Алгебраические свойства операторов распознавания в моделях зрительного восприятия (динамических сцен)

Александр Панов

ИСА РАН
Лаб. 0-2 «Динамические интеллектуальные системы»
Интеллетуализация обработки информации
10-я международная конференция

7 октября 2014 г.

Восприятие — когнитивная функция

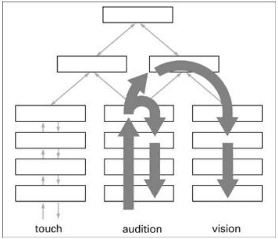
Восприятие — один из видов когнитивных или познавательных процессов, который сопоставляет поступающую с органов чувств информацию с имеющейся информацией, закодированной в коре головного мозга, обновляя последнюю в процессе сопоставления.

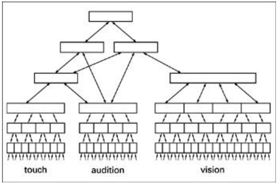
Связанные понятия: внимание, память, категоризация.

Изучение: со стороны психологии (свойства, факторы, формы) и со стороны нейрофизиологии (строение перцептивных участков коры головного мозга).

Интерес: в задачах навигации и локализации (SLAM), человеко—машинное взаимодействие (HRI).

Основные принципы работы коры головного мозга

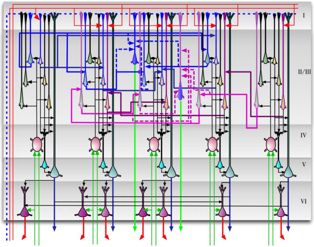


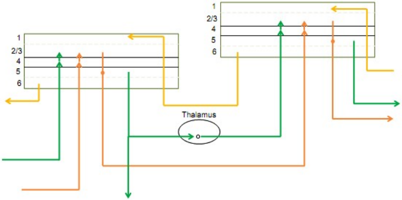


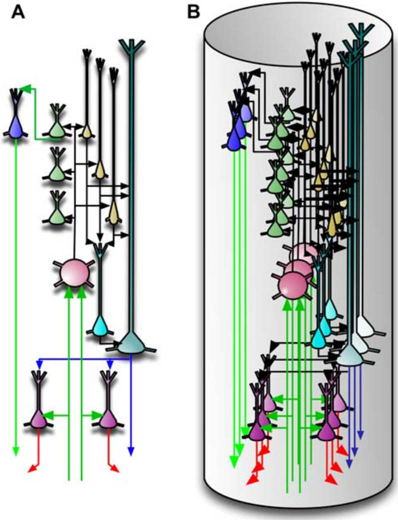
Маунткасл, Эдельман, Хокинс:

- неокортекс состоит из элементарных составных элементов, которые имеют одинаковое строение на всех участках коры,
- колонки латеральными связями объединены в регионы,
- неокортекс хранит последовательности паттернов,
- неокортекс воспроизводит паттерны автоассоциативно,
- неокортекс предсказывает паттерны,
- неокортекс хранит паттерны в инвариантной иерархической форме.

Слои и колонки неокортекса







Основные принципы модели

С целью проведения математического исследования модели были приняты следующие упрощения:

- дискретность во времени,
- простейшая строгая иерархия со связями только между ближайшими уровнями,
- обратная связь только по предсказанию, без моторной части,
- гипотеза одинаковой длительности для одной тематики,
- гипотеза «всегда начинаем с начала»,
- пороговая модель принятия решений,
- подавление непредвиденного сигнала.

Признаки и распознающие блоки

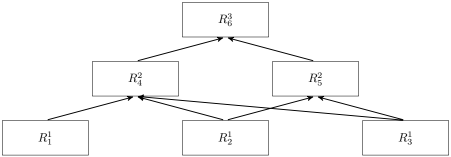
Пусть заданы следующие множества:

- $\{R_i^j\}$ — совокупность распознающих блоков,
- $\{f_k\}$ — совокупность допустимых признаков.

Введём бинарное отношение $\dashv$, определённое на декартовом произведении $\{f_k\} \times \{R_i^j\}$, и будем читать $f_k \dashv R_i^j$ как «признак f_k распознаётся блоком R_i^j».

Множество всех распознаваемых блоком R_i^j признаков будем обозначать F_i^{*j}, т. е. $\forall f^* \in F_i^{*j} \, f^* \dashv R_i^j$, $F_i^{*j} \subseteq \{f_k\}$.

Иерархия распознающих блоков



Рассмотрим связный ориентированный (ярусный) граф $G_R = (V, E)$:

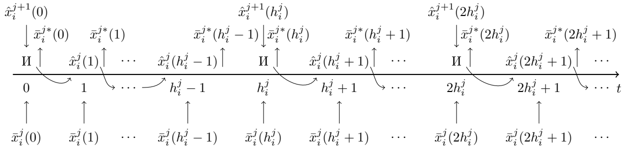
- V — множество вершин,
- E — множество рёбер,
- каждая вершина v, принадлежащая j-ому ярусу графа G_R, связана с соответствующим распознающим блоком R_i^j уровня j,
- каждое ребро $e = (v, u) \in E$ обозначает иерархическую связь между соответствующим вершине v дочерним блоком $R_{i_1}^{j_1}$ и соответствующим вершине u блоком—родителем $R_{i_2}^{j_2}$.

Входные и измеряемый признаки

Определим:

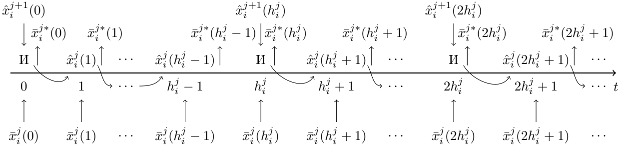
- для каждого распознающего блока R_i^j множество $F_i^j \subseteq \{f_k\}$ — *совокупность входных признаков*, в которую входят такие признаки, что для любого $f \in F_i^j$ существует распознающий блок R_k^{j-1} уровня $j-1$, дочерний по отношению к блоку R_i^j, такой, что $f \dashv R_k^{j-1}$
- для каждого признака $f^* \in F_i^{*j}$ — *функцию распознавания* $\hat{f}(x_1, \ldots, x_q) = x^*$, где $x^* \in (0,1)$ — вес присутствия распознаваемого признака f^*, а $x_1, \ldots, x_q \in (0,1)$ — вес присутствия признаков из множества входных признаков F_i^j,
- множество $\hat{F}_i^j$ — совокупность функций распознавания для блока R_i^j.

Динамика распознающего блока



Пусть

- l_i^j — мощность множества измеряемых признаков F_i^{*j} и множества функций измерения $\hat{F}_i^j$,
- q_i^j — мощность множества входных признаков F_i^j,
- T_i^j — упорядоченное множество локальных моментов времени T_i^j для распознающего блока R_i^j,
- h_i^j — характерный масштаб времени, за который происходит один цикл вычисления в распознающем блоке R_i^j.

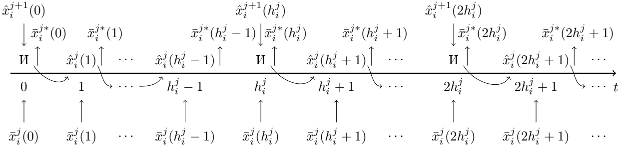


В начале s-ого цикла вычисления (момент времени $\tau_s \in T_i^j$) распознающий блок R_i^j получает на вход вектор длины l_i^j ожиданий $\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s)$:

$$\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s) = \frac{1}{N_i^j} \sum_{k \in K_i^{j+1}} \hat{x}_k^{j+1}(\tau_s),$$

где N_i^j — количество родительских блоков, K_i^{j+1} — множество индексов родительских относительно R_i^j распознающих блоков.

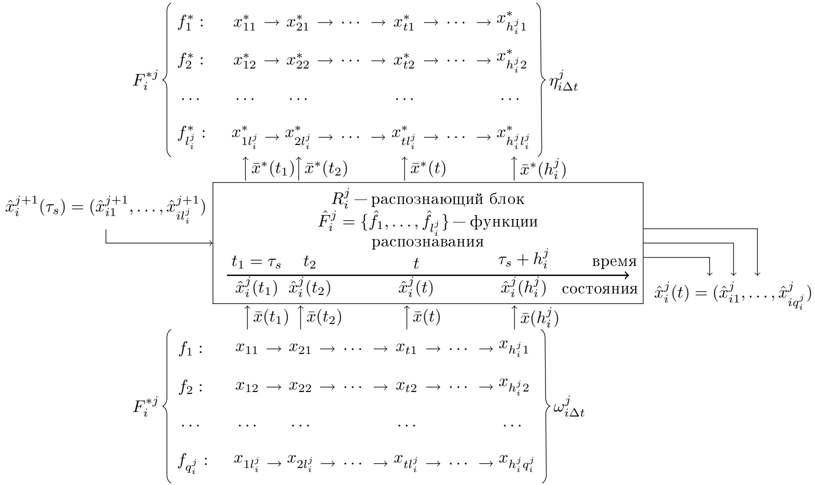
Динамика распознающего блока



В каждый момент времени $t \in T_i^j$, $\tau_s \leqslant t \leqslant \tau_s + h_i^j$, распознающий блок R_i^j

- получает на вход весовой вектор $\bar{x}_i^j(t)$ длины l_i^j присутствия входных признаков из множества F_i^j,
- вычисляет выходной весовой вектор $\bar{x}_i^{*j}(t)$ длины l_i^j присутствия измеряемых признаков из множества F_i^{*j},
- вычисляет вектор длины q_i^j ожиданий $\hat{x}_i^j(t)$ присутствия входных признаков в следующий момент времени.

Схема входных и выходных отображений



Входные и выходные отображения

Пусть

- X_i^{*j} — множество возможных мгновенных значений выходных векторов распознающего блока R_i^j,
- X_i^j — множество возможных мгновенных значений весовых векторов присутствия входных признаков,
- $\hat{X}_i^j$ — множество всех возможных мгновенных значений векторов ожиданий или множество состояний распознающего блока R_i^j,
- $\omega_i^j : T \to X_i^j$ — входное воздействие в смысле теории динамических систем,
- $\gamma_i^j : T \to X_i^{*j}$ — выходная величина,
- $\varphi_i^j(t; \tau_s, \hat{x}_i^{j+1}, \omega) = \hat{x}_i^j$ — функция переходов,
- $\eta_i^j : T \times \hat{X}_i^j \to X_i^{*j}$ — выходное отображение, определяющее выходные вектора $\bar{x}_i^{*j}(t) = \eta(t, \hat{x}_i^j(t))$.

Матрица предсказаний

Будем считать множество моментов времени T множеством целых чисел. Тогда распознающий блок R_i^j будет являться *динамической системой с дискретным временем*.

Поставим каждой функции измерения $\hat{f}_k$ из множества $\hat{F}_i^j$ в соответствие набор матриц предсказания $Z_k = \{Z_1^k, \ldots, Z_m^k\}$ размерности $q_i^j \times h_i^j$. Тогда

- столбец $\bar{z}_u^r = (z_{u1}^k, \ldots, z_{uq}^k)$ матрицы Z_r^k — это вектор предсказания присутствия входных признаков из множества F_i^j в момент времени $\tau_s + u$, $z_{uv}^k \in \{0, 1\}$,
- матрица Z_r^k задаёт последовательность событий, наличие которых свидетельствует о присутствии измеряемого функцией $\hat{f}_k$ признака,
- $\mathcal{Z}_i^j$ — множество всех матриц предсказания распознающего блока R_i^j.

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ вычислительного цикла распознающего блока

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ (часть I, инициализация)

Require: $\tau_s, \hat{x}_i^{j+1}(\tau_s), \omega_i^j;$
Ensure: $\varphi_i^j, \eta_i^j;$

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ вычислительного цикла распознающего блока

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ (часть I, инициализация)

Require: $\tau_s, \hat{x}_i^{j+1}(\tau_s), \omega_i^j$;
Ensure: φ_i^j, η_i^j;
1: $\hat{F}^* = \varnothing$;
2: $Z^* = \varnothing$;
3: $t = 0$;
4: $c_1 \in (0, 1), c_2 \in (0, 1)$;

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ вычислительного цикла распознающего блока

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ (часть I, инициализация)

Require: $\tau_s, \hat{x}_i^{j+1}(\tau_s), \omega_i^j$;
Ensure: φ_i^j, η_i^j;
1: $\hat{F}^* = \varnothing$;
2: $Z^* = \varnothing$;
3: $t = 0$;
4: $c_1 \in (0, 1), c_2 \in (0, 1)$;
5: **for all** компонент $\hat{x}_{ik}^{j+1}$ вектора $\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s) = (\hat{x}_{i1}^{j+1}, \hat{x}_{i2}^{j+1}, \dots, \hat{x}_{il}^{j+1})$ **do**
6: **if** $\hat{x}_{ik}^{j+1} \geq c_1$ **then**
7: $\hat{F}^* := \hat{F}^* \cup \{\hat{f}_k\}$;
8: **end if**
9: **end for**

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ вычислительного цикла распознающего блока

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ (часть II, инициализация)

```
for all функций распознавания $\hat{f}_k \in \hat{F}^*$ do
    for all $Z_r^k \in \mathcal{Z}_k$, соответствующих функции распознавания $\hat{f}_k$ do
```

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ вычислительного цикла распознающего блока

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ (часть II, инициализация)

for all функций распознавания $\hat{f}_k \in \hat{F}^*$ **do**
    for all $Z_r^k \in \mathcal{Z}_k$, соответствующих функции распознавания $\hat{f}_k$ **do**
        if $\frac{\|\bar{z}_1^r - \bar{x}_i^j\|}{\|\bar{z}_1^r\| + \|\bar{x}_i^j\|} < c_2$ **then**
            $Z^* := Z^* \cup \{Z_r^k\}$;
        end if
    end for
end for

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ вычислительного цикла распознающего блока

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ (часть II, инициализация)

for all функций распознавания $\hat{f}_k \in \hat{F}^*$ **do**
    for all $Z_r^k \in \mathcal{Z}_k$, соответствующих функции распознавания $\hat{f}_k$ **do**
        if $\frac{\|\bar{z}_1^r - \bar{x}_i^j\|}{\|\bar{z}_1^r\| + \|\bar{x}_i^j\|} < c_2$ **then**
            $Z^* := Z^* \cup \{Z_r^k\}$;
        end if
    end for
end for
$\bar{N} := (|\{Z_r^1 | Z_r^1 \in Z^*\}|, \dots, |\{Z_r^{l_i^j} | Z_r^{l_i^j} \in Z^*\}|)$;
$\bar{x}_i^{*j} := W(\bar{N})$; $\triangleright$ W — весовая функция
$\eta(\tau_s, \hat{x}_i^j(\tau_s)) = \bar{x}_i^{*j}$;
$\varphi(\tau_s + 1; \tau_s, \hat{x}_i^{j+1}, \omega) = \hat{x}_i^j(\tau_s + 1) = W(\sum_{\hat{f}_k \in \hat{F}^*} \hat{x}_{ik}^{j+1} \sum_{Z_r^k \in Z^*} \bar{z}_2^r)$;

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ вычислительного цикла распознающего блока

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ (часть III, основной цикл)

```
t = 1;
while t ⩽ h_i^j − 1 do
    x̄_i^j = ω(τ_s + t);
```

$t = 1;$

while $t \leqslant h_i^j - 1$ **do**

$\quad \bar{x}_i^j = \omega(\tau_s + t);$

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ вычислительного цикла распознающего блока

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ (часть III, основной цикл)

```
t = 1;
while t ⩽ h_i^j − 1 do
    x̄_i^j = ω(τ_s + t);
    for all матриц предсказания Z_r^k из множества Z* do
        if ‖z̄_{t+1}^r − x̄_i^j‖ / (‖z̄_{t+1}^r‖ + ‖x̄_i^j‖) ⩾ c_2 then
            Z* := Z* \ {Z_r^k};
        end if
    end for
```

$t = 1$;

while $t \leqslant h_i^j - 1$ **do**

$\bar{x}_i^j = \omega(\tau_s + t)$;

for all матриц предсказания Z_r^k из множества Z^* **do**

if $\frac{\|\bar{z}_{t+1}^r - \bar{x}_i^j\|}{\|\bar{z}_{t+1}^r\| + \|\bar{x}_i^j\|} \geqslant c_2$ **then**

$Z^* := Z^* \setminus \{Z_r^k\}$;

end if

end for

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ вычислительного цикла распознающего блока

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ (часть III, основной цикл)

$t = 1;$
while $t \leqslant h_i^j - 1$ **do**
  $\bar{x}_i^j = \omega(\tau_s + t);$
  for all матриц предсказания Z_r^k из множества Z^* **do**
    if $\frac{\|\bar{z}_{t+1}^r - \bar{x}_i^j\|}{\|\bar{z}_{t+1}^r\| + \|\bar{x}_i^j\|} \geqslant c_2$ **then**
      $Z^* := Z^* \setminus \{Z_r^k\};$
    end if
  end for
  $\bar{N} = (|\{Z_r^1 | Z_r^1 \in Z^*\}|, \ldots, |\{Z_r^{l_i^j} | Z_r^{l_i^j} \in Z^*\}|);$
  $\bar{x}_i^{*j} := W(\bar{N});$
  $\eta(\tau_s + t, \hat{x}_i^j(\tau_s + t)) = \bar{x}_i^{*j};$

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ вычислительного цикла распознающего блока

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ (окончание)

```
    t = t + 1;
    if t ⩽ h_i^j − 2 then
```

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ вычислительного цикла распознающего блока

Алгоритм $\mathfrak{A}_{th}$ (окончание)

$t = t + 1$;
if $t \leqslant h_i^j - 2$ **then**
$\hat{x}_i^j := W(\sum_{\hat{f}_k \in \hat{F}^*} \hat{x}_{ik}^{j+1} \sum_{Z_r^k \in Z^*} \bar{z}_{t+1}^r)$;
$\varphi(\tau_s + t; \tau_s, \hat{x}_i^{j+1}, \omega) = \hat{x}_i^j(\tau_s + t) = \hat{x}_i^j$;
end if
end while

Статический оператор распознавания

Зафиксируем момент времени t, равный началу некоторого s-го вычислительного цикла τ_s.

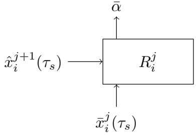
В этом случае, распознающий блок R_i^j можно рассматривать как статический оператор распознавания $R_i^j(\hat{x}_i^{j+1}, \mathcal{Z}_i^j, \bar{x}_i^j) = \bar{x}_i^{*j}$.

Задача классификации по Журавлёву

Пусть

- $\{Q\}$ — совокупность задач классификации,
- $\{\mathcal{A}\}$ — множество алгоритмов, переводящих пары $(\hat{x}, \bar{x})$ в вектора $\bar{\beta}$, составленные из элементов $0, 1, \Delta : \mathcal{A}(\hat{x}, \bar{x}) = \bar{\beta}$. Если $\beta_i \in \{0, 1\}$, то β_i — значение величины α_i, вычисленное алгоритмом $\mathcal{A}$. Если $\beta_i = \Delta$, то алгоритм $\mathcal{A}$ не вычислил значение α_i.

Задача $Q(\hat{x}, \bar{x}, \alpha_1, \ldots, \alpha_l) \in \{Q\}$ состоит в построении алгоритма, вычисляющего по поступившему вектору ожиданий $\hat{x}$ и входному вектору $\bar{x}$ значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \{0, 1\}$ присутствия признаков $f_1^*, \ldots, f_l^*$. Другими словами, искомый алгоритм $\mathcal{A}^*$ переводит набор $(\hat{x}, \bar{x})$ в вектор $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$, который будем называть информационным вектором входного вектора $\bar{x}$.



Свойство корректности алгоритма

Определение 1

Алгоритм $\mathcal{A}$ называется корректным для задачи Q, если выполнено равенство

$$\mathcal{A}(\hat{x}, \bar{x}) = \bar{\alpha}.$$

Алгоритм $\mathcal{A}$, не являющийся корректным для Q, называется некорректным.

Далее будем считать, что множество $\{\mathcal{A}\}$ является совокупностью, вообще говоря, некорректных алгоритмов.

Главное отличие от классической постановки: используются вектора, а не матрицы при формулировке соответствующих определений и утверждений.

Разложение алгоритма классификации

Утверждение 1 (аналог теоремы 1 по Журавлёву)

Каждый алгоритм $\mathcal{A} \in \{\mathcal{A}\}$ *представим как последовательность выполнения алгоритмов* R *и* C*, где* $R(\hat{x}, \bar{x}) = \bar{x}^*$*,* $\bar{x}^*$ *— вектор действительных чисел,* $C(\bar{x}^*) = \bar{\beta}$*,* $\beta_i \in \{0, 1, \Delta\}$*.*

- R — оператор распознавания,
- C — решающее правило.

Решающее правило и операции над алгоритмами

Определение 2

Решающее правило C^* называется корректным на множестве входных векторов X, если для всякого вектора $\bar{x}$ из X существует хотя бы один числовой вектор $\bar{x}^*$ такой, что $C^*(\bar{x}^*) = \bar{\alpha}$, где $\bar{\alpha}$ — информационный вектор входного вектора $\bar{x}$.

В множестве операторов $\{R\}$ введем операции умножения на скаляр, сложения и умножения. Пусть r' — скаляр, $R', R'' \in \{R\}$. Определим операторы $r'{\cdot}R'$, $R' + R''$ и $R{\cdot}R''$ следующим образом:

$$r'{\cdot}R' = (r'{\cdot}x_1^{*\prime}, \ldots, r'{\cdot}x_l^{*\prime}), \tag{1}$$

$$R' + R'' = (x_1^{*\prime} + x_1^{*\prime\prime}, \ldots, x_1^{*\prime} + x_l^{*\prime\prime}), \tag{2}$$

$$R'{\cdot}R'' = (x_1^{*\prime}{\cdot}x_1^{*\prime\prime}, \ldots, x_1^{*\prime}{\cdot}x_l^{*\prime\prime}). \tag{3}$$

Замыкание множества алгоритмов

Утверждение 2

Замыкание $L\{R\}$ множества $\{R\}$ относительно операций (1) *и* (2) *является векторным пространством.*

Утверждение 3

Замыкание $\mathfrak{U}\{R\}$ множества $\{R\}$ относительно операций (1), (2) *и* (3) *является ассоциативной линейной алгеброй с коммутативным умножением.*

Определение 3

Множества $L\{A\}$ и $\mathfrak{U}\{A\}$ алгоритмов $\mathcal{A} = R{\cdot}C^*$ соответственно таких, что $R{\in}L\{R\}$ и $R \in \mathfrak{U}\{R\}$, соответственно называются линейными и алгебраическими замыканиями множества $\{\mathcal{A}\}$.

Свойство полноты задачи

Зафиксируем пару $(\hat{x}, \bar{x})$ управляющего вектора и входного вектора. Будем рассматривать задачи $Q(\hat{x}, \bar{x})$, обладающие следующим свойством относительно множества операторов распознавания $\mathcal{R}$.

Определение 4

Если множество векторов $\{R(\hat{x}, \bar{x})\}$, где R пробегает некоторое множество операторов распознавания $\mathcal{R}$, содержит базис в пространстве числовых векторов длины l, то задача $Q(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\alpha})$ называется полной относительно $\mathcal{R}$.

Связь свойств полноты и корректности

Утверждение 4 (аналог теоремы 2 по Журавлёву)

Если множество задач $\{Q\}$ состоит лишь из задач, полных относительно $\mathfrak{R}$, то линейное замыкание $L\{R{\cdot}C^*\}$ (C^* — произвольное фиксированное корректное решающее правило, R пробегает множество $\mathcal{R}$) является корректным относительно $\{Q\}$.

Основная теорема корректности

Будем рассматривать только такие задачи $Q(\hat{x}, \bar{x}, \bar{\alpha})$, для которых удовлетворяется следующее условие: $\exists k$ такое, что x_k является k-ым элементом вектора $\bar{x}$ и $x_k > 1/2$.

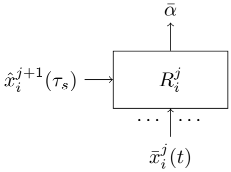
Theorem 1

Линейное замыкание $L\{\mathcal{A}\}$ семейства алгоритмов $\{\mathcal{A}\} = \{R \cdot C^*\}$ с произвольным корректным решающим правилом C^* и операторами распознавания R, определенными алгоритмом $\mathfrak{A}_{th}$, является корректным на $\{Q\}$.

Операторы распознавания R^t

Фиксация момента времени не в начале вычислительного цикла, а на любом другом значении $\tau_s < t < \tau_s + h_i^j$, приводит к операторам вида $R_i^j(\hat{x}_i^j(t), \mathcal{Z}_i^j, \bar{x}_i^j(t))$, который кратко будем записывать R^t.

Для этих операторов постановка задачи распознавания выглядит таким же образом как и для операторов R, формулировки определений полноты и корректности идентичны. Теорема о корректности линейного замыкания $L\{R^t \cdot C^*\}$ доказывается аналогично.

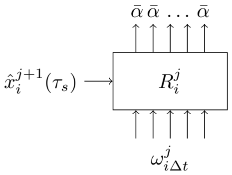


Динамические операторы распознавания

Будем фиксировать не конкретный момент времени t, а промежуток времени $\Delta t = [\tau_s, \tau_s + h_i^j)$.

В этом случае распознающий блок R_i^j можно рассматривать как *динамический оператор распознавания* $\hat{R}_i^j(\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s), \mathcal{Z}_i^j, \omega_{i\Delta t}^j) = \gamma_{i\Delta t}^j$

- принимающий функцию входного воздействия ω_i^j, ограниченную на промежутке времени Δt и
- выдающий функцию выходной величины γ_i^j на том же временном промежутке.



Динамические операторы распознавания

Действие динамического оператора $\hat{R}_i^j$ можно заменить последовательным действием статических операторов

$$R(\hat{x}_i^{j+1}(\tau_s), \mathcal{Z}_i^j, \bar{x}_i^j(\tau_s)), R^1(\hat{x}_i^j(\tau_s+1), \mathcal{Z}_i^j, \bar{x}_i^j(\tau_s+1)), \dots,$$

$$R^{h_i^j-1}(\hat{x}_i^j(\tau_s+h_i^j-1), \mathcal{Z}_i^j, \bar{x}_i^j(\tau_s+h_i^j-1)),$$

в результате выдающих последовательность

$$\{\bar{x}_i^{*j}(t)\} = \{\bar{x}_i^{*j}(\tau_s), \bar{x}_i^{*j}(\tau_s+1), \dots, \bar{x}_i^{*j}(\tau_s+h_i^j-1)\}.$$

Так как параметр h_i^j фиксирован, то конечные последовательности векторов $\omega_{i\Delta t}^j$ и $\gamma_{i\Delta t}^j$ можно считать матрицами размерности $l_i^j \times h_i^j$. Далее будем опускать индексы i и j.

Задача классификации по Журавлёву

Задача $\hat{Q}(\hat{x}, \omega_{\Delta t}, \bar{\alpha})$ состоит в построении алгоритма $\hat{\mathcal{A}}$, вычисляющего по поступившему начальному (управляющему) вектору ожиданий $\hat{x}$ и матрице входных воздействий $\omega_{\Delta t}$ последовательность векторов $\beta_{\Delta t}$, монотонно сходящуюся к информационному вектору $\bar{\alpha}$.

Искомый оператор распознавания $\hat{R}$ должен выдавать весовую матрицу присутствия измеряемых признаков $\gamma_{\Delta t}$, столбцы которой должны сходиться (с учётом корректного решающего правила) к информационному вектору: $\lim_{t \to \tau_s + h} \bar{x}^*(t) = \bar{\alpha}$.

Корректность алгоритма

Определение 5

Алгоритм $\hat{\mathcal{A}}(\hat{x}, \bar{x}) = \beta_{\Delta t} = (\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_h)$ *называется корректным для задачи* $\hat{Q}$*, если выполнено условие*

$$\|\bar{\beta}_1 - \bar{\alpha}\| \geqslant \|\bar{\beta}_2 - \bar{\alpha}\| \geqslant \dots \geqslant \|\bar{\beta}_h - \bar{\alpha}\| = 0.$$

$\|\bar{\beta}_i - \bar{\alpha}\| = \sum_j (\beta_{ij} - \alpha_j)$, где $\beta_{ij} - \alpha_j = 0$, если $\beta_{ij} = \alpha_j$, $\beta_{ij} - \alpha_j = \frac{1}{2}$, если $\beta_{ij} = \Delta$, и $\beta_{ij} - \alpha_j = 0$ *иначе. Алгоритм* $\hat{\mathcal{A}}$*, не являющийся корректным для* $\hat{Q}$*, называется некорректным.*

Разложимость алгоритма

Утверждение 5

Каждый алгоритм $\hat{A} \in \{\hat{\mathcal{A}}\}$ *представим как последовательность выполнения алгоритмов* $\hat{R}$ *и* $\hat{C}$, *где* $\hat{R}(\hat{x}, \mathcal{Z}, \omega_{\Delta t}) = \gamma_{\Delta t}$, $\gamma_{\Delta t}$ *— матрица действительных чисел,* $\hat{C}(\gamma_{\Delta t}) = \beta_{\Delta t}$, $\beta_{\Delta t}$ *— матрица значений* $\beta_{ij} \in \{0, 1, \Delta\}$.

Корректное решающее правило

Корректное решающее правило $\hat{C}^*$ для матрицы $\gamma_{\Delta t}$ определяется через набор корректных правил для векторов $(C_1^*, \dots, C_h^*)$ таких, что

$$\|C_1^*(\bar{x}^*(\tau_s)) - \bar{\alpha}\| \geqslant \|C_2^*(\bar{x}^*(\tau_s + 1)) - \bar{\alpha}\| \geqslant \dots \geqslant$$

$$\geqslant \|C_h^*(\bar{x}^*(\tau_s + h - 1)) - \bar{\alpha}\| = 0.$$

В простейшем случае $\forall i \; C_i^*(\bar{x}^*(\tau_s + i)) = \bar{\alpha}$.

Аналогично статическому случаю вводятся определения линейного $L\{\hat{R}\}$ и алгебраического $\mathfrak{U}\{\hat{R}\}$ замыкания над множеством $\{\hat{R}\}$.

Основная теорема корректности

Зафиксируем начальный вектора ожиданий $\hat{x}$ и последовательность входных векторов $\omega_{\Delta t}$.

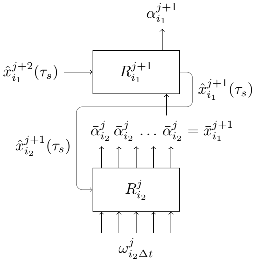
Если, как и в статическом случае, будем рассматривать только такие задачи $\hat{Q}(\hat{x}, \omega_{\Delta t}, \bar{\alpha})$, для которых в матрице $\omega_{\Delta t}$ в каждом столбце с номером s $\exists k$ такое, что x_{sk} является k-ым элементом вектора $\bar{x}(\tau_s + s)$ и $x_{sk} > 1/2$, то можно сформулировать следующую теорему.

Theorem 2

Линейное замыкание $L\{\hat{A}\}$ семейства алгоритмов $\{\hat{A}\} = \{\hat{R}\cdot\hat{C}^*\}$ с произвольным корректным решающим правилом $\hat{C}^*$ и операторами распознавания $\hat{R}$, определенными алгоритмом $\mathfrak{A}_{th}$, является корректным на $\{\hat{Q}\}$.

Иерархический оператор распознавания

Для обоснования корректности иерархии операторов динамического распознавания, рассмотрим пример из двухуровневой иерархии, на каждом уровне которой находится по одному оператору: статический $R_{i_1}^{j+1}(\hat{x}_{i_1}^{j+2}, \bar{x}_{i_1}^{j+1}(\tau_s), \bar{\alpha}_{i_1}^{j+1})$ на верхнем уровне и динамический $\hat{R}_{i_2}^{j}(\hat{x}_{i_2}^{j+1}, \omega_{i_2\Delta t}^{j}, \bar{\alpha}_{i_2}^{j})$ — на нижнем.



Данную иерархию можно рассматривать как иерархический оператор распознавания $\hat{R}_{e,j}^{2}(\hat{x}_{i_1}^{j+1}(\tau_s), \mathcal{Z}_{i_1}^{j+1}, \mathcal{Z}_{i_2}^{j}, \omega_{i_2\Delta t}^{j}) = \bar{x}_{i_1}^{*j+1}$, принимающий функцию входного воздействия $\omega_{i_2\Delta t}^{j}$ нижнего уровня, ограниченную на промежутке времени Δt, и выдающий весовой вектор присутствия распознаваемых признаков $\bar{x}_{i_1}^{*j+1}$.

Задача классификации по Журавлёву

Задача $\hat{Q}^2_{e,j}(\hat{x}^{j+2}_{i_1}, \omega^j_{i_2\Delta t}, \bar{\alpha}^{j+1}_{i_1})$ состоит в построении алгоритма $\hat{\mathcal{A}}_e$, вычисляющего по поступившему начальному вектору ожиданий $\hat{x}^{j+2}_{i_1}$ и матрице входных воздействий $\omega^j_{i_2\Delta t}$ значения информационного вектора $\bar{\alpha}^{j+1}_{i_1}$.

Основная теорема корректности

Зафиксируем начальный вектор ожиданий $\hat{x}_{i_1}^{j+2}$ и последовательность входных векторов $\omega_{i_2\Delta t}^j$.

Если мы будем рассматривать только такие задачи $\hat{Q}_{e,j}^2(\hat{x}_{i_1}^{j+2}, \omega_{i_2\Delta t}^j, \bar{\alpha}_{i_1}^{j+1})$, для которых в матрице $\omega_{i_2\Delta t}^j$ в каждом столбце с номером s $\exists k$ такое, что x_{sk} является k-ым элементом вектора $\bar{x}_{i_2}^j(\tau_s + s)$ и $x_{sk} > 1/2$, то можно сформулировать следующую теорему.

Theorem 3

Линейное замыкание $L\{\hat{\mathcal{A}}_e\}$ семейства алгоритмов $\{\hat{\mathcal{A}}_e\} = \{\hat{R}_{e,j}^2 \cdot \hat{C}_e^*\}$ с произвольным корректным решающим правилом $\hat{C}_e^*$ и операторами распознавания $\hat{R}_{e,j}^2$, определёнными алгоритмом $\mathfrak{A}_{th}$, является корректным на множестве задач $\{\hat{Q}_{e,j}^2\}$.

Результаты

- теорема корректности линейного замыкания иерархических операторов распознавания интерпретируется как существование такого способа обучения иерархии распознающих блоков, в результате которого данная иерархия будет корректно распознавать поступающие стимулы,
- был разработан алгоритм работы региона неокортекса в процессе восприятия с известными допущениями и упрощениями,
- было проведено исследование данного алгоритма путём построения операторов распознавания (статического, динамического и иерархического),
- был применён алгебраический подход к исследуемому алгоритму, доказаны теоремы корректности по всем оператором распознавания,
- с помощью распознающего блока возможно описать и другие компоненты элемента картины мира и построить модели других когнитивных функций.

Спасибо за внимание!

ИСА РАН, лаб. «Динамические интеллектуальные системы»,
pan@isa.ru