

# ОПТИМИЗАЦИЯ ИЗМЕРЕНИЙ НЕСТАБИЛЬНОСТИ СТАНДАРТОВ ЧАСТОТЫ

**БОРИСОВ Б.Д.**

*Институт лазерной физики (ИЛФ СО РАН), Новосибирск*

***Никогда не измеряйте ничего, кроме частоты,***  
- совет нобелевского лауреата Артура Шавлова  
студентам Стэнфордского университета

Развитие физики и техники отражает тенденцию перехода не только к переопределению основных физических единиц (метр, секунда) через частоту или период высокостабильного колебания, но и к сведению измерений многих параметров и величин к частотным измерениям, обеспечивающим большую точность в сравнении с другими.

1 с = 1/ 9 192 631 770 Гц (9.2 ГГц) периодов генерации атома Cs-133,

1 м = расстояние, проходимое светом в вакууме за 1/ 299 792 458 долю сек.

Возможен единый эталон “частота - время – длина”

Оптические стандарты частоты и времени (оптические часы) являются системой, которая способна определять единицу времени – секунду с помощью высокостабильных оптических колебаний.

Более того, успешно развивается техника защищенной передачи оптического сигнала на большие расстояния по оптоволоконным линиям.

Переход на оптические несущие обеспечивает повышение точности измерений и скорости передачи информации.

Лучший результат сегодня – для относительной нестабильности частоты

$$\delta\nu/\nu = 10^{-18}$$

B.J. Bloom, T.L. Nicholson, J.R. Williams et al. “*An optical lattice clock with accuracy and stability at the 10-18 level*”, *Nature* 506, pp. 71-75, Feb. 2014,

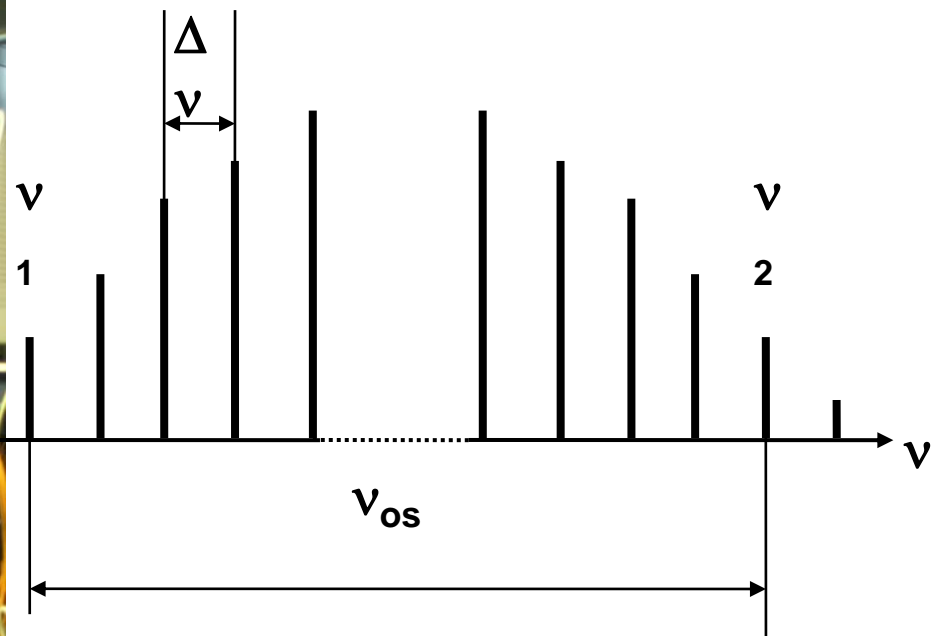
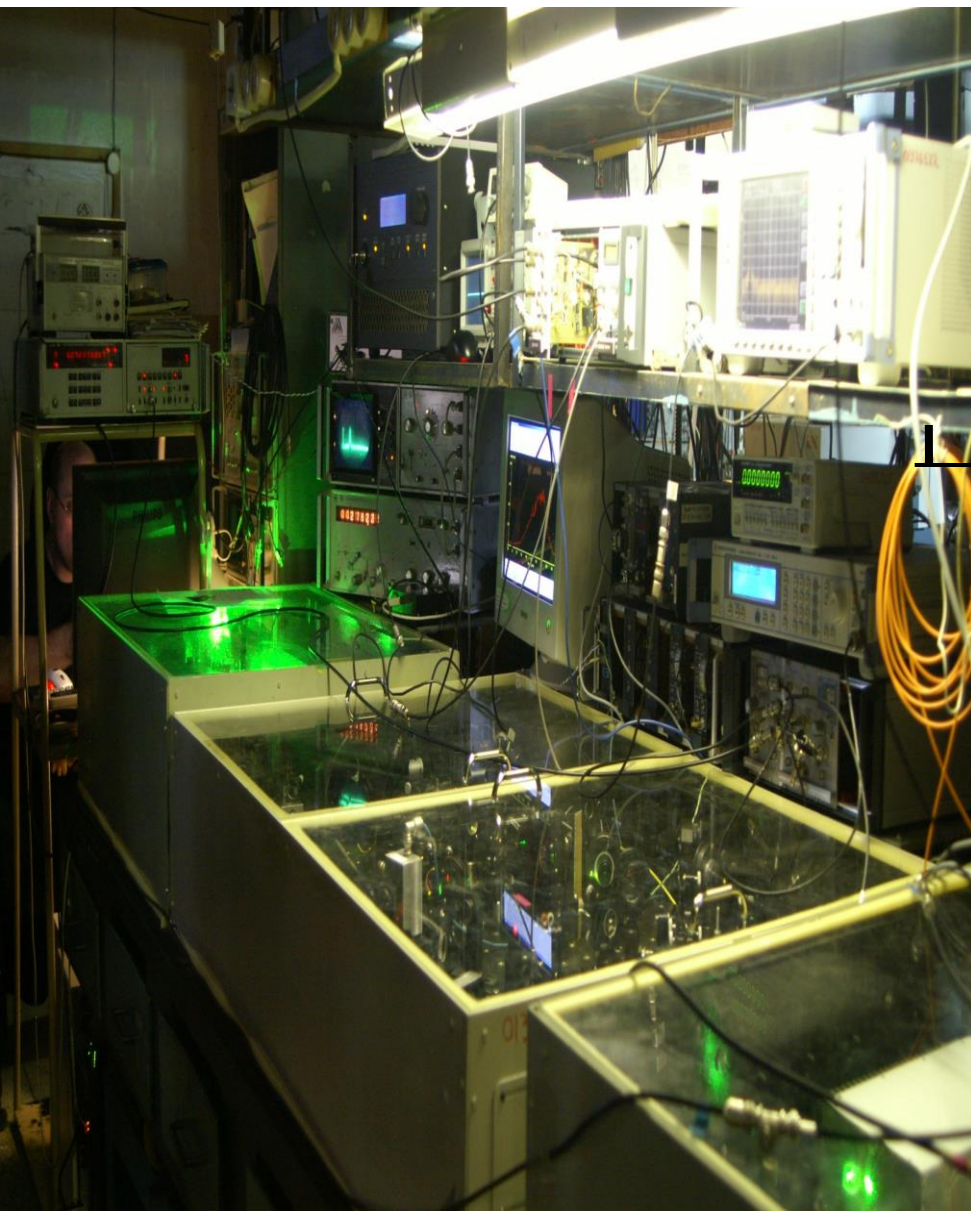
N. Hinkley et al. *An Atomic clock with 10-18 in stability*, *Science* 341, 1215-1218 (2013)

- Оптические часы состоят из высокостабильного лазерного стандарта частоты и системы деления частоты из оптического в радиодиапазон.





# 2010 г. , Стандарт частоты на фемтосекундном лазере и система деления частот



$$\nu_2 - \nu_1 - \nu_{os} = 0$$

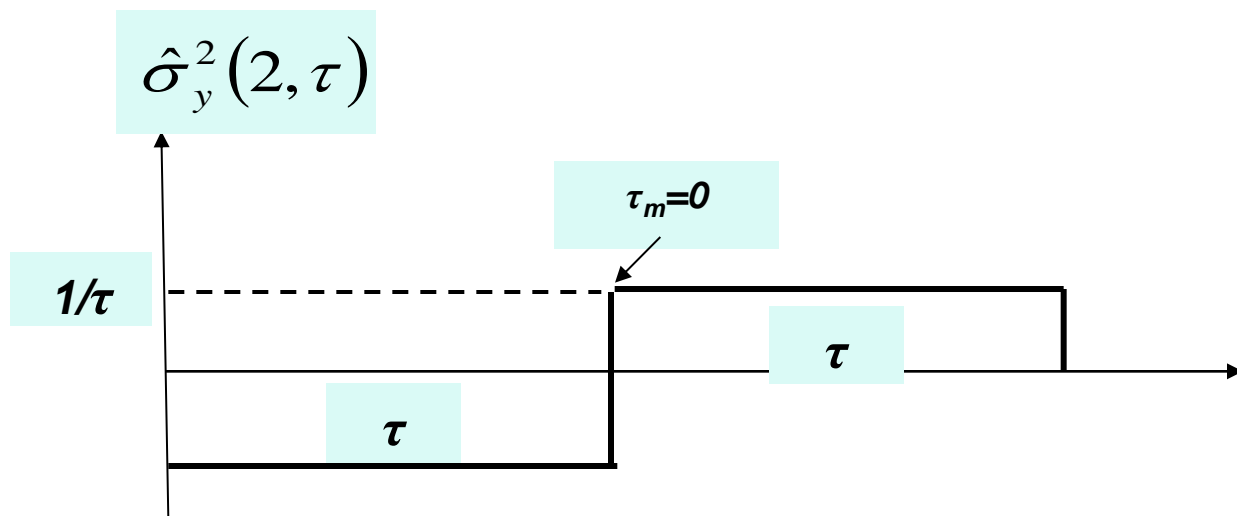
$\nu_{os}$  - frequency of optical standard

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕСТАБИЛЬНОСТИ ЧАСТОТЫ

Степень нестабильности частоты измеряется во временной области **специальной характеристикой - ДИСПЕРСИЕЙ АЛЛАНА** или дисперсией первых разностей средних значений частоты на соседних интервалах длительностью  $\tau$  (структурной функцией 1-го порядка)

$$\sigma_y^2(2, \tau) = \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1})^2 \rangle$$

где  $\bar{y}_i$  и  $\bar{y}_{i+1}$  - средние относительные значения частоты на смежных парных, с конечной длительностью  $\tau$  сек каждый, интервалах с нулевой паузой между ними. Символ  $\langle \rangle$  - обозначает оператор усреднения по бесконечному интервалу. Временная диаграмма измерений



## ПОЧЕМУ ДИСПЕРСИЯ АЛЛАНА ?

Для фликкер – шумов со спектральными плотностями и степенного типа

$$S(\omega) = \omega^\nu, \quad -2 \leq \nu \leq 2,$$

интеграл оценки дисперсии на выходе измерителя

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 \cdot d\omega - \text{расходится,}$$

$H(\omega)$  – передаточная функция измерителя.

$$\text{Для частотомера имеем } |H(\omega)|^2 = \frac{\text{Sin}^2 \omega\tau}{(\omega\tau)^2},$$

$$\text{Для дисперсии Аллана имеем } |H(\omega)|^2 = \frac{\text{Sin}^4(\omega\tau)}{(\omega\tau)^2},$$

благодаря такой форме  $|H(\omega)|^2$  для дисперсии Аллана интеграл –  
– не расходится

# МОДЕЛИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ ОСНОВНЫХ ВИДОВ ВОЗМУЩЕНИЙ ФЛИККЕРНОГО ТИПА

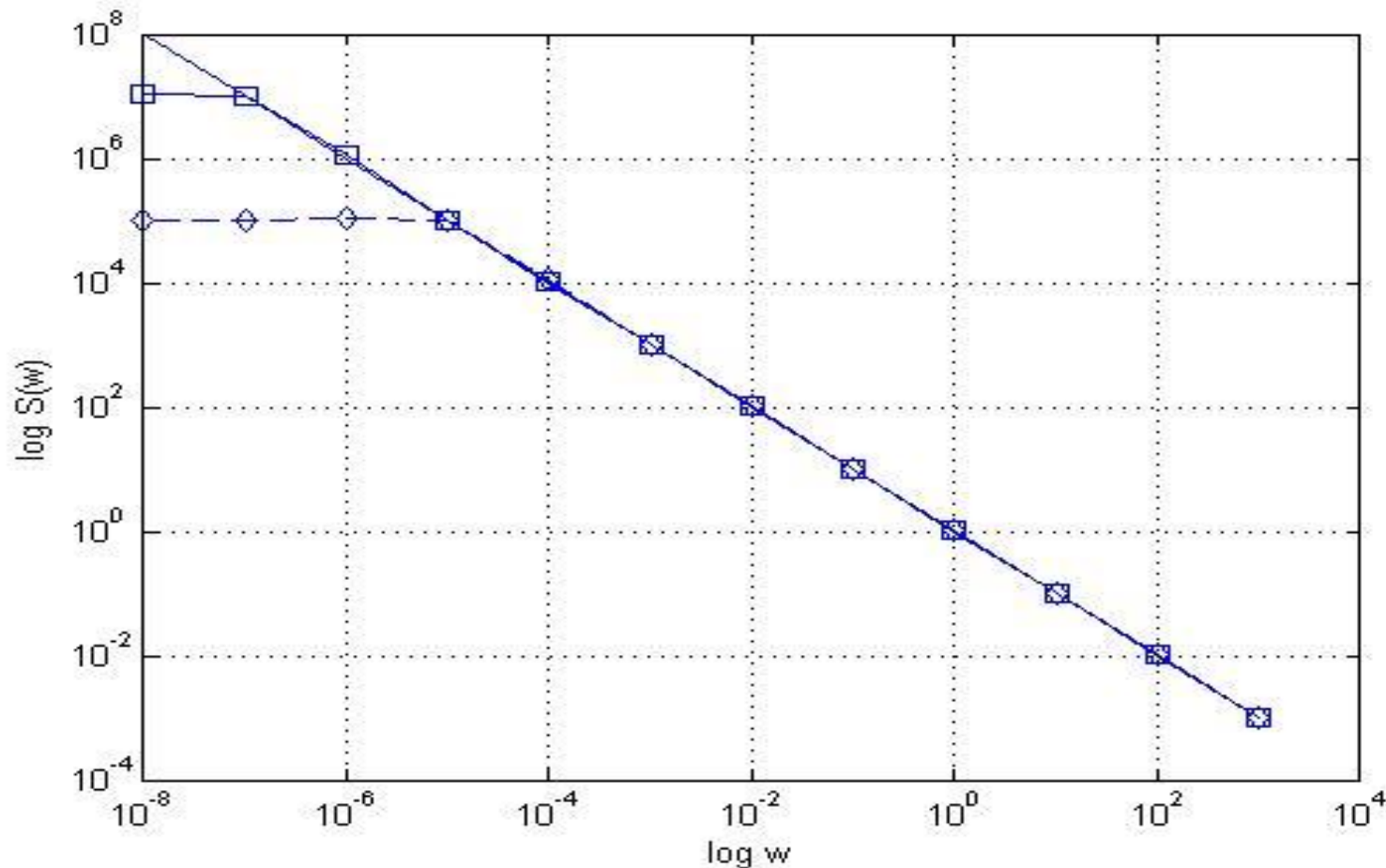
	ИП ФЛИККЕР-ШУМА	ИДЕАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ $S_y(f^k)$	СТАЦИОНАРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ	КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ $R_y(\tau)$ и $R_\varphi(\tau)$
1	Белый фазовый шум, $k = +2$	$f^{+2}$	$f^{+2} \leftrightarrow N_\varphi,$ $S_y \leftrightarrow S_\varphi$	$R_\varphi(\tau) = N_\varphi \delta(\tau)/2$ на выходе фазового детектора совпадает с формой п.3
2	Фазовый фликкер – шум, $k = +1$	$f^{+1}$	$f^{+1} \leftrightarrow N_\varphi^{-1},$ $S_y \leftrightarrow S_\varphi$	$R_\varphi(\tau) = \dots$ на выходе фазового детектора, совпадает с формой п. 4
3	Белый частотный шум $k = 0$	$N_0/2$	$N_0/2$	$N_0 \delta(\tau)/2$
4	Частотный фликкер шум $k = -1$	$f^{-1}$	$\frac{a + f}{a^2 + f^2}$	$\frac{\pi \exp(-a \tau ) - [e^{-a \tau } \overline{Ei}(a\tau) + e^{a \tau } Ei(-a\tau)]}{2}$
5	Частотный шум случайных блужданий $k = -2$	$f^{-2}$	$\frac{a}{a^2 + f^2}$	$\exp(-a \tau )$

$\overline{Ei}, Ei$  - модифицированная и обычная интегральные показательные функции,

$a$  - граница роста низкочастотного спектра

# Модели идеального, $1/f$ , спектра нестационарного процесса

и стационарных приближений в диапазоне  $10^{-8} - 10^{+3}$  Гц.



Сплошная линия – точная,  $1/f$ , модель в диапазоне  $10^{-8} - 10^{+3}$  Гц,  
пунктир с квадратами – модель спектра стационарного процесса с  $a = 10^{-7}$  Гц  
( $1/a = 100$  суток) и пунктир с ромбами с  $a = 10^{-5}$  Гц ( $1/a = 1$  сутки).



# СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ

в определении ДИСПЕРСИИ АЛЛАНА входит только **одна величина** –  $\bar{y}_i$  - среднее значение флуктуаций частоты на конечном интервале

$$\sigma_y^2(2, \tau) = \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_i - \bar{y}_{i-1})^2 \rangle$$

- **Но реальная оценка** производится по формуле

$$\sigma_y^2(2, \tau) \cong \frac{1}{2M} \sum_1^M \left[ \left( \frac{1}{\tau} \int_{\tau}^{2\tau} y(t + \tau) \cdot W(t - \theta) \cdot dt \right) - \left( \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} y(t) \cdot W(t - \theta) \cdot dt \right) \right]^2$$

- $y(t)$  – относительные флуктуации частоты,  $W(t)$  – весовая функция - (окно),  $M$  – число пар измерений.

**СТАТИСТИЧЕСКУЮ ТОЧНОСТЬ ИЗМЕРЕНИЙ ОЦЕНИМ ДИСПЕРСИЕЙ ПАРАМЕТРА АЛЛАНА – (ДИСПЕРСИЕЙ ДИСПЕРСИИ) ЛИБО СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКИМ ОТКЛОНЕНИЕМ**

- **Среднеквадратическое отклонение параметра Аллана**

$$G \left[ \sigma_y^2(2, \tau) \right] \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \langle [\Delta \pm 2\sigma(\bar{y})] \rangle, \text{ где } \Delta = \bar{y}_{i+1} - \bar{y}_i$$

зависит от:

$S_y(\omega)$  – вида спектральной плотности мощности флуктуаций частоты (эксперимент),

$\sigma^2(\bar{y})$  - дисперсии оценки  $\bar{y}_i$  - среднего значения частоты на конечном интервале,

$\rho_{i,i+1}$  - степени корреляции соседних средних значений (Йошимура, 1978),

$\tau$  - длительности интервала измерения (задаётся),

$\tau_m = 0$  - длительности “мертвого” временем (аппаратно, 1 нс), (Рубиола, 2004)

$M$  - общего числа пар отсчетов, статистики усреднения (Лесаж, 1973).

Для исключения переменной  $M$  была определена **истинная (невыборочная) дисперсия параметра Аллана** – дисперсия дисперсии, Борисов, 2009.

$$G^2 \left[ \hat{\sigma}_y^2(2, \tau) \right] \cong 2 \left[ \sigma^2(\bar{y}_i) - \rho_{i,i-1} \right]$$

# ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ по определению ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ окна $W(t)$ для систем с конечной памятью

- Уравнение Винера – Заде - Рагаццини

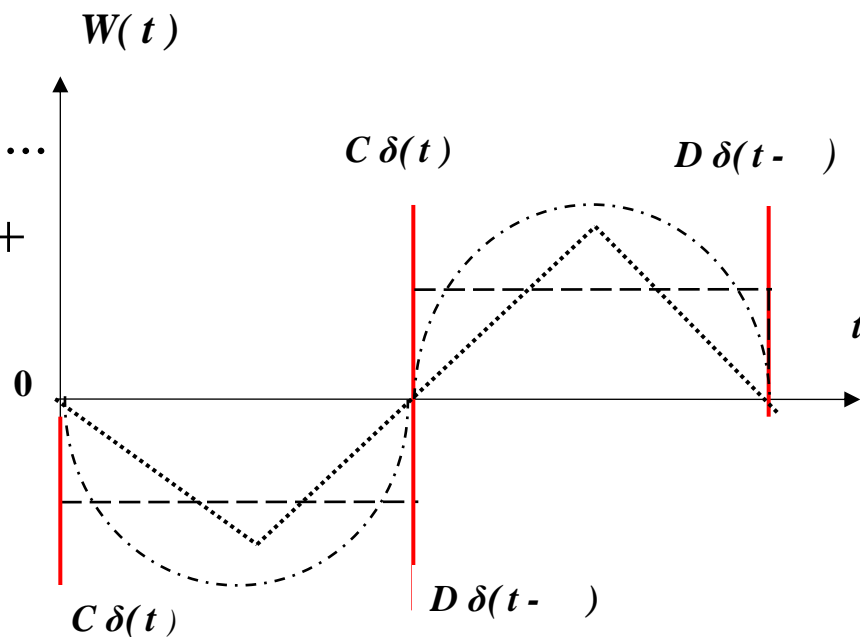
$$\int_0^{\tau} R_f(t - \theta) \cdot W(\theta) \cdot d\theta = \lambda_0 t^0 + \lambda_1 t + \dots + \lambda_n t^n$$

$t^n$  – степенной полином, задающий форму окна  $W(t)$ ,  
 $\lambda^n$  - неопределённый множитель Лагранжа для определения условного min ско,  
 $R_f$  - корреляционная функция частотных (фазовых) флуктуаций.

$$W(t) = A_0 + A_1 t + \dots + A_n t^n + B_1 \exp(\alpha_1 t) + \dots$$

$$+ B_{2m} \exp(\alpha_m t) + C_1 \delta^{l-m-1}(t) + \dots + C_{l-m}(t) +$$

$$+ D_1 \delta(t - \tau) + \dots + D_{l-m} \delta^{l-m-1}(t - \tau),$$



# ПРИМЕР работы оптимального estimator'a в сравнении с частотомером на фоне частотного шума случайных блужданий с

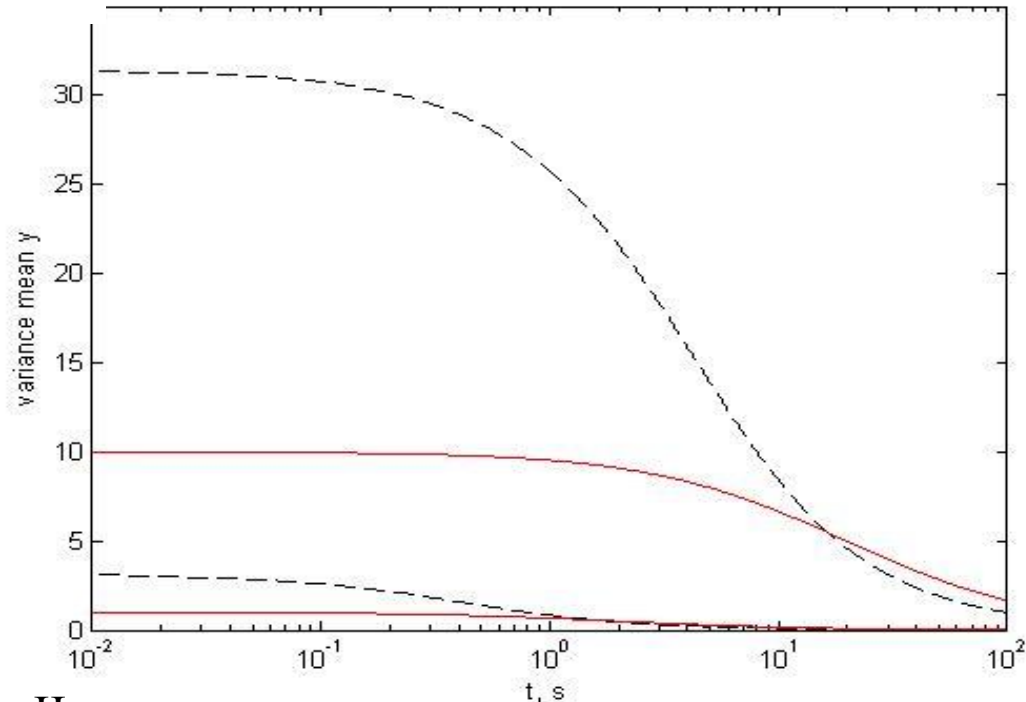
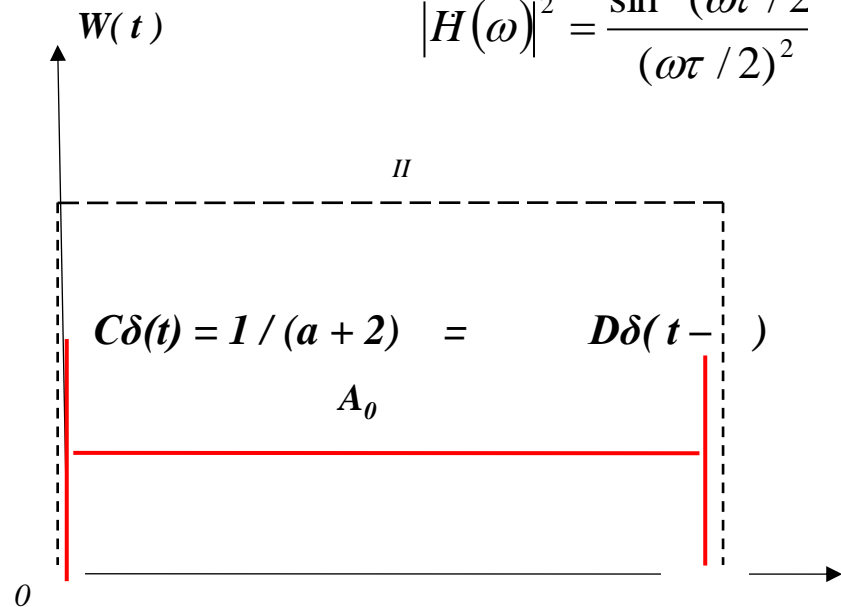
$S(\omega) = \omega^{-2} \approx \frac{2}{a^2 + \omega^2}$   $R(\theta) = \frac{1}{a} \exp(-a|\theta|)$ , где  $a > 0$  нижняя граница роста спектра фликкер - шума. При  $\tau \rightarrow \infty$ ,  $a = (1/\tau) \rightarrow 0$ ,

Дисперсия средних оценок частотомером и оптимальным фильтром

$$\sigma_{II}^2(\bar{y}) = \frac{1}{a^2 \tau} \frac{[1 - \exp(-2\pi a \tau)]}{2\pi \cdot a^3 \tau^2} \quad \sigma_{opt}^2 = \mu_0 \lambda_0 = 2A_0 / a^2 = 2 / [a(a\tau + 2)]$$

$$\sigma^2(\bar{y}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S(\omega) \cdot |H(\omega)|^2 d\omega$$

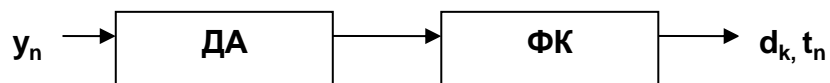
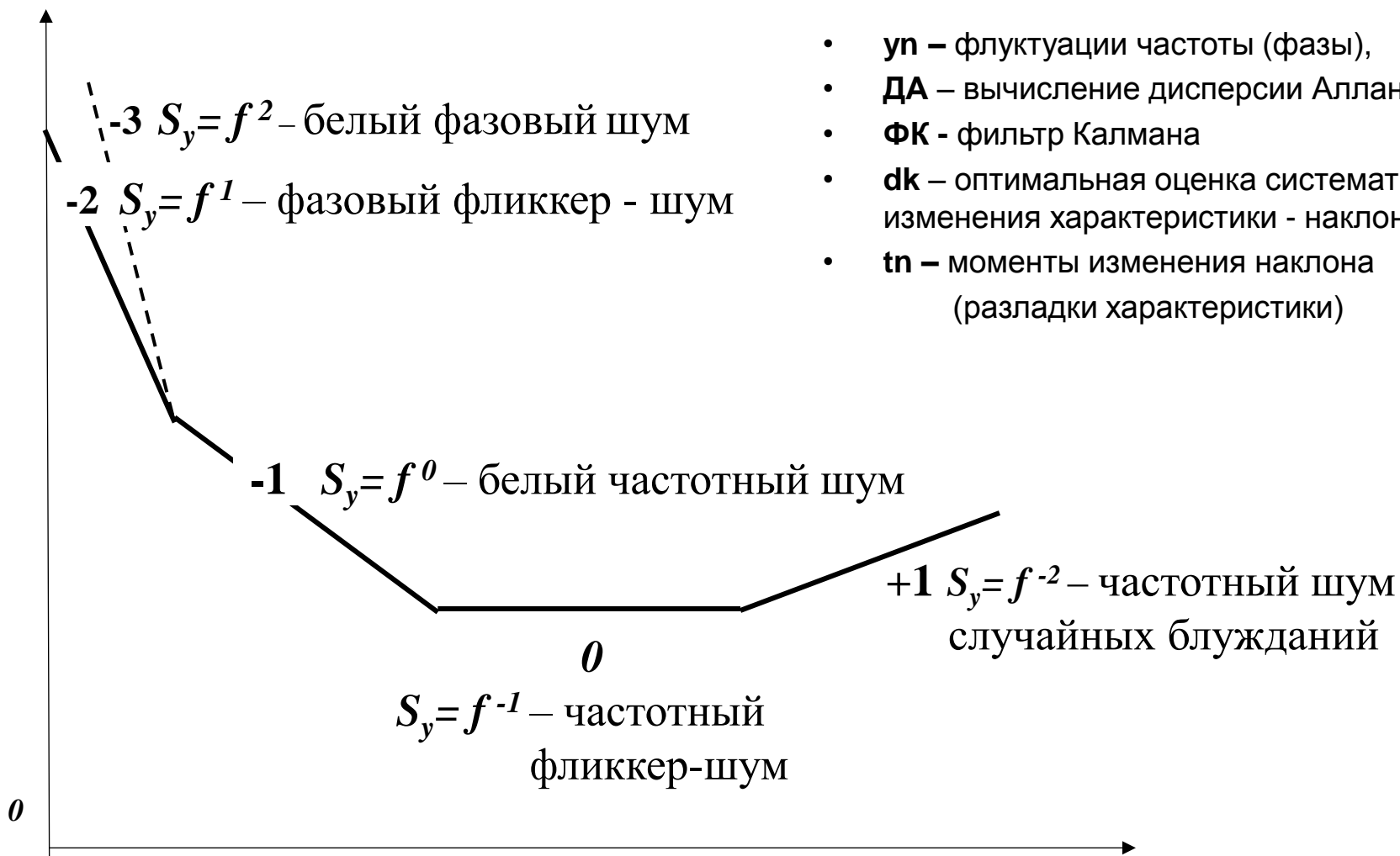
$$|H(\omega)|^2 = \frac{\sin^2(\omega\tau / 2)}{(\omega\tau / 2)^2}$$



Частотомер - пунктирная кривая,  
 оптимальный фильтр – красная кривая,  
 (верхняя пара  $a = 0.1$ , нижняя  $a = 1$ )

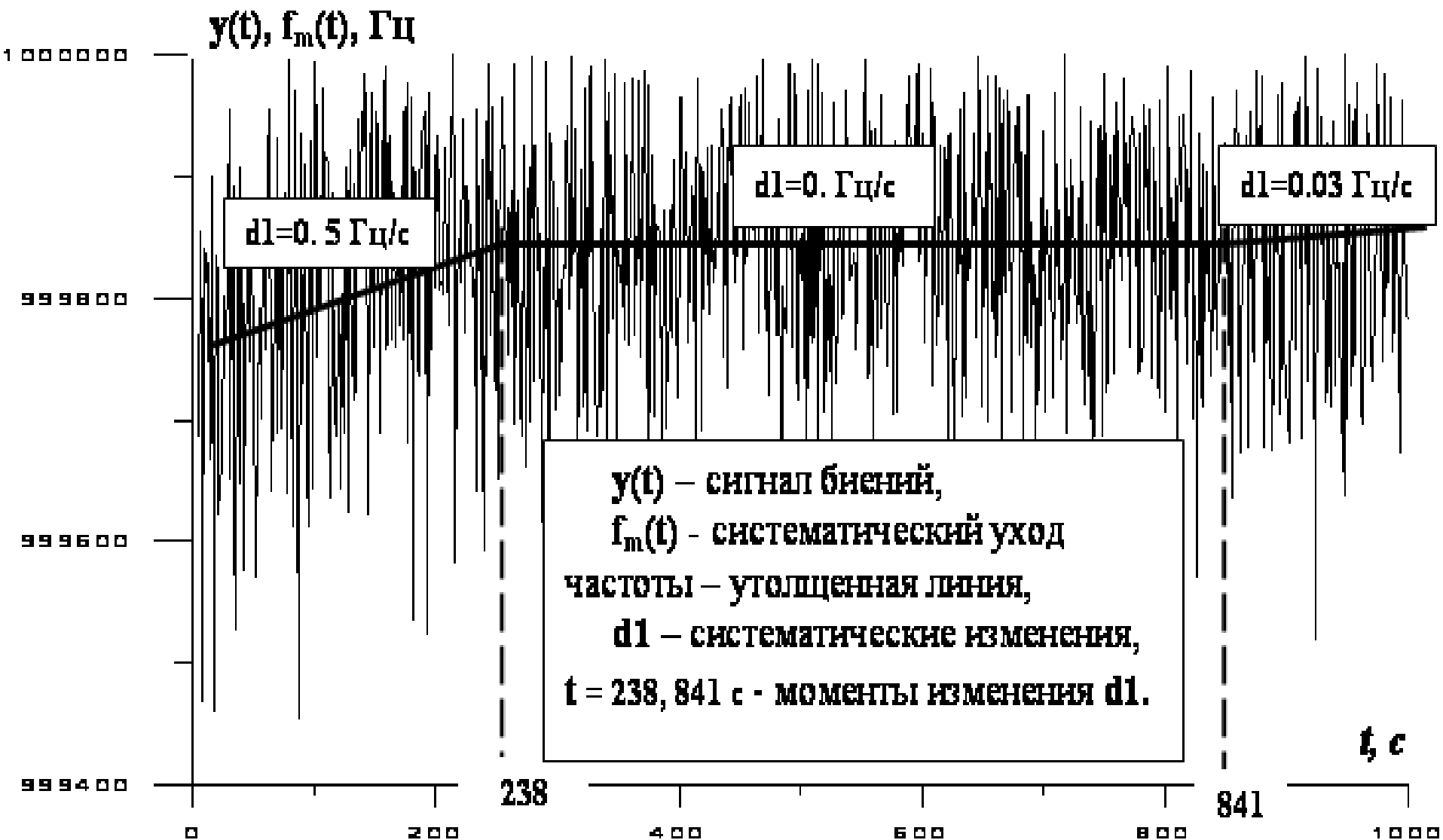
# Классификация типов ФЛИККЕР - шумов с помощью ДИСПЕРСИИ АЛЛАНА и фильтра Калмана

$$\lg \hat{\sigma}_y^2(2, \tau)$$

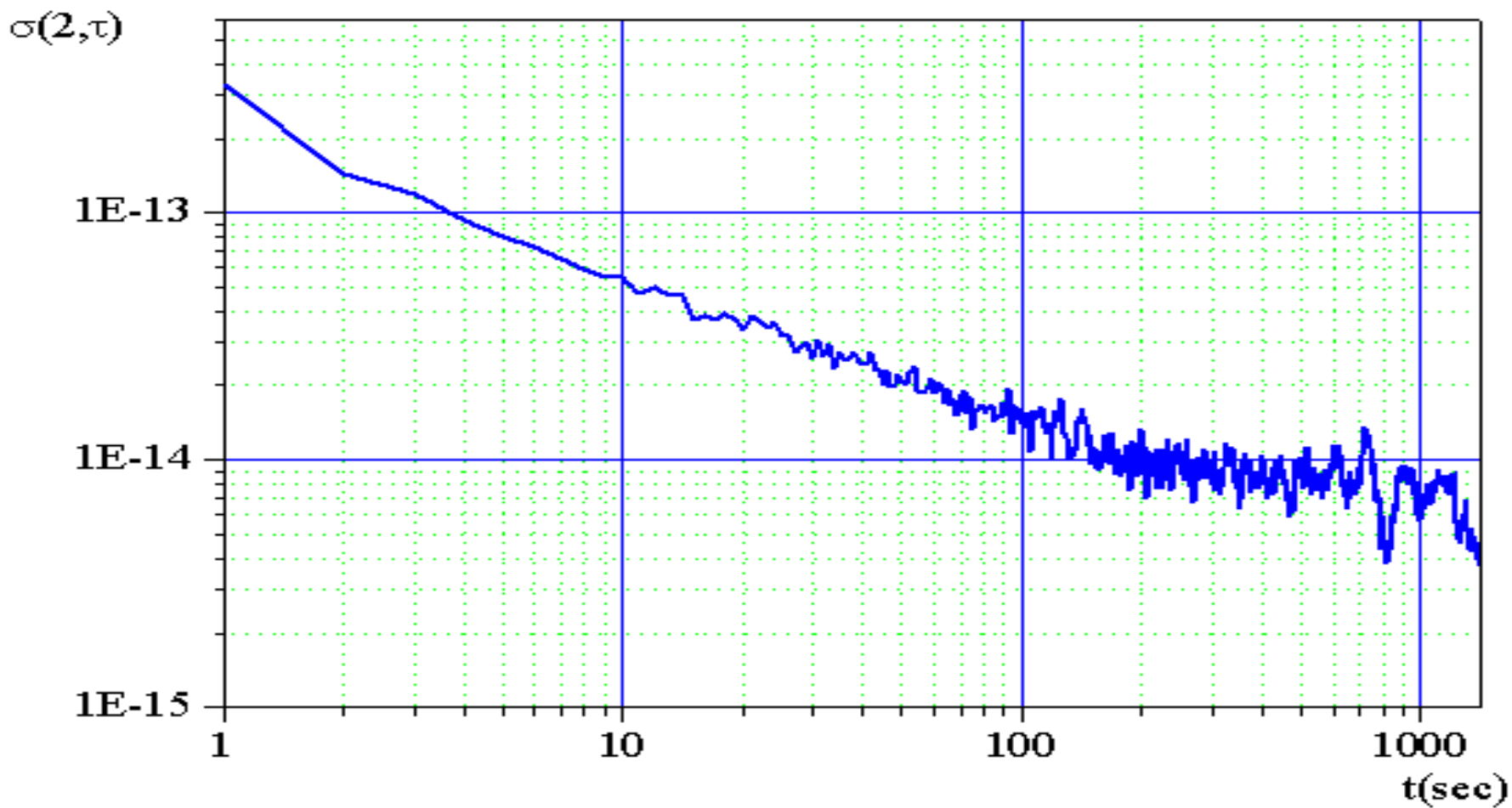


- $y_n$  – флуктуации частоты (фазы),
- **ДА** – вычисление дисперсии Аллана,
- **ФК** - фильтр Калмана
- $d_k$  – оптимальная оценка систематического изменения характеристики - наклона ДА,
- $t_n$  – моменты изменения наклона (разладки характеристики)

# Пример определения фильтром Калмана наклонов линейной ломаной в сигнале и моментов изломов (разладки)



# Стандартное отклонение Аллана для реального сигнала частотных биений излучения 2-х твердотельных Nd:YAG/I2 лазеров



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- Выявлены факторы, ограничивающие точность реальной оценки основной характеристики нестабильности частоты генераторов во временной области – дисперсии Аллана.
- Для оценки основного фактора – дисперсии оценки среднего значения флуктуаций частоты на конечном временном интервале получена общая форма оптимальной импульсной переходной (аппаратной) функции измерителя, обеспечивающая несмещённую и эффективную оценку характеристики нестабильности частоты с учётом краевых эффектов на концах интервала измерений.







