ВМК МГУ

Семинар 9. Гауссовские процессы

Курс: Байесовские методы в машинном обучении, 2016

1. Доказать формулу для блочного обращения матрицы:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BPCA^{-1} & -A^{-1}BP \\ -PCA^{-1} & P \end{bmatrix},\ P = (D - CA^{-1}B)^{-1}.$$

2. Вывести формулу прогнозного распределения для ГП регрессии, т.е. из условия

$$p(\boldsymbol{t}_*, \boldsymbol{t}) = \mathcal{N}\left([\boldsymbol{t}_*, \boldsymbol{t}] \mid [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}], \begin{bmatrix} K & \boldsymbol{k}_* \\ \boldsymbol{k}_*^T & \boldsymbol{k}_{**} \end{bmatrix}\right)$$

   найти $p(\boldsymbol{t}_*|\boldsymbol{t})$.

3. Рассмотрим модель байесовской линейной регрессии:

$$p(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{w}|X, \beta, A) = \mathcal{N}(\boldsymbol{t}|X\boldsymbol{w}, \beta^{-1}I)\mathcal{N}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{0}, A^{-1}).$$

   Для этой модели известно, что

$$\begin{aligned} &p(\boldsymbol{w}|X, \beta, A) = \mathcal{N}(\boldsymbol{w}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma), \\ &\boldsymbol{\mu} = \beta\Sigma X^T\boldsymbol{t},\ \Sigma = (\beta X^T X + A)^{-1}, \\ &p(t_*|\boldsymbol{x}_*, \boldsymbol{t}, X, \beta, A) = \mathcal{N}(t_*|\boldsymbol{x}_*^T\boldsymbol{\mu}, \beta^{-1} + \boldsymbol{x}_*^T\Sigma\boldsymbol{x}_*). \end{aligned}$$

   Требуется доказать, что прогнозное распределение $p(t_*|\boldsymbol{x}_*, \boldsymbol{t}, X, \beta, A)$ в данной модели соответствует модели гауссовского процесса для некоторой ковариационной функции $k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.