Методы оптимизации, ВМК, осень 2018

Семинар 4: Выпуклые множества

1 Определение и основные примеры

Определение 1.1 (Выпуклые множества)**.** Пусть U — вещественное векторное пространство, Q — подмножество U. Множество Q называется *выпуклым*, если для любых двух точек x, y из множества Q и любого $0 \le \alpha \le 1$ точка $\alpha x + (1-\alpha)y$ также принадлежит множеству Q.

Другими словами, множество Q называется выпуклым, если для каждой пары точек $x, y \in Q$, множество Q также содержит весь *отрезок* $[x, y] := \{\alpha x + (1-\alpha)y : 0 \le \alpha \le 1\}$. Точка вида $\alpha x + (1-\alpha)y$ для $\alpha \in [0, 1]$ называется *выпуклой комбинацией* точек x, y.

Пример 1.2 (Тривиальные выпуклые множества)**.** Все пространство U, множество из одного элемента $\{a\}$ (где $a \in U$) и пустое множество $\emptyset$ являются выпуклыми.[1]

Пример 1.3 (Множество решений системы линейных ограничений)**.** Пусть в пространстве U задано (произвольное) скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пусть I — произвольное (не обязательно конечное и не обязательно счетное) индексное множество, и пусть для каждого индекса $i \in I$ заданы вектор $a_i \in U$ и скаляр $b_i \in \mathbb{R}$. Рассмотрим систему линейных неравенств

$$\langle a_i, x \rangle \le b_i \qquad \text{для всех } i \in I, \tag{1.1}$$

где $x \in U$. Тогда соответствующее множество всевозможных решений системы (1.1), т. е. множество

$$Q := \{x \in U : \langle a_i, x \rangle \le b_i \text{ для всех } i \in I\}$$

является выпуклым.

Действительно, пусть $x, y \in Q$ и $0 \le \alpha \le 1$. Тогда для любого $i \in I$ выполняется

$$\langle a_i, \alpha x + (1-\alpha)y \rangle = \alpha \langle a_i, x \rangle + (1-\alpha)\langle a_i, y \rangle \le \alpha b_i + (1-\alpha) b_i = b_i.$$

Таким образом, $\alpha x + (1-\alpha)y \in Q$.

Заметим, что в этом примере абсолютно не принципиально, что в системе линейных ограничений (1.1) используется именно неравенство $\le$. Нетрудно видеть, что если некоторые (возможно, даже все) из неравенств $\le$ заменить на $\ge$ или $=$ (или $<$, или $>$), то множество Q по-прежнему останется

[1] Последнее следует из того, что не существует такой пары точек $x, y \in \emptyset$, для которой отрезок $[x, y]$ не принадлежит множеству — для пустого множества нельзя предъявить даже точку $x \in \emptyset$.

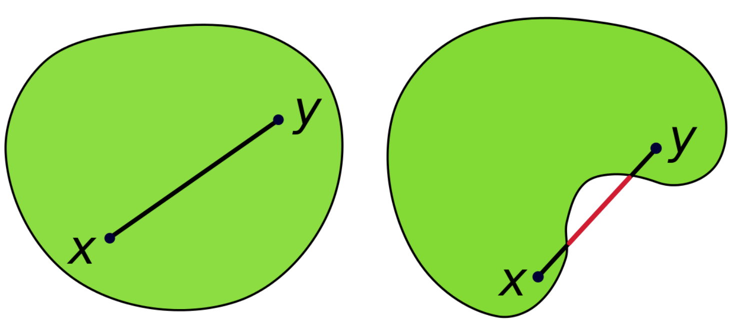

Рис. 1: Иллюстрация к определению выпуклого множества из Википедии. Слева: выпуклое множество; справа: невыпуклое множество.

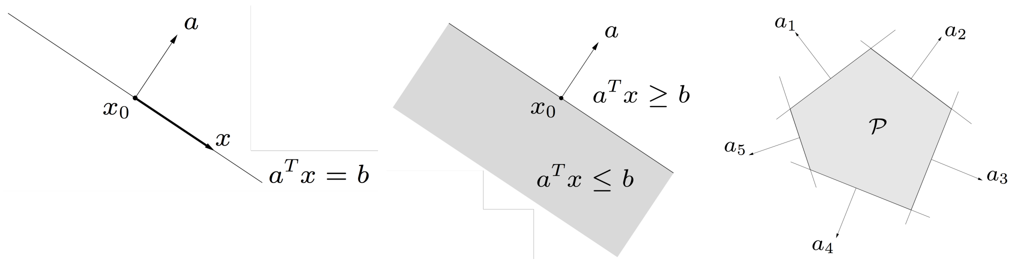

Рис. 2: Иллюстрация к примерам. Слева направо: гиперплоскость, полупространство, полиэдр.

выпуклым. Таким образом, *множество решений произвольной системы линейных ограничений является выпуклым.*

Рассмотрим наиболее популярные частные случаи. Во всех примерах мы работаем в пространстве $U := \mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением.

(a) *Гиперплоскость*, т. е. множество вида

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle = b\},$$

где $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$, является выпуклым.

(b) *Полупространство*, т. е. множество вида

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle a, x \rangle \leq b\},$$

где $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ и $b \in \mathbb{R}$, является выпуклым.

(c) *Полиэдр*, т. е. множество вида

$$\{x \in \mathbb{R}^n : Ax \preceq b,\ Cx = d\},$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ и $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $d \in \mathbb{R}^p$, является выпуклым. (Здесь символ $\preceq$ нужно понимать как поэлементное неравенство $\leq$.) Полиэдр представляет собой пересечение конечного числа полупространств и гиперплоскостей.

(d) Рассмотрим особый случай полиэдра:

$$\Delta_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x \succeq 0,\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

Это множество называется *стандартным симплексом* (в пространстве $\mathbb{R}^n$) и является выпуклым.

Пример 1.4 (Шар в произвольной норме)**.** Пусть в пространстве U задана (произвольная) норма $\|\|$. Тогда (замкнутый) *шар* радиуса $r > 0$ с центром в точке $a \in U$, т. е. множество

$$\overline{B}_{\|\|}(a, r) := \{x \in U : \|x - a\| \leq r\},$$

является выпуклым.

Действительно, пусть $x, y \in \overline{B}_{\|\|}(a, r)$ и $0 \leq \alpha \leq 1$. Тогда

$$\|\alpha x + (1 - \alpha)y - a\| = \|\alpha(x - a) + (1 - \alpha)(y - a)\| \leq \alpha\|x - a\| + (1 - \alpha)\|y - b\| \leq \alpha r + (1 - \alpha)r = r.$$

Здесь неравенство следует из неравенства треугольника для нормы и условия $0 \leq \alpha \leq 1$. Таким образом, $\alpha x + (1 - \alpha)y \in \overline{B}_{\|\|}(a, r)$.

Рассмотрим наиболее популярные частные случаи. Во всех примерах мы работаем в пространстве $U := \mathbb{R}^n$.

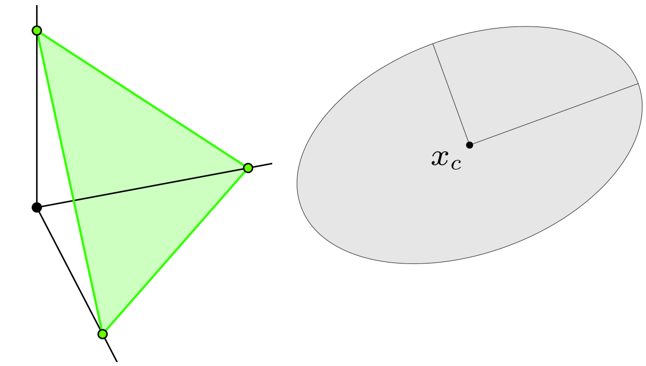

Рис. 3: Иллюстрация к примерам. Слева направо: стандартный симплекс, эллипсоид.

(a) (Евклидов шар) Пусть $\|x\| := \|x\|_2$ — евклидова норма. В этом случае рассмотренный выше абстрактный шар переходит в множество

$$B_2(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\|_2 \le r\},$$

которое называется (замкнутым) *евклидовым шаром* (с центром в точке a и радиусом r) и является выпуклым.

(b) (Эллипсоид) Пусть $P \in \mathbb{S}^n_{++}$, и пусть $\|x\| := \|x\|_P := \langle Px, x\rangle^{1/2}$. В этом случае рассмотренный выше абстрактный шар переходит в множество

$$E := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle P(x-a), x-a\rangle \le r^2\},$$

которое называется *эллипсоидом* (с центром в точке a и радиусом r) и является выпуклым.[2]

(c) (Гипероктаэдр) Пусть $\|x\| := \|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ — ℓ_1-норма. В этом случае рассмотренный выше абстрактный шар переходит в множество

$$B_1(a,r) := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i - a_i| \le r\right\},$$

которое называется *гипероктаэдром* (с центром в точке a и радиусом r) и является выпуклым.

(d) (Гиперкуб) Пусть $\|x\| := \|x\|_\infty := \max_{1 \le i \le n} |x_i|$ — ℓ_1-норма. В этом случае рассмотренный выше абстрактный шар переходит в множество

$$B_\infty(a,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i - r \le x_i \le a_i + r \text{ для всех } 1 \le i \le n\ \},$$

которое называется *гиперкубом* (с центром в точке a и радиусом r) и является выпуклым.

Замечание 1.5. Аналогично можно показать, что и *открытый* шар, т. е. множество $\{x \in U : \|x-a\| < r\}$, также является выпуклым. Однако *сфера*, т. е. множество $\{x \in U : \|x-a\| = r\}$, уже *не* является выпуклым (почему?).

Пример 1.6 (Множество положительно полуопределенных матриц)**.** В пространстве симметричных матриц $\mathbb{S}^n$ множество положительно полуопределенных матриц $\mathbb{S}^n_+$ является выпуклым.

[2]Другое популярное представление эллипсоида — это афинный образ единичного евклидового шара: $E = \{Qx + a : \|x\|_2 \le 1\}$, где $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невырожденная матрица (такая, что $Q^T PQ = I_n$). Это представление можно получить из приведенного ранее, сделав замену переменной.

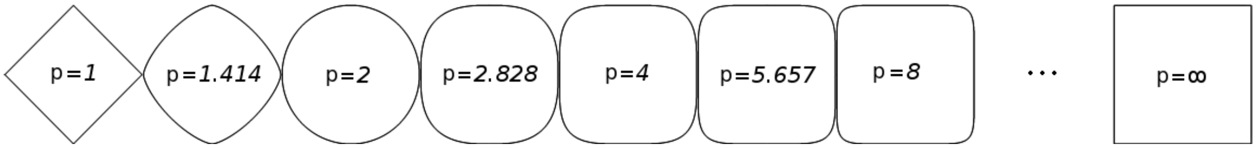

Рис. 4: Линии уровня $f(x) = \|x\|_p$ для различных значений p.

Действительно, пусть $X, Y \in \mathbb{S}^n_+$ — две положительно полуопределенные матрицы и $0 \leq \alpha \leq 1$. Тогда для любого $u \in \mathbb{R}^n$ верно

$$\langle(\alpha X + (1-\alpha)Y)u, u\rangle = \alpha\langle Xu, u\rangle + (1-\alpha)\langle Yu, u\rangle \geq 0.$$

Здесь последнее неравенство следует из положительной полуопределенности X и Y и условия $0 \leq \alpha \leq 1$. Таким образом, матрица $\alpha X + (1-\alpha)Y$ также будет положительно полуопределенной.

Замечание 1.7. Аналогично можно показать, что и внутренность множества $\mathbb{S}^n_+$, т. е. множество всех (строго) положительно определенных матриц $\mathbb{S}^n_{++}$, также является выпуклым.

2 Операции, сохраняющие выпуклость множеств

Утверждение 2.1 (Операции, сохраняющие выпуклость множеств)**.** *Следующие операции сохраняют выпуклость множеств.*

(a) (Пересечение) Пусть U — вещественное векторное пространство. Пусть I — произвольное (не обязательно конечное и не обязательно счетное) индексное множество, и пусть для каждого индекса $i \in I$ задано множество Q_i в пространстве U. Если каждое из множеств Q_i для $i \in I$ является выпуклым, тогда и их пересечение

$$\bigcap_{i \in I} Q_i := \{x : x \in Q_i \text{ для всех } i \in I\}$$

также является выпуклым множеством в пространстве U.

(b) (Образ при аффинном преобразовании) Пусть U и V — вещественные векторные пространства, и Q — множество в пространстве U. Пусть $A : U \to V$ — аффинное преобразование из пространства U в пространство V, т. е. преобразование вида $A(x) = Lx + a$, где $L : U \to V$ — линейное преобразование и $a \in V$. Если множество Q является выпуклым, тогда и его образ при аффинном преобразовании A, т. е. множество

$$A(Q) := \{A(x) : x \in Q\},$$

является выпуклым множеством в пространстве V.

(c) (Прообраз при аффинном преобразовании) Пусть U и V — вещественные векторные пространства, и S — множество в пространстве V. Пусть $A : U \to V$ — аффинное преобразование из пространства U в пространство V, т. е. преобразование вида $A(x) = Lx + a$, где $L : U \to V$ — линейное преобразование и $a \in V$. Если множество S является выпуклым, тогда и его обратный образ при аффинном преобразовании A, т. е. множество

$$A^{-1}(S) := \{x \in U : A(x) \in S\},$$

является выпуклым множеством в пространстве U.

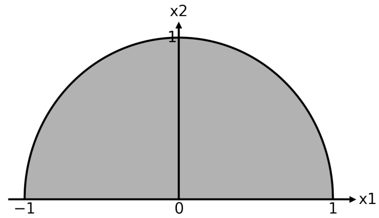

Рис. 5: Полукруг в пространстве $\mathbb{R}^2$.

(d) *(Прямое произведение) Пусть $U_1, \ldots, U_n$ — вещественные векторные пространства, и $Q_1, \ldots, Q_n$ — множества в пространствах $U_1, \ldots, U_n$ соответственно. Если каждое из множеств $Q_1, \ldots, Q_n$ является выпуклым, тогда и их прямое (декартово) произведение*

$$Q_1 \times \cdots \times Q_n := \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \in Q_1; \ \ldots; \ x_n \in Q_n\}$$

является выпуклым множеством в пространстве $U_1 \times \cdots \times U_n$.

Прямым следствием из прямого произведения и образе при аффинном преобразовании является

Следствие 2.2. (a) *(Линейная комбинация)*[3] *Пусть U — вещественное векторное пространство, и $Q_1, \ldots, Q_k$ — множества в пространстве U. Пусть также $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — скаляры (произвольного знака). Если каждое из множеств $Q_1, \ldots, Q_k$ является выпуклым, тогда и их линейная комбинация*

$$\alpha_1 Q_1 + \cdots + \alpha_k Q_k := \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i : x_i \in Q_i \text{ для всех } 1 \le i \le k \right\}$$

также является выпуклым множеством в пространстве U.

(b) *(Проекция) Пусть $U_1, \ldots, U_n$ — вещественные векторные пространства, и пусть Q — выпуклое множество в пространстве $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$. Пусть также $1 \le i \le n$. Тогда* проекция множества Q на i-ую ось *(также называемая* тенью*), т. е. множество*

$$\{x_i : (x_1, \ldots, x_n) \in Q\},$$

является выпуклым множеством в пространстве U_i.

Пример 2.3. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^2$ *полукруг* (рис. 5)

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1, \ x_2 \ge 0\}.$$

Согласно утверждению 2.1, это множество является выпуклым как пересечение единичного круга $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$ и полупространства $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \ge 0\}$.

Пример 2.4. Будем работать в пространстве $\mathbb{R}^2$. Пусть для каждого $\alpha \in [-\pi, \pi]$ задано полупространство

$$Q_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^2 : (\cos\alpha)x_1 + (\sin\alpha)x_2 \le 1\},$$

порожденное касательной к единичной окружности в точке, соответствующей углу α. Рассмотрим пересечение всех полупространств Q_α, т. е. множество

$$Q := \bigcap_{\alpha \in [-\pi, \pi]} Q_\alpha.$$

Согласно утверждению 2.1, множество Q является выпуклым как пересечение (произвольного числа) выпуклых множеств (полупространств). Нетрудно понять, что множество Q, на самом деле, является единичным кругом, который, как мы уже знаем, действительно, является выпуклым (см. рис. 6).

[3]Данная операция в литературе часто встречается под названием *сумма Минковского*.

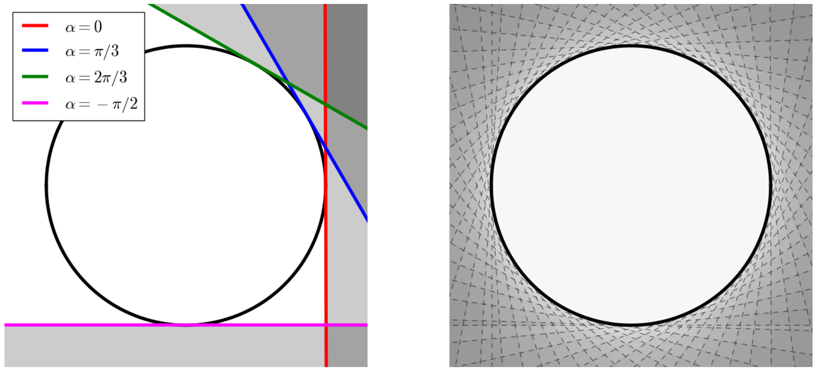

Рис. 6: Единичный круг как пересечение полупространств, образованных всевозможными касательными.

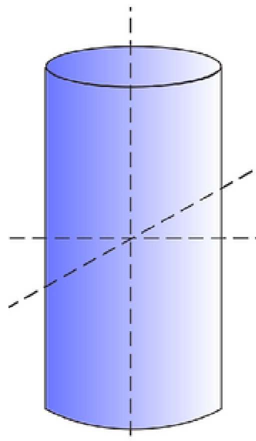

Рис. 7: Прямой круговой цилиндр.

Пример 2.5. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ *прямой круговой цилиндр* (рис. 7)

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1,\ -1 \leq x_3 \leq 1\}.$$

Согласно утверждению 2.1, это множество является выпуклым как прямое произведение единичного круга $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ в пространстве $\mathbb{R}^2$ и отрезка $[-1, 1]$ в пространстве $\mathbb{R}$.

Пример 2.6. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ следующий эллипсоид:

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 \leq 1\}.$$

Проекцией (тенью) этого множества на плоскость (x_1, x_2) будет множество

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\},$$

представляющее собой единичный круг.

Пример 2.7. Будем работать в пространстве $\mathbb{R}^2$. Пусть $Q_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ — единичный круг с центром в нуле и $Q_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_1 \leq 4,\ -3 \leq x_2 \leq 1\}$ — прямоугольник. Сумма множеств Q_1 и Q_2 будет представлять собой увеличенный прямоугольник Q_2 с закругленными углами (рис. 8). Согласно утверждению 2.1, множество $Q_1 + Q_2$ будет выпуклым.

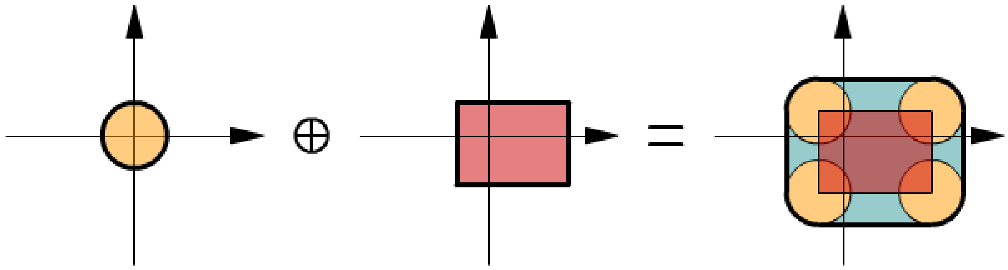

Рис. 8: Сумма круга и прямоугольника представляет собой прямоугольник большего размера с закругленными углами.

Пример 2.8. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ *эллипсоид*

$$\{Lx + a : x \in \mathbb{R}^n, \ \|x\|_2 \leq 1\},$$

где $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — невырожденная матрица и $a \in \mathbb{R}^n$. Согласно утверждению 2.1, это множество является выпуклым как образ единичного евклидового шара $B_2(0, 1)$ при аффинном преобразовании $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определенным по формуле $A(x) = Lx + a$.

Пример 2.9 (Множество решений LMI)**.** Пусть $A_1, \dots, A_k$ и B — матрицы в пространстве $\mathbb{S}^n$. Рассмотрим *линейное матричное неравенство (LMI)*

$$x_1A_1 + \dots + x_kA_k \preceq B,$$

где $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}$. Рассмотрим множество всевозможных решений этого линейного матричного неравенства, т. е. множество

$$\{x \in \mathbb{R}^k : x_1A_1 + \dots + x_kA_k \preceq B\}.$$

Согласно утверждению 2.1, это множество является выпуклым в пространстве $\mathbb{R}^k$ как обратный образ множества положительно полуопределенных матриц $\mathbb{S}^n_+$ при аффинном преобразовании $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{S}^n$, заданном как

$$A(x) := B - x_1A_1 - \dots - x_nA_n.$$

(Почему это преобразование аффинное?)

3 Выпуклая оболочка

Поскольку пересечение произвольного семейства выпуклых множеств является выпуклым, то имеет смысл следующее определение:

Определение 3.1. Пусть U — вещественное векторное пространство, M — множество в U. *Выпуклой оболочкой* множества M, обозначаемой $\mathrm{Conv}(M)$, называется пересечение всевозможных выпуклых множеств в пространстве U, содержащих M:

$$\mathrm{Conv}(M) := \bigcap\{Q \subseteq U : Q \text{ выпуклое и } M \subseteq Q\}.$$

Другими словами, выпуклая оболочка $\mathrm{Conv}(M)$ — это наименьшее выпуклое множество, содержащее M: множество $\mathrm{Conv}(M)$ является выпуклым, $M \subseteq \mathrm{Conv}(M)$, и для любого другого выпуклого множества $Q \supseteq M$ справедливо $\mathrm{Conv}(M) \subseteq Q$.

Замечание 3.2 (Выпуклая оболочка пустого множества)**.** Заметим, что $\mathrm{Conv}(\emptyset) = \emptyset$, поскольку в указанное выше пересечение входит пустое множество $\emptyset$. Действительно, пустое множество $\emptyset$ является выпуклым и вложение $\emptyset \subseteq \emptyset$ выполняется бессодержательно.

Определение 3.3. Пусть U — вещественное векторное пространство, и пусть $x_1, \ldots, x_m \in U$. Любая точка вида $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0$ и $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1$, называется *выпуклой комбинацией* точек $x_1, \ldots, x_m$ (с весами $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$).

Утверждение 3.4. *Множество Q в векторном пространстве является выпуклым, если и только если Q содержит любую выпуклую комбинацию своих точек.*

Доказательство. Будем считать, что $Q \neq \emptyset$, поскольку иначе утверждение тривиально.

В одну сторону утверждение очевидно: если множество Q содержит любую выпуклую комбинацию точек из Q, то вместе с любой парой точек $x, y \in Q$ оно также содержит и выпуклую комбинацию $\alpha x + (1-\alpha)y$ для всех $0 \leq \alpha \leq 1$.

В другую сторону докажем утверждение по индукции. Из базового определения выпуклости множества Q содержит всевозможные выпуклые комбинации размера 2. Предположим теперь, что Q содержит всевозможные выпуклые комбинации размера m, где $m \geq 2$, и докажем, что Q также содержит всевозможные выпуклые комбинации размера $m+1$.

Пусть $x_1, \ldots, x_{m+1} \in Q$, и пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m+1} \geq 0$, причем $\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i = 1$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\alpha_{m+1} < 1$ (иначе это выпуклая комбинация размера $< m+1$). Тогда легко видеть, что

$$z := \sum_{i=1}^{m+1} \alpha_i x_i = (1-\alpha_{m+1})y + \alpha_{m+1} x_{m+1}, \qquad \text{где } y := \sum_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_{m+1}} x_i.$$

Поскольку $\sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 - \alpha_{m+1}$, и веса при x_i в формуле для y неотрицательные, то y является выпуклой комбинацией m точек из множества Q, и, по предположению индукции, $y \in Q$. Наконец, согласно установленному тождеству, z представляет собой выпуклую комбинацию двух точек $y \in Q$ и $x_{m+1} \in Q$, и поэтому $z \in Q$. $\square$

Утверждение 3.5 (Внутреннее описание выпуклой оболочки)**.** *Пусть U — вещественное векторное пространство, M — множество в U. Тогда выпуклая оболочка $\mathrm{Conv}(M)$ — это множество, в точности состоящее из всевозможных выпуклых комбинаций точек множества M:*

$$\mathrm{Conv}(M) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=1}^m \alpha_i x_i : x_1, \ldots, x_m \in M;\ \alpha_1, \ldots, \alpha_m \geq 0;\ \sum_{i=1}^m \alpha_i = 1 \right\}.$$

Утверждение 3.6 (Простейшие свойства выпуклой оболочки)**.** *Пусть A и B — множества в вещественном векторном пространстве. Справедливы следующие свойства:*

(a) $A \subseteq \mathrm{Conv}(A)$.

(b) Если $A \subseteq B$, то $\mathrm{Conv}(A) \subseteq \mathrm{Conv}(B)$.

(c) Множество A выпукло, если и только если $\mathrm{Conv}(A) = A$.