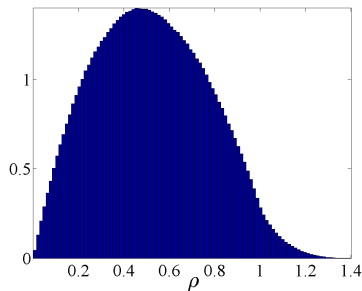
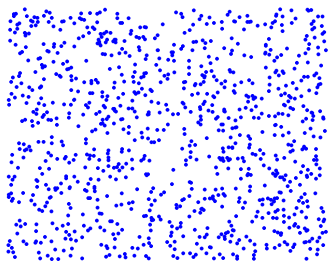
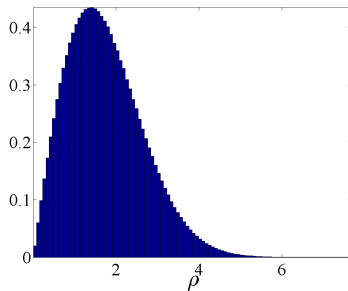
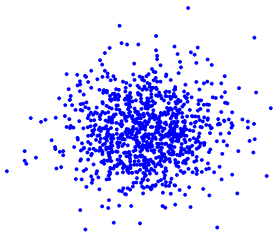


Комбинаторные оценки ε -разбиений метрических пространств

Пушняков Алексей



Слева — пример метрической конфигурации на плоскости, справа — эмпирическая плотность распределения парных расстояний.



Теперь точки конфигурации получены из нормального распределения. В данном случае можно выделить множество *небольшого* диаметра, содержащее *значительную* долю точек.

Дано конечное метрическое пространство (X, ρ) .

Определение

Любое подмножество X диаметра не более ε будем называть ε -кластером.

Определение

Пару различных точек $x, y \in X$ будем называть ε -длинными ребром, если $\rho(x, y) > \varepsilon$, иначе — ε -коротким ребром.

Пусть известно, что в X существует ε -кластер мощности d , тогда найдутся хотя бы $\frac{d(d-1)}{2}$ ε -коротких рёбер.

Если существует *большой* ε -кластер, тогда ε -длинных рёбер *мало*.

Вопрос: верно ли, что из того, что ε -длинных рёбер мало, следует существование большого ε -кластера?

Ответ: существуют метрические пространства, в которых мало ε -длинных рёбер и не существует большого ε -кластера.

Цель работы

- найти такие $\varepsilon'(\varepsilon)$, что можно гарантировать существование большого ε' -кластера при условии, что ε -длинных рёбер мало.
- получить нижние оценки на максимальную мощность ε' -кластера.

Ограничение для числа ε -длинных рёбер

$$|\Lambda_\varepsilon| = |\{(x, y) : \rho(x, y) > \varepsilon\}| \leq \frac{\delta |X|^2}{2}$$

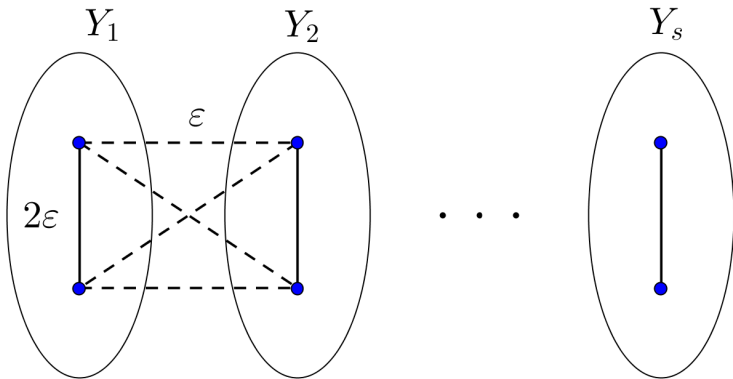
Утверждение

Пусть $\varepsilon' < 2\varepsilon$, тогда для любых $\alpha > 0$, $\delta > 0$ существует метрическое пространство (X, ρ) такое, что $|\Lambda_\varepsilon| \leq \frac{\delta |X|^2}{2}$, и максимальная мощность любого ε' -кластера меньше $\alpha |X|$.

Положим $X = \bigcup_{i=1}^s Y_i$, где $Y_i = \{x_{i1}, \dots, x_{im}\}$. Определим метрику следующим образом:

$$\rho(x_{ij}, x_{kl}) = \begin{cases} 2\varepsilon, & i \neq k, j = l, \\ 0, & i = k, j = l, \\ \varepsilon, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Остается подобрать $m(\delta)$ и $s(\alpha)$.



Определение

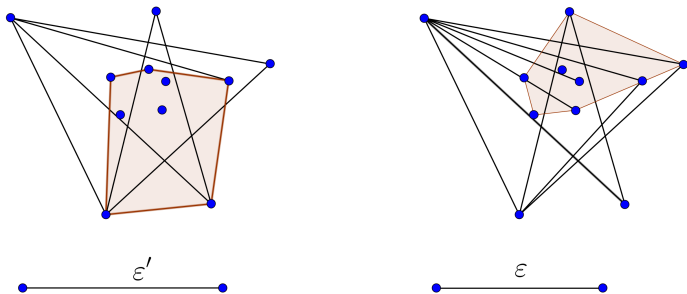
Набор подмножеств $\{X_0, \dots, X_s\}$ будем называть ε -разбиением метрического пространства (X, ρ) , если выполнены следующие условия:

- $\bigcup_{i=0}^s X_i = X$;
- $X_i \cap X_j = \emptyset$ при всех $0 \leq i < j \leq s$;
- X_i является ε -кластером при всех $0 \leq i \leq s$.

Определение

Набор подмножеств $\{X_0, \dots, X_s\}$ будем называть максимальным ε -разбиением метрического пространства (X, ρ) , если выполнены следующие условия:

- набор является ε -разбиением (X, ρ) ;
- при всех $0 \leq i \leq s$ для любого ε -кластера Y такого, что $Y \cap \bigcup_{j=0}^{i-1} X_j = \emptyset$, выполнено $|Y| \leq |X_i|$.



Для метрической конфигурации (X, ρ) определим граф $G(\varepsilon) = (X, E(\varepsilon))$, где

$$E(\varepsilon) = \{(x, y) : \rho(x, y) > \varepsilon\}.$$

Утверждение

Для всех $i = 0, \dots, s$ и любого ε -кластера $Z \subseteq \bigcup_{k=i+1}^s X_k$ существует инъективное отображение $\varphi : Z \rightarrow X_i$, удовлетворяющее условию $\rho(x, \varphi(x)) > \varepsilon$ для любого $x \in Z$.

Набросок доказательства:

Пусть

$$\text{Im} Y = \{z \in X_i : \exists y \in Y, \rho(z, y) > \varepsilon\}.$$

По построению X_i получаем $|\text{Im} Y| \geq |Y|$. Осталось применить лемму Холла.

Пусть $\{X_i\}$ — максимальное 2ε -разбиение (X, ρ) . Требуется получить нижнюю оценку на X_i .

Тривиальная оценка: $|X_0| \geq |X|(1 - \delta)$.

Доказательство: в качестве 2ε -кластера взять шар радиуса ε с центром в точке, которая входит в максимальное число ε -коротких рёбер.

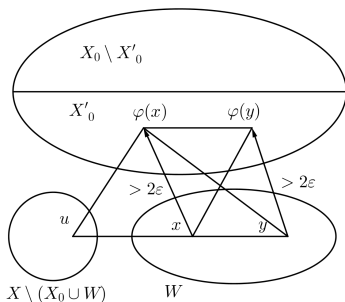
Неулучшаемая оценка: $|X_0| \geq \frac{|X|(1 + \sqrt{1 - 2\delta})}{2}$ (при $\delta \leq \frac{1}{2}$).

Эта оценка получается из следующего факта

Утверждение

Число ε -длинных ребер в X не меньше, чем $|X_0| \cdot |X \setminus X_0|$.

Максимальное паросочетание



Рассмотрим двудольный граф H с долями $X_0, X \setminus X_0$, где рёбрами являются 2ϵ -длинные рёбра. Максимальное паросочетание M покрывает в доле X_0 множество X'_0 , а в доле $X \setminus X_0$ — множество W .

Утверждение

Для любого 2ϵ -кластера $V \subseteq X \setminus X_0$ существует инъекция φ по рёбрам G в X'_0 .

В случае евклидовой метрики можно гарантировать существование большого ε' -кластера для $\varepsilon' = \sqrt{2}\varepsilon$.

Утверждение

Пусть $a, b, c, d \in X$ и $\rho(a, c) > \sqrt{2}\varepsilon$ и $\rho(b, d) > \sqrt{2}\varepsilon$, тогда

$$\max\{\rho(a, b), \rho(a, d), \rho(b, c), \rho(c, d)\} > \varepsilon.$$

Утверждение

Пусть ρ вложима в евклидово пространство и $\delta \leq \frac{1}{4}$, тогда верна следующая оценка на максимальную мощность $\sqrt{2}\varepsilon$ -кластера:

$$|X_0| \geq |X|(1 - 2\sqrt{\delta}).$$

- При ограничениях на число расстояний, превосходящих ε , получена неулучшаемая нижняя оценка на мощность максимального по включению множества диаметра не более 2ε
- Показано, что при $\varepsilon' < 2\varepsilon$ в общем случае нельзя гарантировать существования линейной по мощности метрической конфигурации нижней оценки на мощность множества диаметра не более ε' .
- Показано, что в частных случаях значение ε' может быть уменьшено.