Приближенные алгоритмы поиска в графе несмежных клик минимального суммарного веса

Э. Х. Гимади[1], Кельманов А.А.[1], Пяткин А.В.[1], Хачай М.Ю.[2]

[1]Новосибирский госуниверситет, ИМ СО РАН;
[2]Уральский федеральный университет, ИММ Уро РАН

10-я Международная конференция ИОИ-2014,
о. Крит, Греция, 4 – 11 октября 2014 г.

Абстракт

О чем локлад

Рассматривается задача m-Weighted Clique Problem (m-WCP) – отыскания нескольких клик заданных размеров минимального суммарного веса в полном неориентированном вершинно- и реберно-взвешенном графе.
В общем случае задача NP-трудна в сильном смысле и слабо аппроксимируема.

Абстракт

Результаты, представленные в докладе:

Абстракт

Результаты, представленные в докладе:

- Предложен приближённый алгоритм решения задачи, полиномиальный при фиксир-м числе искомых клик.

Абстракт

Результаты, представленные в докладе:

- Предложен приближённый алгоритм решения задачи, полиномиальный при фиксир-м числе искомых клик.
- Доказана оценка точности 2 алгоритма на подклассах Metric m-WCP и Quadratic Euclidean m-WCP.

Абстракт

Результаты, представленные в докладе:

- Предложен приближённый алгоритм решения задачи, полиномиальный при фиксир-м числе искомых клик.
- Доказана оценка точности 2 алгоритма на подклассах Metric m-WCP и Quadratic Euclidean m-WCP.
- Показана достижимость полученной оценки точности на выделенных подклассах задачи.

Введение

Часто в задаче дискретной оптимизации на графе требуется найти некоторый подграф экстремального суммарного веса, к примеру, остовное дерево, паросочетание, гамильтонов цикл, ...

Введение

Часто в задаче дискретной оптимизации на графе требуется найти некоторый подграф экстремального суммарного веса, к примеру, остовное дерево, паросочетание, гамильтонов цикл, ...

Некот. такие задачи полин. разрешимы, например, задача о назначении (Диниц и Кронрод) и поиска остовного дерева минимального веса (Prim).

Часто в задаче дискретной оптимизации на графе требуется найти некоторый подграф экстремального суммарного веса, к примеру, остовное дерево, паросочетание, гамильтонов цикл, …

Некот. такие задачи полин. разрешимы, например, задача о назначении (Диниц и Кронрод) и поиска остовного дерева минимального веса (Prim).

Но большая их часть NP-трудна, как например, известная задача коммивояжера.

Задача Weighted Clique Problem (WCP)

К числу таких трудных задач принадлежит и задача WCP – отыскания **одной** клики заданного размера миним. веса в полном неор. графе.

Задача Weighted Clique Problem (WCP)

К числу таких трудных задач принадлежит и задача WCP – отыскания **одной** клики заданного размера миним. веса в полном неор. графе.

Результаты исследования этой задачи были представлены авторами доклада (совм. с И.И. Ереминым) на предыдущей 9-й конф. ИОИ-2013 в г. Казани.

Задача Weighted Clique Problem (WCP)

К числу таких трудных задач принадлежит и задача WCP – отыскания **одной** клики заданного размера миним. веса в полном неор. графе.

Результаты исследования этой задачи были представлены авторами доклада (совм. с И.И. Ереминым) на предыдущей 9-й конф. ИОИ-2013 в г. Казани.

См. публикации в журналах:
1) Труды ИММ УрО РАН, 2013, Т. 19. № 2, С. 134-143.
2) Proc. of Steklov Institute. 2014. Vol. 284. pp 87-95.

Введение

В последнее время пристальное внимание стало уделяться рассмотрению проблем поиска в графе **нескольких** реберно- и/или вершинно-несмежных структур экстремального суммарного веса.

В последнее время пристальное внимание стало уделяться рассмотрению проблем поиска в графе **нескольких** реберно- и/или вершинно-несмежных структур экстремального суммарного веса.

Некот. из этих расширенных задач сохр-т свой полин. статус. Например, задача отыскания в полном взвеш. неориент. графе неск. реберно-несмежных остовных деревьев миним. сум. веса (Roskind, Tarjan - 1985).

В последнее время пристальное внимание стало уделяться рассмотрению проблем поиска в графе **нескольких** реберно- и/или вершинно-несмежных структур экстремального суммарного веса.

Некот. из этих расширенных задач сохр-т свой полин. статус. Например, задача отыскания в полном взвеш. неориент. графе неск. реберно-несмежных остовных деревьев миним. сум. веса (Roskind, Tarjan - 1985).

Однако, больш-во таких расширений труднорешаемы.

m-Weighted Clique Problem (m-WCP).

Таковой является и рассматриваемая в данном докладе задача m-Weighted Clique Problem (m-WCP)

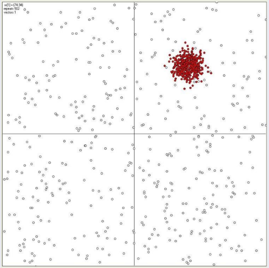
m-Weighted Clique Problem (m-WCP).

Таковой является и рассматриваемая в данном докладе задача m-Weighted Clique Problem (m-WCP)

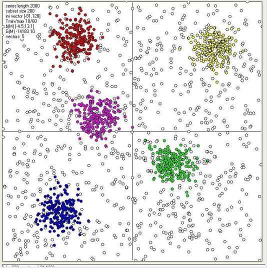
A cluster analysis problem

Суть этой фундаментальной для многих естественно-научных и технических приложений проблемы состоит в поиске в конечном множестве объектов семейства непересекающихся подмножеств (кластеров), состоящих из похожих объектов при условии, что известны мощности искомых кластеров и численно выраженные (заданные) результаты попарных сравнений этих объектов.

Пример 1. Weighted Clique Problem (WCP)



Пример 2. m-Weighted Clique Problem (m-WCP), $m = 4$



При этом игнорируются сравнения с произвольными (случайными или "ошибочными") объектами, трактуемыми как "мусор".
Задача m-Weighted Clique Problem обобщает проблему на случай, когда на входе дополнительно заданы веса объектов.

m-Weighted Clique Problem (m-WCP).

Problem Formulation

m-Weighted Clique Problem (m-WCP).

Problem Formulation

Дано: полный неор. взвеш-й граф $G = (V, E, a, c)$, где $a : V \to \mathbb{R}$, $c : E \to \mathbb{R}$, и натур. числа $L_1, \dots, L_m$, s.t.

$$\sum_{k=1}^{m} L_k \leqslant n.$$

m-Weighted Clique Problem (m-WCP).

Problem Formulation

Дано: полный неор. взвеш-й граф $G = (V, E, a, c)$, где $a : V \to \mathbb{R}$, $c : E \to \mathbb{R}$, и натур. числа $L_1, \ldots, L_m$, s.t.

$$\sum_{k=1}^{m} L_k \leqslant n.$$

Найти: в графе G семейство $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ вершинно-непересекающихся клик порядков $L_1, \ldots, L_m$ с миним. сумм. весом вершин и ребер графа, входящих в эти клики.

m-Weighted Clique Problem (m-WCP).

Задача m-WCP может быть записана в виде:

m-Weighted Clique Problem (m-WCP).

Задача m-WCP может быть записана в виде:

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{e \in E(C_k)} w_e \to \min_{\{\mathcal{C}_k\}} \qquad (1)$$

$$|C_k| = L_k, \ k = \mathbb{N}_m; \ C_{k'} \cap C_{k''} = \varnothing, \ k' \neq k'', \qquad (2)$$

m-Weighted Clique Problem (m-WCP).

Задача m-WCP может быть записана в виде:

$$\mathcal{F}(\mathcal{C}) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{e \in E(C_k)} w_e \to \min_{\{\mathcal{C}_k\}} \qquad (1)$$

$$|C_k| = L_k, \ k = \mathbb{N}_m; \ C_{k'} \cap C_{k''} = \varnothing, \ k' \neq k'', \qquad (2)$$

с использ-м модифицированной весовой функции ребер

$$w_e = \frac{a_i}{L_k - 1} + c_e + \frac{a_j}{L_k - 1},$$

где $e = (i,j) \in E(C_k)$, $i,j \in \mathbb{N}_n$, $k = \mathbb{N}_m$.

Вычислительная сложность задачи m-WCP

Теорема

Задача m-WCP в общем случае NP-трудна в с.с. и неаппроксимируема.

m-Weighted Clique Problem (m-WCP).

Вычислительная сложность задачи m-WCP

Теорема

Задача m-WCP в общем случае NP-трудна в с.с. и неаппроксимируема.

Теорема

NP-трудность в с.с. сохраняется

m-Weighted Clique Problem (m-WCP).

Вычислительная сложность задачи m-WCP

Теорема

Задача m-WCP в общем случае NP-трудна в с.с. и неаппроксимируема.

Теорема

NP-трудность в с.с. сохраняется

- для задачи **Metric m-WCP**, в которой справедливо нер-во треуг. $c_{ij} \leqslant c_{ik} + c_{kj}$,

m-Weighted Clique Problem (m-WCP).

Вычислительная сложность задачи m-WCP

Теорема

Задача m-WCP в общем случае NP-трудна в с.с. и неаппроксимируема.

Теорема

NP-трудность в с.с. сохраняется

- для задачи **Metric m-WCP**, в которой справедливо нер-во треуг. $c_{ij} \leqslant c_{ik} + c_{kj}$,
- для задачи **Quadratic Euclidean m-WCP**, в кот. функция c_e порождена квадратами попарных расстояний между эл-ми некот. n-точечной конфигурации в евклидовом пр-ве.

m-Weighted Clique Problem (m-WCP).

Приближ. решение задачи m-WCP

Суть предлаг. подхода состоит в замене решения исх. задачи m-WCP на оптим. решение специальной (**вспомогательной**) задачи и последующей оценкой точности такой замены.

В качестве вспомог. задачи берется задача

m-Weighted Clique Problem (m-WCP).

Приближ. решение задачи m-WCP

Суть предлаг. подхода состоит в замене решения исх. задачи m-WCP на оптим. решение специальной (**вспомогательной**) задачи и последующей оценкой точности такой замены.

В качестве вспомог. задачи берется задача

m-Star — поиска сем-ва m несмежных звезд заданных размеров $L_1, \ldots L_m$ с миним. суммой весов входящих в них вершин и ребер.

m-Weighted Clique Problem (m-WCP).

Использование транспортного алгоритма

Для конфигурации с фиксированными центрами звезд такое семейство отыскивается, например, транспортным алгоритмом за время $O(mn^2 \log n)$ (Кляйншмидт и Шаннатх) .

С учетом числа возможных конфигураций центров звезд, задача m-Star решается за время $O(mn^{m+2} \log n)$.

Metric m-WCP.

Теорема о прибл. реш. задачи Metric m-WCP

Задача Metric m-WCP решается за время $\mathcal{O}(n^{m+2}\log n)$ с неулучшаемой оценкой точности

$$\frac{\mathcal{F}(\mathcal{B}^*)}{\mathcal{F}(\mathcal{C}^*)} \leqslant 2\left(1 - \frac{\sum_{k=1}^{m} S(B_k^*)}{\sum_{k=1}^{m} L_k S(B_k^*)}\right). \qquad (3)$$

где семейство звезд $\mathcal{B}^* = \{B_1^*, \ldots, B_m^*\}$ — оптимальное решение вспомогательной задачи.

Metric m-WCP.

Пример 1 достижимости (Metric m-WCP).

Пусть $n = 12$, $m = 2$, $L_1 = 3, L_2 = 3$. Элементы матрицы W равны попарным расстояниям между точками на пл-ти:

$$v_1 = (1;0), v_2 = (2;0), v_3 = (3;0),$$

$$v_4 = (-1;0), v_5 = (-2;0), v_6 = (-3;0),$$

$$v_7 = (0;1), v_8 = \left(\frac{1}{2}; \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right), v_9 = \left(-\frac{1}{2}; \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$v_{10} = (0;-1), v_{11} = \left(\frac{1}{2}; -\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right), v_{12} = \left(-\frac{1}{2}; -\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right).$$

Очевидно, эл-ты такой матрицы W удовл. нер-ву тр-ка.

Metric m-WCP.

Пример 1 достижимости (Metric m-WCP).

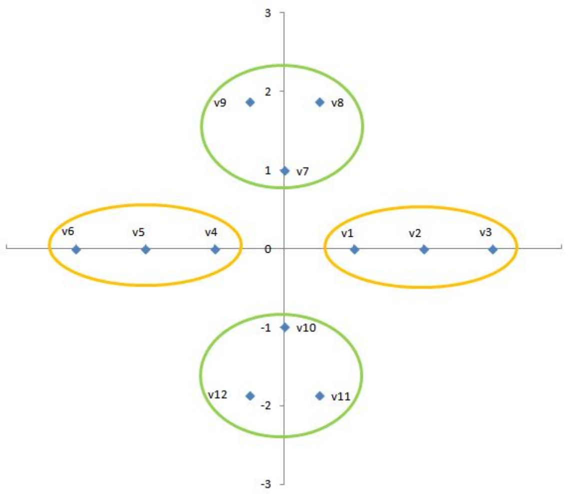


Рис. : К примеру 1.

Metric m-WCP.

Пример 1 достижимости (Metric m-WCP).

В качестве опт. решения вспом. задачи м. взять $\mathcal{B}^* = (B_1^*, B_2^*)$, где $B_1^* = \{v_1, v_2, v_3\}$, $B_2^* = \{v_4, v_5, v_6\}$ с $b_1^* = v_2$ and $b_2^* = v_5$, соотв-но. При этом $S(B_1^*) = 2$, $S(B_2^*) = 2$ и $F(B_1^*) = 4$, $F(B_2^*) = 4$. Т.о., $F(\mathcal{B}^*) = 8$. Оптимум достигается на решении $\mathcal{C}^* = (C_1^*, C_2^*)$, где $C_1^* = \{v_7, v_8, v_9\}$, $C_2^* = \{v_{10}, v_{11}, v_{12}\}$, с $F(C_1^*) = 3$, $F(C_2^*) = 3$. Т.о., оптим. знач. цел. ф-ии равно $F(\mathcal{C}^*) = 6$, и точность равна $\frac{4}{3}$.

Тот же результат следует из формулы (3):

$$\frac{F(\mathcal{B}^*)}{F(\mathcal{C}^*)} = 2\Big(1 - \frac{\sum_{k=1}^{2} S(B_k^*)}{\sum_{k=1}^{2} L_k S(B_k^*)}\Big) = 2\Big(1 - \frac{2+2}{3\cdot 2 + 3\cdot 2}\Big) = \frac{4}{3}.$$

Теорема о прибл. реш. задачи Quadratic Euclidean m-WCP

Задача Quadratic Euclidean m-WCP решается за время $\mathcal{O}(n^{m+2}\log n)$ с достижимой оценкой точности 2.

Quadratic Euclidean m-WCP.

Пример 2 достижимости (Quadr. Eucl. m-WCP)

Пусть $n = 8$, $m = 2$, $L_1 = L_2 = 3$, веса вершин равны 0 и задана

$$\text{матрица весов рёбер } W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 4 & 5 & 5 & \bar{5} \\ 1 & 0 & 4 & 1 & 5 & 4 & 8 & \bar{7} \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 5 & 8 & 4 & \bar{5} \\ 1 & 1 & 3 & 0 & \bar{5} & \bar{5} & \bar{7} & 2\cdot\bar{4} \\ 4 & 5 & 5 & \bar{5} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 8 & \bar{5} & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 5 & 8 & 4 & \bar{7} & 1 & 4 & 0 & 1 \\ \bar{5} & \bar{7} & \bar{5} & 2\cdot\bar{4} & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\bar{r} = (r - 2\sqrt{3})$.

Данная матрица порождена, например, мн-м точек на пл-ти:

$$v_1 = (0; 1), \quad v_2 = (1; 1), \quad v_3 = (-1; 1), \quad v_4 = (1/2; 1 - \sqrt{3}/2),$$
$$v_5 = (0; -1), \quad v_6 = (1; -1), \quad v_7 = (-1; -1), \quad v_8 = (-1/2; -1 + \sqrt{3}/2),$$

задающих элементы $w_{ij} = \|v_i - v_j\|^2$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, матрицы W.

Quadratic Euclidean m-WCP.

Пример 2 достижимости (Quadr. Eucl. m-WCP)

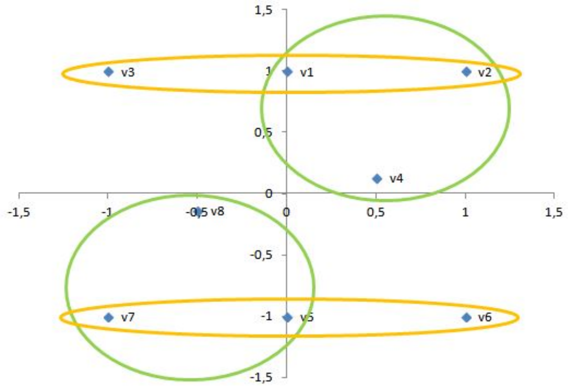


Рис. : К примеру 2.

Quadratic Euclidean m-WCP.

Пример 2 достижимости (Quadr. Eucl. m-WCP)

В этом примере $OPT = 6$ достигается на кликах $C_1^* = \{v_1, v_2, v_4\}$ и $C_2^* = \{v_5, v_7, v_8\}$.

Одним из опт. реш. вспом. задачи явл. звезды $B_1^* = \{v_1, v_2, v_3\}$ с центром v_1 и $B_2^* = \{v_5, v_6, v_7\}$ с центром v_5.

Для цел. ф-ии осн. задачи на полученном решении имеем $\mathcal{F}(\mathcal{B}^*) = 12$.

Поэтому для оценки точности алгоритмического решения имеем $\mathcal{F}(\mathcal{B}^*)/\mathcal{F}(\mathcal{C}^*) = 2$, т.е. оценка 2 точности алгоритма достижима.

Заключение

Представленные результаты:

Заключение

Представленные результаты:

- Показано, что в общем случае задача NP-трудна в сильном смысле и слабо аппроксимируема.

Заключение

Представленные результаты:

- Показано, что в общем случае задача NP-трудна в сильном смысле и слабо аппроксимируема.
- Предложен приближённый алгоритм решения задачи, полиномиальный при фиксированном числе искомых клик.

Представленные результаты:

- Показано, что в общем случае задача NP-трудна в сильном смысле и слабо аппроксимируема.
- Предложен приближённый алгоритм решения задачи, полиномиальный при фиксированном числе искомых клик.
- Доказана оценка точности 2 алгоритма на подклассах Metric m-WCP и Quadratic Euclidean m-WCP.

Представленные результаты:

- Показано, что в общем случае задача NP-трудна в сильном смысле и слабо аппроксимируема.
- Предложен приближённый алгоритм решения задачи, полиномиальный при фиксированном числе искомых клик.
- Доказана оценка точности 2 алгоритма на подклассах Metric m-WCP и Quadratic Euclidean m-WCP.
- Показана достижимость полученной оценки точности на выделенных подклассах задачи.

Публикация

Э.Х. Гимади, А.В. Кельманов, А.В. Пяткин, М.Ю. Хачай. Эффективные алгоритмы с оценками точности для некоторых задач поиска нескольких клик в полном неориентированном графе // Труды ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 2, С. 99-112.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!