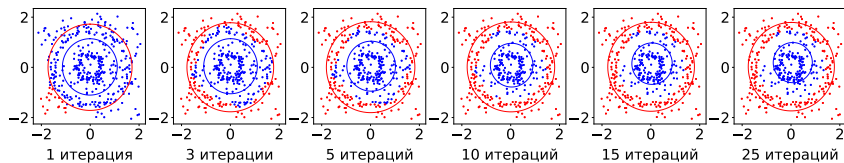
# Параметры локальных моделей в процессе обучения



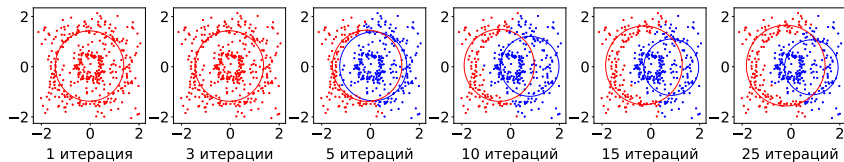
## Регуляризация априорных распределений



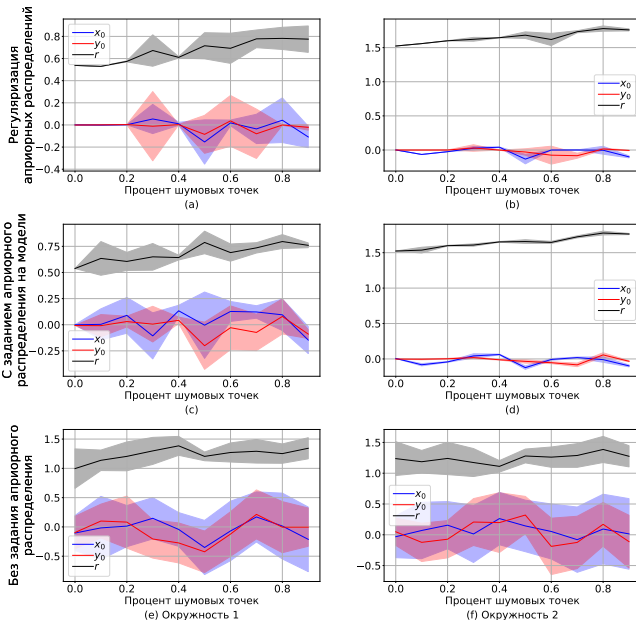
## С заданием априорного распределения на модели

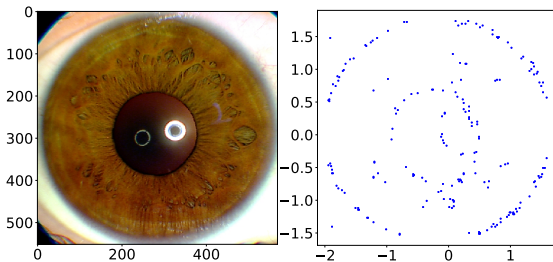


## Без задания априорного распределения



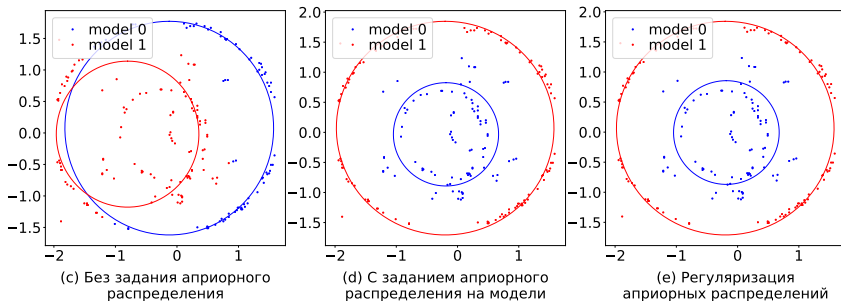
# Анализ мультимоделей в зависимости от уровня шума





(a) Исходное изображение

(b) Бинаризованное изображение

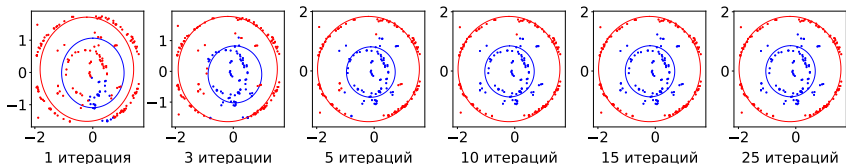


(c) Без задания априорного распределения

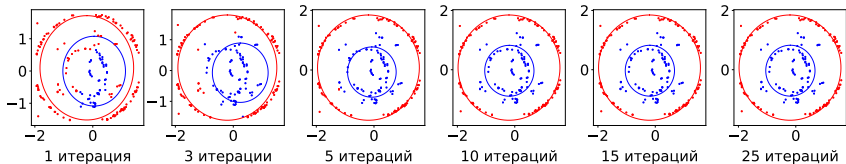
(d) С заданием априорного распределения на модели

(e) Регуляризация априорных распределений

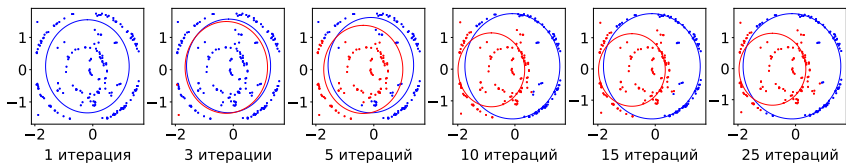
## Регуляризация априорных распределений



## С заданием априорного распределения на модели



## Без задания априорного распределения





Сделано:

- 1 Предложен метод поиска окружностей на бинарном изображении с различными априорными предположениями.
- 2 Введено понятие регуляризации априорных распределений для улучшения качества мультимодели.
- 3 В эксперименте показано, что задания регуляризации позволяет улучшить качество и устойчивость модели.

Планируется:

- 1 Улучшить мультимодель при помощи задания априорного распределения на шлюзовую функцию.
- 2 Рассмотреть в качестве локальных моделей не только модели, которые описывают данные, а также модель, которая отвечает за шум в данных.
- 3 Расширить класс локальных моделей с окружности до произвольной кривой второго порядка.