

Курс: Графические модели, 2014

Задачи для подготовки к контрольной работе по матричным
вычислениям

Дата контрольной: 25 марта 2014

1. Вычислить $\frac{\partial}{\partial A} \text{tr}(ABAC)$;
2. Вычислить $\mathbb{E}_{\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma)}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T B(\mathbf{x} - \mathbf{a})$;
3. Доказать тождество Вудбери $(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$, где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $U \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $V \in \mathbb{R}^{m \times n}$;
4. Пусть $p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$, где

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_a \\ \mathbf{x}_b \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_a \\ \boldsymbol{\mu}_b \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{aa} & \Sigma_{ab} \\ \Sigma_{ab}^T & \Sigma_{bb} \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix} \Lambda_{aa} & \Lambda_{ab} \\ \Lambda_{ab}^T & \Lambda_{bb} \end{bmatrix}.$$

Доказать, что:

- $p(\mathbf{x}_a) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_a|\boldsymbol{\mu}_a, \Sigma_{aa})$;
- $p(\mathbf{x}_a|\mathbf{x}_b) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_a|\boldsymbol{\mu}_a - \Lambda_{aa}^{-1}\Lambda_{ab}(\mathbf{x}_b - \boldsymbol{\mu}_b), \Lambda_{aa}^{-1})$.

Подсказка: использовать сведение к нормальным распределениям (известна нормировочная константа) при помощи выделения полного квадрата из квадратичной формы.

5. Доказать, что $\frac{\partial}{\partial x} \log \det A(x) = \text{tr} \left(A^{-1} \frac{\partial A}{\partial x} \right)$ для скалярного x .