МГУ имени М. В. Ломоносова • Физический факультет
Кафедра математического моделирования и информатики

Использование качественной субъективной информации в виде “мягких” неравенств при оценке состава инвестиционного портфеля

Ашарин В. В., Зубюк А. В.,
Фадеев Е. П., Шапошник Г. Л.

http://NeuroFuzzy.phys.msu.ru

Математические методы распознавания образов, 27 ноября 2019 г.

Введение

Инвестиционная компания — организация, осуществляющая коллективные инвестиции.

Главными функциями инвестиционных компаний являются диверсификация инвестиций и управление инвестиционным портфелем, в который входят ценные бумаги разных эмитентов и другие виды фондовых инструментов.

Долевая струтура портфеля

$$(\beta_1, \ldots, \beta_n),$$

где β_i — доля капитала, вложенная в i-ую ценную бумагу,

$$\beta_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1,$$

является коммерческой тайной. В то же время, знание состава портфеля очень важно для инвесторов.

Введение

Инвестиционная компания обязана отчитываться о своей доходности d за определенный период. Можно использовать эту информацию для оценивания структуры портфеля.

В итоге имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = d, \\ \sum_{i=1}^{n} \beta_i = 1, \quad \beta_1, \ldots, \beta_n \geq 0, \end{cases}$$

которая имеет бесконечно много решений.

Постановка задачи согласно портфельной теории Марковица

Известны решения данной задачи, описанные в [1], которые используют принципы портфельной теории Марковица. Портфель Марковица: максимальная доходность при фиксированном риске, и наоборот – минимальный риск при фиксированной доходности.

Постановка задачи в терминах портфеля Марковица [1]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{\beta} \to \min(\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n), \\ \boldsymbol{I}\boldsymbol{\beta} = 1, \boldsymbol{\beta} \geq \boldsymbol{0}, \overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{\beta} = const. \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{\beta} \to \max(\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n), \\ \boldsymbol{I}\boldsymbol{\beta} = 1, \boldsymbol{\beta} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{\beta} = const. \end{cases}$$

Объединенный критерий Марковица [1]:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_\alpha = \arg\min\,(1-\alpha)\boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{G} \boldsymbol{\beta} - \alpha \overline{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{\beta}, \\ \boldsymbol{I}\boldsymbol{\beta} = 1, \boldsymbol{\beta} \geq \boldsymbol{0}, 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

1. Моттль В. В., Красоткина О. В., Морозов А. О. Оценивание состава инвестиционного портфеля в большом множестве биржевых активов.

Предлагаемый подход — учёт субъективной информации о структуре портфеля

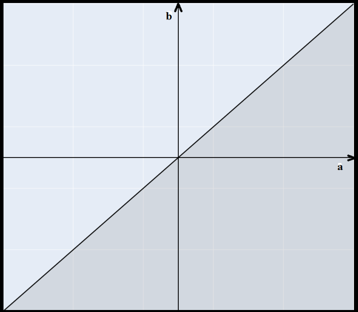
В настоящей работе предложен метод выбора наиболее возможного (правдоподобного) решения на основе качественной субъективной информации о портфеле инвестиционного фонда, выраженной “мягкими” неравенствами

$$\beta_{i_k} \gtrsim \beta_{j_k}, \quad k = 1, \ldots, s.$$

В некоторых случаях такую информацию можно получить от эксперта по ценным бумагам и фондовому рынку.

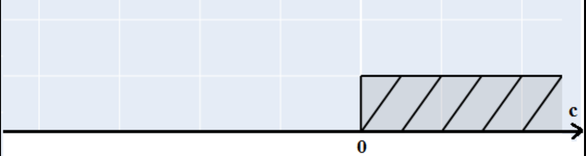
“Четкие” неравенства

В терминах “чёткой” математики утверждение, что b не превосходит a, т. е. $a \geq b$, представляется подмножеством плоскости:



“Четкие” неравенства

Пусть $a - b = c \geq 0$, тогда это утверждение можно представить в виде:



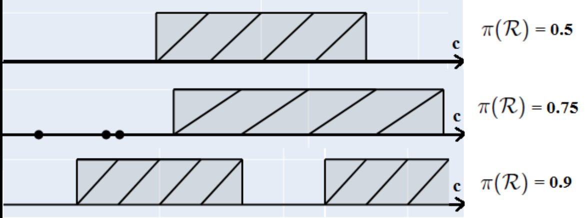
Таким образом наше утвеждение принимает вид подмножества прямой, и мы свели бинарное отношение $a \geq b$ к унарному $c \geq 0$.

Нечеткие множества

Нечеткие утверждения часто используются в задачах математического программирования и нечеткой теории принятия решений. Эти утверждения по сути являются нечеткими подмножествами, отражающими такие высказывания как: «скорее всего больше либо равно», «скорее всего меньше либо равно», «скорее всего равны».

Нечеткие множества

В теории возможностей Пытьева каждое нечеткое подмножество $\mathcal{R}$ прямой $\mathbb{R}$ можно определить парой $(2^{\mathbb{R}}, \pi(R))$, где $2^{\mathbb{R}}$ — множество всех подмножеств $\mathbb{R}$, а $\pi(R) : 2^{\mathbb{R}} \to [0, 1]$ — заданное распределение возможностей.



“Мягкие” неравенства

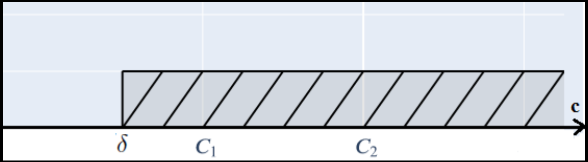
Введем функцию $\nu(c)$ одноточечного покрытия нечетким подмножеством $\mathcal{R}$ как возможность того, что $c \in \mathcal{R}$:

$$\nu(c) = \Pi(\{c \in \mathcal{R}\}) = \sup\{\pi(R) \,|\, c \in R\}$$

Рассмотрим “мягкое” неравенство $c \gtrsim 0$ «c скорее всего больше либо равно 0», ему соответсвует нечеткое подмножество $\mathcal{R}_{\gtrsim 0}$ прямой $\mathbb{R}$. Потребуем, чтобы

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} : c_2 \geq c_1 \text{ и } c_1 \gtrsim 0, \text{ выполнялось } c_2 \gtrsim 0.$$

Это означает, что возможность $\pi(R) > 0$, только если множество R имеет вид луча, т. е. $R = [\delta, \infty)$



“Мягкие” неравенства

Заметим также, что из допущения следует монотонность функции одноточечного покрытия $\nu(c)$. Действительно,$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} : c_2 \geq c_1$ имеем

$$\nu(c_1) = \sup\{\pi(R) \,|\, c_1 \in R\} = \sup\{\pi([\delta, \infty)) \,|\, c_1 \in [\delta, \infty)\} =$$
$$= \sup\{\pi([\delta, \infty)) \,|\, \delta \leq c_1 \leq c_2\} \leq \sup\{\pi([\delta, \infty)) \,|\, \delta \leq c_2\} = \nu(c_2)$$

Система “мягких” неравенств

Пусть имеется следующая система “мягких” неравенств:

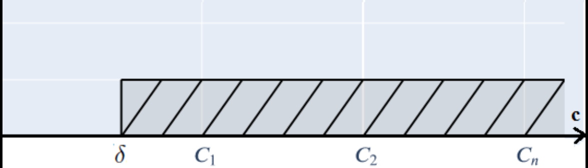
$$\begin{cases} c_1 \gtrsim 0, \\ c_2 \gtrsim 0, \\ \vdots \\ c_n \gtrsim 0. \end{cases}$$

Возможность того, что все эти мягкие неравенства выполнены:

$$\Pi(\{c_1 \in \mathcal{R}_{\gtrsim 0}\} \cap \ldots \cap \{c_k \in \mathcal{R}_{\gtrsim 0}\}) = \sup\{\pi(\mathcal{R}) \,|\, R : c_1 \in R, \ldots, c_k \in R\},$$

Система "мягких" неравенств

Т.к. $\mathcal{R} = [\delta, \infty)$ и $c_i \in \mathcal{R}$, то имеем $\forall i : \delta \leq c_i$ или $\delta \leq \min\limits_i c_i$.



В итоге получим выражение для возможности:

$$\Pi(\{c_1 \in \mathcal{R}_{\gtrsim 0}\} \cap \ldots \cap \{c_k \in \mathcal{R}_{\gtrsim 0}\}) = \nu(\min_i c_i) = \min_i \nu(c_i),$$

здесь последнее равенство справедливо в силу монотонности функции одноточечного покрытия $\nu(c)$.

Преобразование условия на максимум

Вернемся к решению задачи. В нашем случае эксперт делает предположение о составе инвестиционного портфеля, которые мы можем записать в виде системы “мягких” неравенств $\beta_{i_k} \gtrsim \beta_{j_k}$, $k = 1, \dots, s$. Будем максимизировать возможность того, что все “мягкие” неравенства выполнены, а также учтем имеющуюся у нас информацию о доходности портфеля d: $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i x_i = d$ и виде коэффициентов β_i : $\sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1$, $\beta_1, \dots, \beta_n \geq 0$.

$$\min_k \{\nu(\beta_{i_k} - \beta_{j_k})\} \sim \max_{\beta_1, \dots, \beta_n} \qquad \min_k \{\beta_{i_k} - \beta_{j_k}\} \sim \max_{\beta_1, \dots, \beta_n}$$

Преобразование условия на максимум

Известно, что полученная задача сводится к задаче линейного программирования. Введем фиктивную переменную $z = \min\{\beta_{i_k} - \beta_{j_k}\}$. В результате наша система мягких неравенств преобразится следующим образом:

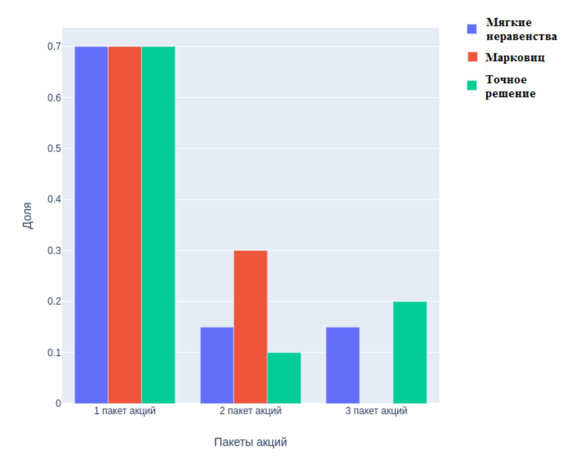
$$\begin{cases} \beta_{i_1} - \beta_{j_1} \gtrsim 0, \\ \vdots \\ \beta_{i_s} - \beta_{j_s} \gtrsim 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} z \sim \max\limits_{\beta_1, \ldots, \beta_n, z}, \\ \beta_{i_1} - \beta_{j_1} \geq z, \\ \vdots \\ \beta_{i_s} - \beta_{j_s} \geq z. \end{cases}$$

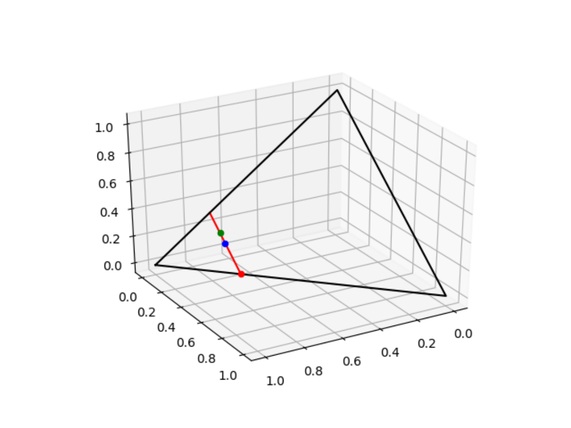
Задача линейного программирования

В таком случае сама система, разрешающая поставленную задачу, примет вид:

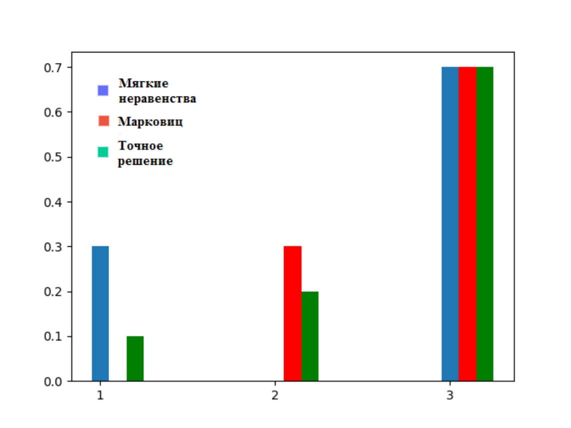
$$\begin{cases} z \sim \max, \\ \beta_{i_1} - \beta_{j_1} \geq z, \\ \vdots \\ \beta_{i_s} - \beta_{j_s} \geq z, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i x_i = d, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \beta_i = 1, \quad \beta_1, \ldots, \beta_n > 0. \end{cases}$$

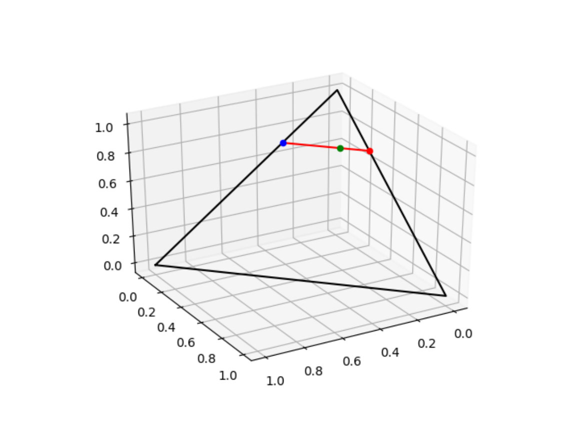
Результаты


Мягкие неравенства
Марковиц
Точное решение
Доля
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
1 пакет акций
2 пакет акций
3 пакет акций
Пакеты акций


1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0

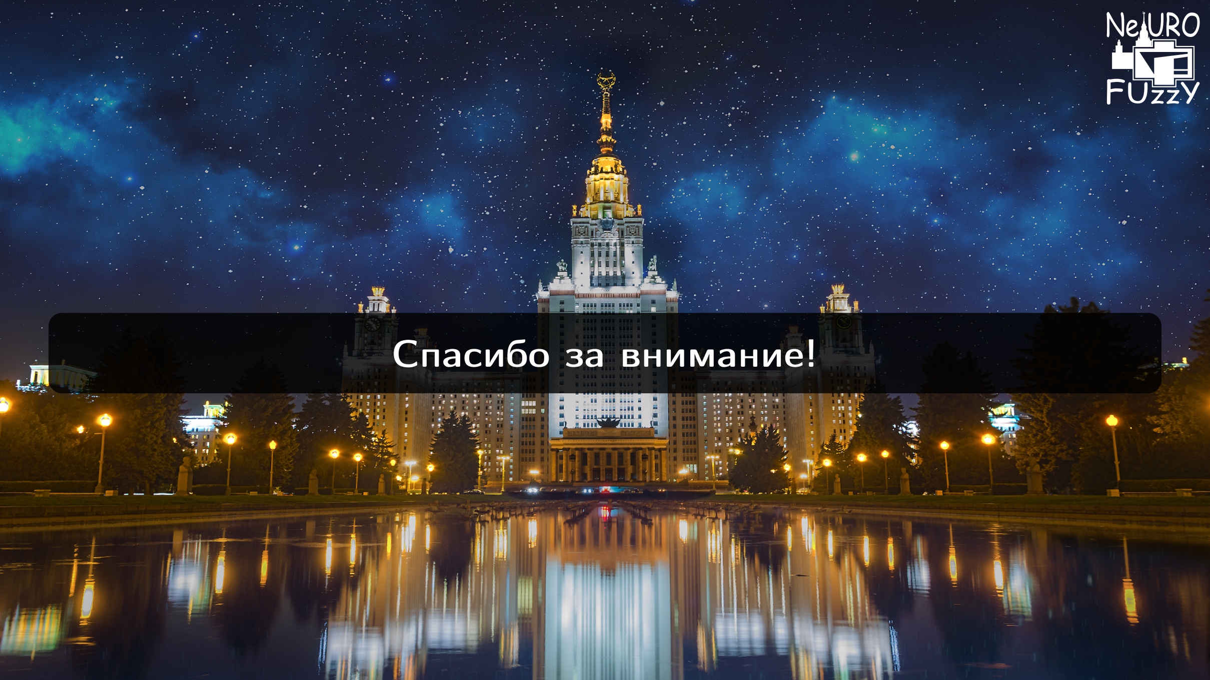
Результаты


Мягкие неравенства
Марковиц
Точное решение
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
1
2
3


0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0

Заключение

Из показанных результатов видно, то что модель, учитывающая дополнительную априорную информацию, в отдельных случаях работает лучше, чем модель, основанная на портфельной теории Марковица.



Спасибо за внимание!