

Байесовский подход и Акинатор

Янгель Б.К.

МГУ ВМК, Яндекс

Спецкурс “Байесовские методы машинного
обучения”

Что такое (кто такой) Акинатор?

Байесовский
подход и
Акинатор

Янгель Б.К.

Введение

Ликбез

Выбор
персонажа по
заданным
ответам на
вопросы

Стратегия
выбора
вопросов

Итоги

- Можно найти по адресу <http://akinator.com>;
- Расширенный вариант игры “20 вопросов”;
- Специализируется на персонажах;
- Как правило, угадывает, и очень быстро;
- По всей видимости, обучается на ответах пользователей.

Что мы хотим сделать?

Байесовский
подход и
Акинатор

Янгель Б.К.

Введение

Ликбез

Выбор
персонажа по
заданным
ответам на
вопросы

Стратегия
выбора
вопросов

Итоги

- Мы хотим сделать своего Акинатора;
- Можно поддерживать дерево, в котором внутренние узлы — вопросы, а листья — ответы. Однако:
 - Дерево нужно перебалансировать;
 - Существуют вопросы, на которые нет однозначного ответа;
 - Если не нашли соответствия в базе, нельзя попробовать “ткнуть пальцем в небо”, выбрав самого похожего персонажа.
- Вместо этого мы воспользуемся байесовским подходом!

Собственная информация

Байесовский
подход и
Акинатор

Янгель В.К.

Введение

Ликбез

Выбор
персонажа по
заданным
ответам на
вопросы

Стратегия
выбора
вопросов

Итоги

- Пусть X — дискретная случайная величина, $P(X = x_i) = p_i$. Собственной информацией значения x_i называется величина

$$I(x_i) = \log \frac{1}{p_i} = -\log p_i;$$

- В зависимости от основания логарифма измеряется в битах, натах, хартли;
- Смысл: много ли мы узнали, когда нам сказали, что случайная величина X приняла значение x_i ;
- Свойства:
 - Собственная информация — случайная величина;
 - Неотрицательность: $I(x_i) \geq 0$;
 - Монотонность: $I(x_1) > I(x_2)$ при $p_1 < p_2$.

Энтропия

Байесовский
подход и
Акинатор

Янгель Б.К.

Введение

Ликбез

Выбор
персонажа по
заданным
ответам на
вопросы

Стратегия
выбора
вопросов

Итоги

- Энтропией дискретной случайной величины X называется математическое ожидание собственной информации:

$$H(p_1, p_2, \dots, p_n, \dots) = \sum_i p_i I(x_i) = - \sum_i p_i \log p_i;$$

- Является своего рода мерой “неопределенности” случайной величины;
- Смысл: много ли мы (в среднем) узнаем, когда нам говорят, что случайная величина X приняла какое-то значение.
- Как и собственная информация, измеряется в битах, натах, хартли;
- Для непрерывной случайной величины существует понятие дифференциальной энтропии.

Примеры

Байесовский
подход и
Акинатор

Янгель В.К.

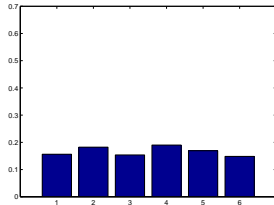
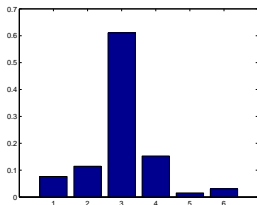
Введение

Ликбез

Выбор
персонажа по
заданным
ответам на
вопросы

Стратегия
выбора
вопросов

Итоги



На левом рисунке $H = 1.7356$, на правом $H = 2.5789$.

Некоторые свойства энтропии

Байесовский
подход и
Акинатор

Янгель Б.К.

Введение

Ликбез

Выбор
персонажа по
заданным
ответам на
вопросы

Стратегия
выбора
вопросов

Итоги

- Непрерывность по p_i ;
- Нет зависимости от порядка значений:
 $H(p_1, p_2, \dots) = H(p_2, p_1, \dots)$;
- Максимум достигается на равномерном распределении:

$$H_n(p_1, \dots, p_n) \leq H_n\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) = \log n;$$

- Для равномерного распределения энтропия растет с ростом числа исходов:

$$H_n\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) < H_{n+1}\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right);$$

Условная энтропия

Байесовский
подход и
Акинатор

Янгель В.К.

Введение

Ликбез

Выбор
персонажа по
заданным
ответам на
вопросы

Стратегия
выбора
вопросов

Итоги

- Обозначим через $H(X | Y = y_i)$ энтропию распределения $P(X | Y = y_i)$;
- Энтропией X при условии Y называется величина

$$H(X | Y) = \sum_i H(X | Y = y_i)P(Y = y_i);$$

- Смысл: какова (в среднем) неопределенность X , если мы знаем Y .
- Легко убедиться, что если X и Y независимы, то $H(X | Y) = H(X)$.

Байесовский подход для выбора персонажа

Байесовский
подход и
Акинатор

Янгель В.К.

Введение

Ликбез

Выбор
персонажа по
заданным
ответам на
вопросы

Стратегия
выбора
вопросов

Итоги

- Давайте пока считать, что мы уже задали какое-то число вопросов, получили ответы и теперь хотим узнать, кто из персонажей мог быть загадан;
- Пусть C обозначает загаданного персонажа, а выражение $\langle Q, A \rangle$ означает “был задан вопрос Q и на него был получен ответ A ”;
- Фактически, нам нужно найти $P(C \mid \langle Q_1, A_1 \rangle, \dots, \langle Q_n, A_n \rangle)$;
- Применим теорему Байеса:

$$\begin{aligned} P(C \mid \langle Q_1, A_1 \rangle, \dots, \langle Q_n, A_n \rangle) &= \\ &= \frac{P(\langle Q_1, A_1 \rangle, \dots, \langle Q_n, A_n \rangle \mid C)P(C)}{\sum_{C'} P(\langle Q_1, A_1 \rangle, \dots, \langle Q_n, A_n \rangle \mid C')P(C')}. \end{aligned}$$

Предыдущие игры и априорное распределение

Байесовский
подход и
Акинатор

Янгель Б.К.

Введение

Ликбез

Выбор
персонажа по
заданным
ответам на
вопросы

Стратегия
выбора
вопросов

Итоги

- Давайте также считать, что мы уже играли в эту игру много раз и знаем, кто кого загадывал и как на какие вопросы отвечал;
- Тогда $P(C)$, априорная вероятность того, что загадали какого-то персонажа, может быть вычислена как доля игр, в которых был загадан этот персонаж, среди всех игр;
- Простая интерпретация: при прочих равных нужно называть более популярного персонажа, т.к. больше шансов, что мы отгадаем;
- А что делать с $P(\langle Q_1, A_1 \rangle, \dots, \langle Q_n, A_n \rangle \mid C)$?

Предыдущие игры и правдоподобие

Байесовский
подход и
Акинатор

Янгель Б.К.

Введение

Ликбез

Выбор
персонажа по
заданным
ответам на
вопросы

Стратегия
выбора
вопросов

Итоги

- Предположим условную независимость ответов на вопросы при заданном персонаже:

$$P(\langle Q_1, A_1 \rangle, \dots, \langle Q_n, A_n \rangle \mid C) = \prod_{i=1}^n P(\langle Q_i, A_i \rangle \mid C);$$

- Фактически мы считаем, что то, как человек ответит на один вопрос про какого-то персонажа никак не зависит от того, как он ответит на другой вопрос про того же персонажа;
- На самом деле это не совсем так, но в этом случае мы легко можем проинтерпретировать фактор правдоподобия $P(\langle Q, A \rangle \mid C)$;
- В качестве значения фактора правдоподобия можно взять долю ответов A на вопрос Q про персонажа C среди всех ответов на вопрос Q про персонажа C .

Промежуточные итоги

Байесовский
подход и
Акинатор

Янгель Б.К.

Введение

Ликбез

Выбор
персонажа по
заданным
ответам на
вопросы

Стратегия
выбора
вопросов

Итоги

- Имея базу предыдущих игр, а также набор пар вопрос/ответ в текущей игре, мы можем вычислять для каждого персонажа вероятность того, что был загадан именно он;
- Автоматически мы получили способ обучения системы: нужно просто пополнять базу игр;
- В начале можно считать, что все персонажи были загаданы равное число раз, и на каждый вопрос про каждого персонажа было дано равное число ответов каждого типа.

Выбор вопросов — идея

Байесовский
подход и
Акинатор

Янгель Б.К.

Введение

Ликбез

Выбор
персонажа по
заданным
ответам на
вопросы

Стратегия
выбора
вопросов

Итоги

- Нам осталось научиться задавать “правильные” вопросы;
- Если бы мы не использовали байесовский подход и играли бы в игру с ответами “да” и “нет”, следовало бы каждый раз выбирать тот вопрос, который отсекает половину вариантов;
- Мы применим обобщение этого метода — будем каждый раз выбирать тот вопрос, который сильнее всего уменьшает энтропию распределения $P(C \mid \langle Q_1, A_1 \rangle, \dots, \langle Q_n, A_n \rangle)$;
- Иначе говоря, каждый новый вопрос должен устранять как можно больше неопределенности.

Выбор вопросов и условная энтропия

Байесовский
подход и
Акинатор

Янгель Б.К.

Введение

Ликбез

Выбор
персонажа по
заданным
ответам на
вопросы

Стратегия
выбора
вопросов

Итоги

- Выбирая вопрос мы не знаем, какой ответ нам на него дадут. Зато мы можем оценить вероятность каждого варианта ответа:

$$P_A = \sum_c P(\langle Q, A \rangle | C) P(C | \langle Q_1, A_1 \rangle, \dots, \langle Q_n, A_n \rangle);$$

- Тогда нам нужно выбирать такой вопрос Q , который минимизирует **условную** энтропию при известном ответе:

$$H(Q, A) = H[P(C | \langle Q_1, A_1 \rangle, \dots, \langle Q_n, A_n \rangle, \langle Q, A \rangle)],$$

$$Q^* = \arg \min_Q \sum_A H(Q, A) P_A;$$

- Используя результаты с предыдущего шага, можно выбирать новый вопрос за время $O(|C| \times |Q| \times |A|)$.

Подведем итоги

Байесовский
подход и
Акинатор

Янгель В.К.

Введение

Ликбез

Выбор
персонажа по
заданным
ответам на
вопросы

Стратегия
выбора
вопросов

Итоги

- Мы научились задавать вопросы и оценивать вероятность того, что загадан был тот или иной персонаж;
- Чтобы сформулировать задачу в вероятностных терминах, мы применили байесовский подход: представили все объекты случайными величинами, знания о них — распределениями вероятности и применили формулу Байеса для перехода от априорных знаний к апостериорным;
- Для выбора очередного вопроса мы применили теорию информации: каждый раз мы пытаемся как можно сильнее понизить энтропию распределения, представляющего наши знания;
- Весь использованный математический аппарат имеет простую интерпретацию “на словах” и согласуется с нашим common sense.

Пицца для глаз

Байесовский
подход и
Акинатор

Янгель Б.К.

Введение

Ликбез

Выбор
персонажа по
заданным
ответам на
вопросы

Стратегия
выбора
вопросов

Итоги

Посмотреть на то, что получилось в итоге, можно
[здесь](#).