Симметризация точек изображения, заданных статистическими выборками

Каркищенко А.Н., karkishalex@gmail.com
Мнухин В.Б., mnukhin.valeriy@mail.ru

Южный федеральный университет, Таганрог

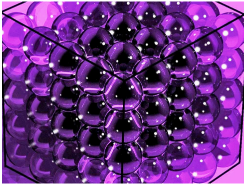
Крит — 4-11 октября 2014

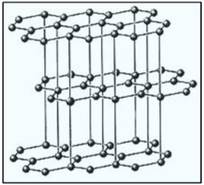
Симметрия и визуальное восприятие

Симметрия играет значительную роль в правильном восприятии как естественных, так и искусственно созданных объектов. Практически все объекты в той или иной степени симметричны, либо имеют симметричные части.

Объект симметричен, если его форма инвариантна относительно действия каких-либо преобразований симметрии.

Симметрия проявляет себя на всех уровнях - в структуре минералов, форме деревьев, животных, планет и др.





Применение симметрии

Некоторые **применения** симметрии в анализе цифровых изображений:

- Выявление симметрии 2D и 3D объектов
- Компактное описание моделей
- Обработка сканированных изображений
- Сегментация изображений
- Установление соответствия форм

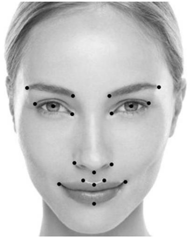
и др.

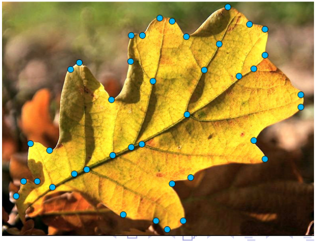
Многие задачи могут получить более простое решение в случае явно симметричных изображений.

В общем случае можно констатировать, что хорошо симметричный объект легче воспринимается, классифицируется и понимается как человеком, так и машинными алгоритмами.

Характеристические точки

В многих случаях низкоуровневый анализ симметрии основан на исследовании **характеристических точек**, точное определение которых зависит от решаемой проблемы.

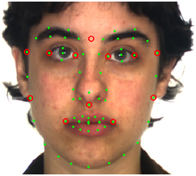




Симметрия - Биометрическая идентификация

Улучшение изображения с помощью симметрии может применяться при биометрической идентификации, - точная локализация характерных точек имеет важнейшее значение.

Качество детекции и распознавания лиц существенно зависит от точности определения центров зрачков на лице, положение которых отвечает естественной симметрии.



Методы детекции лиц основаны на анализе положения нескольких десятков характерных точек, которые либо попарно симметричны относительно вертикальной оси, либо лежат на самой этой оси.

Точная и приближенная симметрия

Строгое определение симметрии приемлемо в том случае, если результат преобразования в точности совпадает с исходным объектом.

В действительности такое строгое соответствие встречается редко, поскольку существует много факторов, искажающих исходную симметрию. Даже дискретизация и квантование изображения проявляются в нарушении априори совершенной симметрии.

Следовательно, необходимо использовать **"примерную"** симметрию.

Объект примерно симметричен по отношению к некоторому преобразованию, если он "почти"инвариантен относительно этого преобразования.

Локализация точек и уточнение по симметрии

Локализация точек осуществляется с погрешностью, зависящей от (1) алгоритма, (2) качества изображения, (3) зашумления и др.

Как следствие, координаты точек, про которые априори известно, что они симметричны, в реальности этому условию не удовлетворяют.

Поэтому целесообразно воспользоваться известной априорной информацией о симметричности точек для уточнения их положения.

Задачи такого рода, по всей видимости, впервые были сформулированы и решены в некоторых постановках в работах:

- H. Zabrodsky, "Computational Aspects of Pattern Characterization - Continuous Symmetry". PhD thesis, Hebrew University, Jerusalem, Israel, 1993.
- H. Zabrodsky and D. Avnir, "Continuous Symmetry Measures iv. Chirality. J. Am. Chem. Soc., 117:462-473, 1995.
- H. Zabrodsky, S.Peleg, and D. Avnir, "Hierarchical symmetry". In Int. Conf. on Pattern Recognition, vol. C, pp. 9-12, The Hague, August-September 1992.

и др.

Локализация статистически заданных точек

Более сложная задача искусственной симметризации: **характерные точки задаются статистической выборкой.**

Источники выборки:

- многократное применении алгоритма локализации при различных условиях (различающиеся по размерам и форме области)
- многократное применение разных алгоритмов локализации
- локализация при разных сочетаниях параметров алгоритма
- локализация на множестве различающихся в мелких деталях изображений (последовательность кадров видеоряда) и др.

Оценка математического ожидания такой выборки будет точнее определять истинное положение характерной точки. Симметризация точек в этом случае также будет точнее.

Но! Целесообразно учитывать не только матожидания, но также дисперсии и корреляционные моменты координат характерных точек.

Результаты

О чем будем говорить дальше?

Результаты

О чем будем говорить дальше?

- Симметризация отражательно симметричных точек, заданных статистическими выборками

Результаты

О чем будем говорить дальше?

- Симметризация отражательно симметричных точек, заданных статистическими выборками
- Связь с расстоянием Махаланобиса и мера симметричности

Результаты

О чем будем говорить дальше?

- Симметризация отражательно симметричных точек, заданных статистическими выборками
- Связь с расстоянием Махаланобиса и мера симметричности
- Вращательная симметризация точек, заданных статистическими выборками

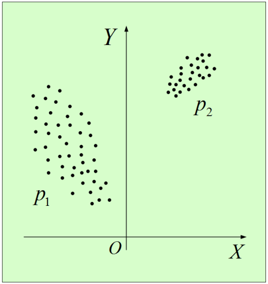
Отражательная симметризация

Alexander Zadiraka, www.photosight.ru/ownpage.php?authorid=96

Симметризация. Случай вертикальной оси

Имеются две точки $p_1(x_1, y_1)$ и $p_2(x_2, y_2)$, которые априори должны быть симметричны относительно оси Oy и не лежат на ней.

Эти точки заданы выборками:
$$p_1(x_1, y_1) \Longrightarrow \{p_1^1, p_1^2, p_1^3, \dots\}$$
$$p_2(x_2, y_2) \Longrightarrow \{p_2^1, p_2^2, p_2^3, \dots\}$$



Задача

Найти наиболее вероятное симметричное положение точек.

Симметризация. Случай вертикальной оси

Формальная постановка задачи

$f_1(x_1, y_1)$ - плотность вероятности появления точки $p_1(x_1, y_1)$,
$f_2(x_2, y_2)$ - плотность вероятности появления точки $p_2(x_2, y_2)$.

Обозначим через

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \end{pmatrix}^T$$

случайный вектор, состоящий из координат точек p_1 и p_2.

Случайные векторы $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix}$ статистически независимы, поэтому $\boldsymbol{Z}$ подчиняется вероятностному распределению

$$f(\boldsymbol{Z}) = f_1(x_1, y_1) f_2(x_2, y_2).$$

Вектор, описывающий наиболее вероятное положение пары симметричных точек, должен удовлетворять условиям:

$$-x_1 = x_2, \qquad y_1 = y_2.$$

Симметризация. Случай вертикальной оси

Множество векторов, координаты которых обладают этим свойством, образует «симметричное» подпространство в линейном пространстве R^4. Обозначим его R^4_{Sym}.

Таким образом, R^4_{Sym} состоит из векторов вида $\begin{pmatrix} x & y & -x & y \end{pmatrix}^T$, $x, y \in R$, соответствующих характерным точкам, расположенным симметрично относительно оси ординат.

Задача отыскания наиболее вероятного положения симметричных точек:

$$\begin{cases} f\left(\boldsymbol{Z}\right) \to \max, \\ \boldsymbol{Z} \in R^4_{Sym}. \end{cases} \tag{1}$$

Симметризация. Случай вертикальной оси

Выборочные совокупности во многих случаях хорошо аппроксимируются нормальными распределениями:

$$f_1(\boldsymbol{z}_1) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|C_1|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{m}_1)^T C_1^{-1}(\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{m}_1)\right\},$$

$$f_2(\boldsymbol{z}_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|C_2|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}_2 - \boldsymbol{m}_2)^T C_2^{-1}(\boldsymbol{z}_2 - \boldsymbol{m}_2)\right\},$$

где $\boldsymbol{z}_1 = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \end{pmatrix}^T$, $\boldsymbol{z}_2 = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \end{pmatrix}^T$,

$\boldsymbol{m}_1 = \begin{pmatrix} m_{x_1} & m_{y_1} \end{pmatrix}^T$, $\boldsymbol{m}_2 = \begin{pmatrix} m_{x_2} & m_{y_2} \end{pmatrix}^T$ — математические ожидания,

C_1 и C_2 — ковариационные матрицы.

Симметризация. Случай вертикальной оси

Опуская технические детали можно показать, что решение данной задачи сводится к решению системы уравнений:

$$\left(C_1^{-1} + SC_2^{-1}S\right)\boldsymbol{z} = C_1^{-1}\boldsymbol{m}_1 + SC_2^{-1}\boldsymbol{m}_2, \qquad (2)$$

где $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Если $\boldsymbol{z}^* = (x^*\ y^*)^T$ — решение данной системы, то координаты симметризованных точек будут иметь вид:

$$\boxed{p_1^*(x^*, y^*) \text{ и } p_2^*(-x^*, y^*)}.$$

Симметризация. Случай вертикальной оси

Система (2) в явной форме выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{(1-\rho_1^2)\sigma_{x_1}^2}+\dfrac{1}{(1-\rho_2^2)\sigma_{x_2}^2}\right)x+\left(-\dfrac{\rho_1}{(1-\rho_1^2)\sigma_{x_1}\sigma_{y_1}}+\dfrac{\rho_2}{(1-\rho_2^2)\sigma_{x_2}\sigma_{y_2}}\right)y= \\ \quad =\dfrac{m_{x_1}}{(1-\rho_1^2)\sigma_{x_1}^2}-\dfrac{\rho_1 m_{y_1}}{(1-\rho_1^2)\sigma_{x_1}\sigma_{y_1}}-\dfrac{m_{x_2}}{(1-\rho_2^2)\sigma_{x_2}^2}+\dfrac{\rho_2 m_{y_2}}{(1-\rho_2^2)\sigma_{x_2}\sigma_{y_2}}, \\ \\ \left(-\dfrac{\rho_1}{(1-\rho_1^2)\sigma_{x_1}\sigma_{y_1}}+\dfrac{\rho_2}{(1-\rho_2^2)\sigma_{x_2}\sigma_{y_2}}\right)x+\left(\dfrac{1}{(1-\rho_1^2)\sigma_{y_1}^2}+\dfrac{1}{(1-\rho_2^2)\sigma_{y_2}^2}\right)y= \\ \quad =-\dfrac{\rho_1 m_{x_1}}{(1-\rho_1^2)\sigma_{x_1}\sigma_{y_1}}+\dfrac{m_{y_1}}{(1-\rho_1^2)\sigma_{y_1}^2}-\dfrac{\rho_2 m_{x_2}}{(1-\rho_2^2)\sigma_{x_2}\sigma_{y_2}}+\dfrac{m_{y_2}}{(1-\rho_2^2)\sigma_{y_2}^2}. \end{cases}$$

где σ_{x_k}, σ_{y_k} — среднеквадратические отклонения, ρ_k — коэффициенты корреляции.

Симметризация. Случай вертикальной оси

Частный случай: **случайные величины некоррелированы**, т.е. $\rho_1 = \rho_2 = 0$.

$$\begin{cases} x = -\frac{\sigma_{x_2}^2}{\sigma_{x_1}^2+\sigma_{x_2}^2} m_{x_1} + \frac{\sigma_{x_1}^2}{\sigma_{x_1}^2+\sigma_{x_2}^2} m_{x_2} \ , \\ y = \quad \frac{\sigma_{y_2}^2}{\sigma_{y_1}^2+\sigma_{y_2}^2} m_{y_1} + \frac{\sigma_{y_1}^2}{\sigma_{y_1}^2+\sigma_{y_2}^2} m_{y_2} \ . \end{cases}$$

Отсюда следует, что $x \in [-m_{x_1}, m_{x_2}]$ и $y \in [m_{y_1}, m_{y_2}]$.

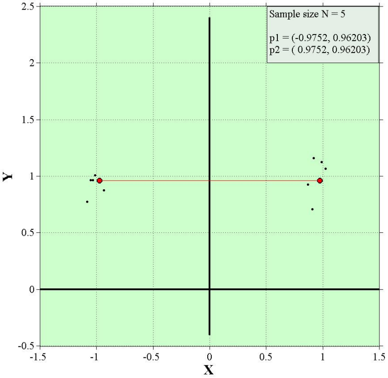
В частности, если **дисперсии равны**, то

$$x = \frac{-m_{x_1}+m_{x_2}}{2}, \quad y = \frac{m_{y_1}+m_{y_2}}{2}.$$

Примеры построения симметризованных точек

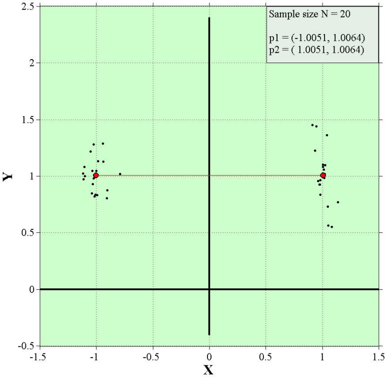
Истинные точки имеют координаты: $p_1(-1,1)$ и $p_2(1,1)$.

Выборка из 5 точек



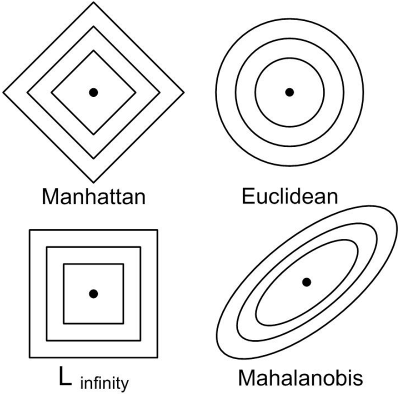
$$p_1^*(-0.9752, 0.96203)$$
$$p_2^*(\quad 0.9752, 0.96203)$$

Выборка из 20 точек



$$p_1^*(-1.0051, 1.0064)$$
$$p_2^*(\quad 1.0051, 1.0064)$$

Расстояние Махаланобиса и мера симметричности



Связь с метрикой Махаланобиса

Симметризация нормально распределенных характерных точек эквивалентна задаче:

$$\begin{cases} (\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{m})^T C^{-1} (\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{m}) \to \min, \\ \boldsymbol{Z} \in R^4_{Sym}, \end{cases}$$

где R^4_{Sym} - подпространство точек, симметричных относительно Oy.

Минимизируемая функция — квадрат расстояния Махаланобиса от точки $\boldsymbol{Z}$ до точки $\boldsymbol{m}$, поэтому поиск минимума сводится к вычислению в пространстве с метрикой Махаланобиса проекции вектора $\boldsymbol{m}$ на подпространство R^4_{Sym}:

$$\boldsymbol{X}_s = \arg \min_{\boldsymbol{Z} \in R^4_{Sym}} \|\boldsymbol{Z}-\boldsymbol{m}\|_{C^{-1}}. \tag{3}$$

При $C^{-1} = I$ — симметризация в обычном смысле, т.е. когда обе точки точно задаются вектором $\boldsymbol{m}$.

Мера симметрии

Введем меру исходной «симметричности» выборок, задающих точки.

Пусть R^n - пространство со скалярным произведением

$$(\boldsymbol{x},\, \boldsymbol{x})_G = (\boldsymbol{x},\, G\boldsymbol{x}),$$

где G - положительно определенный самосопряженный оператор.

Если P — оператор проектирования на подпространство $S \subseteq R^n$, то норму $\|P\boldsymbol{x}\|_G$ проекции вектора $\boldsymbol{x}$ на S можно рассматривать как **меру близости** $\boldsymbol{x}$ к S. Чем больше норма, тем ближе $\boldsymbol{x}$ к S.

Целесообразно использовать **нормированную** меру:

$$\mu\left(\boldsymbol{x}, S\right) = \frac{\|P\boldsymbol{x}\|_G}{\|\boldsymbol{x}\|_G} = \left\|P\boldsymbol{x}^0\right\|_G,$$

Очевидно, $0 \leq \mu\left(\boldsymbol{x}, S\right) \leq 1$. При этом $\mu\left(\boldsymbol{x}, S\right) = 1 \iff \boldsymbol{x} \in S$.

Мера симметрии. Выводы

В нашем случае нормированная мера симметрии принимает вид:

$$\boxed{\mu\left(\boldsymbol{m}, R^4_{Sym}\right) = \frac{\|\boldsymbol{Z}\|_{C^{-1}}}{\|\boldsymbol{m}\|_{C^{-1}}}},$$

$$\boldsymbol{Z} = A\left(A^T C^{-1} A\right)^{-1} A^T C^{-1} \boldsymbol{m},\ \text{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T : R^2 \to R^4_{Sym}.$$

Выводы

- Если процедура отыскания точек не имеет систематических погрешностей, то с ростом объема выборок матожидания будут стремиться к истинным координатам симметричных точек, а следовательно, $\mu\left(\boldsymbol{m}, R^4_{Sym}\right) \xrightarrow{P} 1$.
- Если сходимости нет, то либо алгоритм, формирующий выборки, дает систематические погрешности, либо точки вопреки предположению не являются симметричными.

Мера симметрии и объем выборки

Примеры изменения меры симметрии в зависимости от объема выборки

Симметричные точки

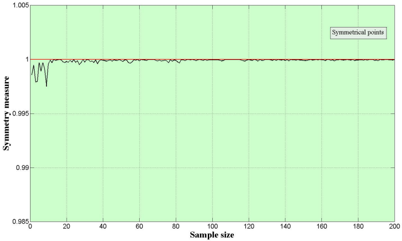
$p_1(-1, 1)$

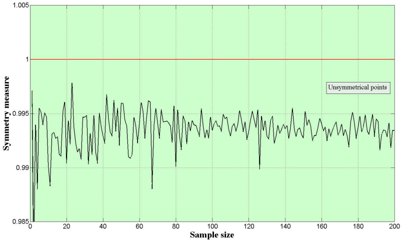
$p_2(\ \ 1, 1)$

Несимметричные точки

$p_1(-1, 1.0)$

$p_2(\ \ 1, 1.2)$



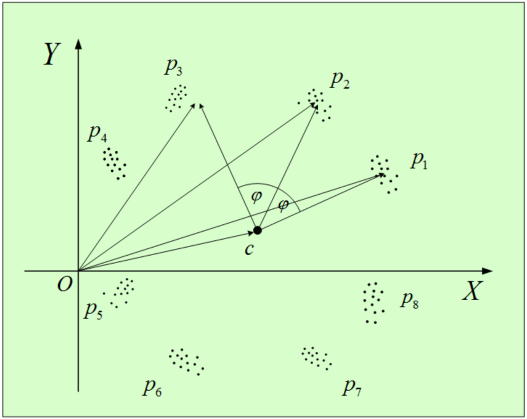


Вращательная симметризация

www.ellf.ru/uploads/posts/2014-07/1406084727 006-ellf.ru.jpg

Вращательная симметризация

Вращательно симметричные характерные точки заданы выборками; при этом координаты центра $\boldsymbol{c}$ симметрии неизвестны, но известен порядок симметрии n, т.е. имеется n статистических выборок, дающих некоторую информацию об истинном положении точек.



Вращательная симметризация

Пусть вектор $\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & \ldots & x_n & y_n \end{pmatrix}^T$ координат неизвестных точек $p_k \begin{pmatrix} x_k & y_k \end{pmatrix}$, $k = 1, \ldots, n$, подчиняется распределению:

$$f(\boldsymbol{Z}) = f_1(x_1, y_1) \ldots f_n(x_n, y_n),$$

т.е. точки статистически независимы. Обозначим $\boldsymbol{z}_k = \begin{pmatrix} x_k & y_k \end{pmatrix}^T$ — вектор координат точки p_k.

Если R_φ — оператор поворота на угол $\varphi = 2\pi/n$, то

$$\boldsymbol{z}_{k+1} - \boldsymbol{c} = R_\varphi(\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{c}), \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Отсюда получаем $\boldsymbol{z}_{k+1} - \boldsymbol{c} = R_{k\varphi}(\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{c})$ или

$$\boldsymbol{z}_{k+1} = R_{k\varphi}\boldsymbol{z}_1 + (I - R_{k\varphi})\,\boldsymbol{c}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Вращательная симметризация

Эти соотношения удобно записать сразу для всех k:

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 \\ \boldsymbol{z}_2 \\ \dots \\ \boldsymbol{z}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ R_\varphi \\ \dots \\ R_{(n-1)\varphi} \end{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ I - R_\varphi \\ \dots \\ I - R_{(n-1)\varphi} \end{pmatrix} \boldsymbol{c}.$$

Если ввести матрицу $B = (I\, I \dots I)^T$, то:

$$\boldsymbol{Z} = A\boldsymbol{z}_1 + (B - A)\,\boldsymbol{c}.$$

Пусть $R_{Sym}(\boldsymbol{c})$ — множество векторов $\boldsymbol{Z}$ при фиксированном $\boldsymbol{c}$ и всех возможных $\boldsymbol{z}_1 \in R^2$. $R_{Sym}(\boldsymbol{c})$ — линейное многообразие в R^{2n}, параметрически зависящее от $\boldsymbol{c}$.

Задача отыскания **наиболее вероятного положения точек вокруг наиболее вероятного центра вращательной симметрии**:

$$\begin{cases} f(\boldsymbol{Z}) \to \max, \\ \boldsymbol{Z} \in R_{Sym}(\boldsymbol{c}) . \end{cases}$$

Вращательная симметризация

Можно показать, что задача сводится к безусловной минимизации квадратичной формы:

$$(A\boldsymbol{z}_1 + (B - A)\,\boldsymbol{c} - \boldsymbol{m})^T C^{-1} (A\boldsymbol{z}_1 + (B - A)\,\boldsymbol{c} - \boldsymbol{m}) \xrightarrow{\boldsymbol{z}_1,\, \boldsymbol{c} \in R^2} \min \ .$$

Решая эту задачу, после упрощений получаем:

$$\begin{cases} A^T C^{-1} A\,(\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{c}) + A^T C^{-1} B\boldsymbol{c} = A^T C^{-1}\boldsymbol{m}\ , \\ B^T C^{-1} A\,(\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{c}) + B^T C^{-1} B\boldsymbol{c} = B^T C^{-1}\boldsymbol{m}\ . \end{cases}$$

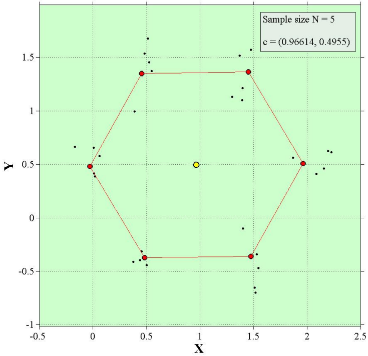
Если $\boldsymbol{z}_1^*$ и $\boldsymbol{c}^*$ — решение последней системы, то координаты симметризованных точек вычисляются по формуле:

$$\boxed{\boldsymbol{z}_{k+1}^* = R_{k\varphi}\boldsymbol{z}_1^* + (I - R_{k\varphi})\,\boldsymbol{c}^*,\ k = 0, \ldots, n-1.}$$

Вращательная симметризация

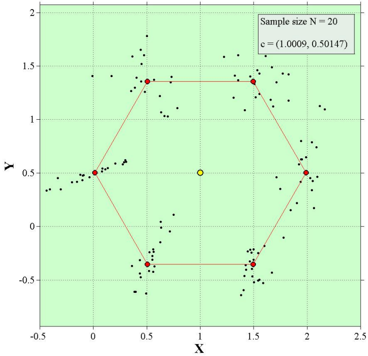
Примеры вращательной симметризации

Выборка из 5 точек



Координаты центра:
$c^*(0.96614, 0.4955)$

Выборка из 20 точек



Координаты центра:
$c^*(1.0009, 0.50147)$