Представление сигналов. Пространства сигналов

к.ф.-м.н., доцент Красоткина О.В.

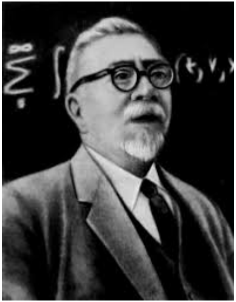
Московский государственный университет
факультет ВМК
кафедра Математических методов прогнозирования

Цифровые методы обработки сигналов
Лекция 1
Тула, 2014

План

Классификация задач обработки сигналов по Норберту Винеру

- фильтрация
- интерполяция
- экстраполяция (прогноз)



Классификация задач обработки сигналов по Норберту Винеру

Фильтрация

Пусть доступная для наблюдаемая компонента наблюдается последовательно во времени $y_t, t = ...t-2,\ t-1,\ t, ...,$. Пусть – текущий момент времени, к которому уже зарегистрирована часть реализации наблюдаемого процесса $Y^t = (y_s, s \leq t)$, и требуется дать оценку $(\hat{x}_t)$ текущего значения скрытой компоненты x_t. Такая оценка имеет вид функционала $\hat{x}_t(Y^t) = \hat{x}_t(\ldots, y_{t-2}, y_{t-1}, y_t)$.

Классификация задач обработки сигналов по Норберту Винеру

Интерполяция

Пусть доступная для наблюдаемая компонента наблюдается последовательно во времени $y_t, t = ...t-2,\ t-1,\ t, ...,$. Пусть – текущий момент времени, к которому уже зарегистрирована часть реализации наблюдаемого процесса $Y^t = (y_s, s \leq t)$, но требуется дать оценку $\hat{x}_{t'}$ скрытой компоненты x_t в некоторый предыдущий момент времени $t' \leq t$. Задачу формирования такой оценки будем называть задачей **интерполяции** $\hat{x}_{t'}(Y^t) = \hat{x}_{t'}(\ldots, y_{t-2}, y_{t-1}, y_t)$.

Классификация задач обработки сигналов по Норберту Винеру

Экстраполяция

Пусть доступная для наблюдаемая компонента наблюдается последовательно во времени $y_t, t = ...t-2,\ t-1,\ t, ...,$. Пусть – текущий момент времени, к которому уже зарегистрирована часть реализации наблюдаемого процесса $Y^t = (y_s, s \leq t)$, и требуется дать оценку $\hat{x}_{t'}$ значения скрытой компоненты x_t в некоторый следующий момент времени $t' \geq t$. Задачу формирования такой оценки будем называть задачей **экстраполяции** $\hat{x}_t(Y^t) = \hat{x}_t(\ldots, y_{t-2}, y_{t-1}, y_t)$.

Основные характеристики сигналов

- область определения
- энергия
- мощность

Множество сигналов

Введем понятие множества $\mathcal{Y}$, из которого принимают значение подлежащие анализу сигналы $Y = (y_t, t = 1, ..., N) \in \mathcal{Y} = \mathbb{Y} \times \mathbb{Y} \times ... \times \mathbb{Y} = \mathbb{Y}^N$, обладающие в рамках нашей задачи некоторым отличительным свойством P. Здесь $\mathbb{Y}$ - область значений сигнала, множество, из которого принимает значение конкретный элемент сигнала y_t. Объединив сигналы, обладающие некоторым общим свойством, в одно множество, мы, естественно, начинаем интересоваться отличительными свойствами отдельных элементов этого множества, т.е. сравнивать элементы множества между собой.

Пространство сигналов

Общий подход, который и интуитивно кажется подходящим, для обозначения различия между двумя элементами множества y' и y'' состоит в том, что каждой паре элементов ставится в соответствие действительное положительное число $d(y', y'') \to R$, которое трактуется как расстояние между элементами, при этом само множество приобретает геометрические свойства. Множество с подходящим образом определенным расстоянием представляет собой ***пространство сигналов***

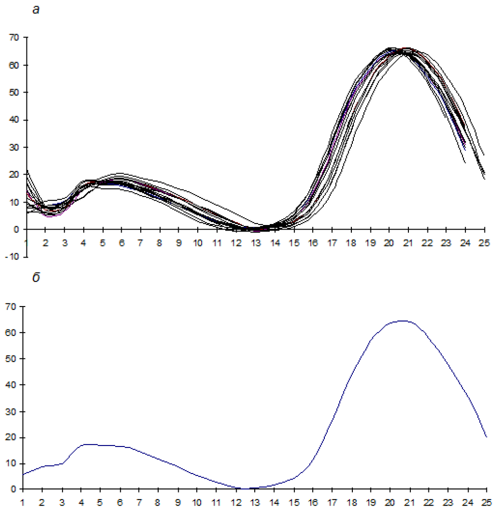
Метрическое пространство

Если введенное расстояние d удовлетворяет аксиомам метрики

- $d(y', y'') \geq 0$,
- $d(y', y'') = 0, \Rightarrow y' = y''$,
- $d(y', y'') = d(y'', y')$,
- $d(y', y''') \leq d(y', y'') + d(y'', y''')$,

то пространство сигналов будет метрическим пространством.

Пример: Поиск периодической компоненты характеристик локомоторного аппарата человека при хольбе



Линейное пространство

Пусть для пространства сигналов $\mathcal{Y}$ определены операции сложения и умножения на число таким образом, что

- любым двум элементам $y', y'' \in \mathcal{Y}$ соответствует элемент пространства $\mathcal{Y}$: $y' + y'' \in \mathcal{Y}$
- любому элементу пространства $y \in \mathcal{Y}$ и любому числу $\alpha \in R$ соответствует элемент пространства $\alpha y \in \mathcal{Y}$

Линейное пространство сигналов

Для множества сигналов $\mathcal{Y}$ определены операции сложения и умножения на число таким образом, что

- любым двум элементам $y', y'' \in \mathcal{Y}$ соответствует элемент пространства $\mathcal{Y}$: $y' + y'' \in \mathcal{Y}$
- любому элементу пространства $y \in \mathcal{Y}$ и любому числу $\alpha \in R$ соответствует элемент пространства $\alpha y \in \mathcal{Y}$

Линейное пространство сигналов

Множество $\mathcal{Y}$ называется линейным (векторным) пространством, если выполняются аксиомы

- $y' + y'' = y' + y''$, $y', y'' \in \mathcal{Y}$
- $(y' + y'') + y''' = y' + (y'' + y''')$, $y', y'', y''' \in \mathcal{Y}$
- существует нулевой элемент $\emptyset \in \mathcal{Y} : y + \emptyset = y$, $y + (-y) = \emptyset$, $y \in \mathcal{Y}$
- $1 \cdot y = y$, $y \in \mathcal{Y}$
- $\alpha(\beta y) = (\alpha\beta)y$, $\alpha, \beta \in R$, $y \in \mathcal{Y}$
- $(\alpha + \beta)y = \alpha y + \beta y$, $\alpha, \beta \in R$, $y \in \mathcal{Y}$
- $\alpha(y' + y'') = \alpha y' + \alpha y''$, $\alpha \in R$, $y \in \mathcal{Y}$

  Элементы линейного пространства называют векторами.

Линейная комбинация векторов

Линейной комбинацией векторов линейного пространства называется вектор $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n$. Система векторов называется линейно независимой, если $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0$, только если $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Линейное пространство $\mathcal{Y}$ называется n-мерным (имеет размерность n), если в нем:

1) существует n линейно независимых векторов;

2) любая система $n+1$ векторов линейно зависима.

Нормированные пространства

Теперь объединим свойства, характерные для метрических пространств, и алгебраические свойства, выявленные в линейных пространствах. Это достигается путем определения действительного числа, характеризующего «размер» элемента в линейном пространстве. Такое число называется нормой вектора и может быть определено с помощью любого отображения линейного пространства в действительную ось, удовлетворяющего следующим требованиям:

- $\|y\| \geq 0$, $\|y\| = 0$, если $y = \emptyset$
- $\|y' + y''\| \leq \|y'\| + \|y''\|$
- $\|\alpha y\| = \alpha \|y\|$

Норма и линейные операции естественным образом порождают метрику $d(y', y'') = \|y' - y''\|$

Пространства со скалярным произведением

Последним шагом в усовершенствовании структуры пространства сигналов является введение дополнительной геометрической характеристики - скалярного произведения двух векторов. Скалярное произведение $\langle y', y'' \rangle$- это отображение декартова произведения элементов линейного пространства на действительную ось или комплексную плоскость, удовлетворяющее следующим свойствам:

- $\langle y', y'' \rangle = \langle y'', y' \rangle$
- $\langle \alpha y' + \beta y'', y''' \rangle = \alpha \langle y', y''' \rangle + \beta \langle y'', y''' \rangle$
- $\langle y, y \rangle \geq 0$, $\langle y, y \rangle = 0$ только если $y = \emptyset$

Основные характеристики сигналов. Область определения

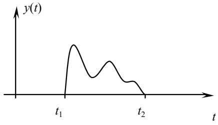


Рис. : Конечная область определения (t_1, t_2)

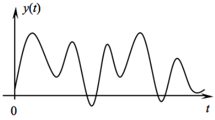


Рис. : Полубесконечная область определения $(0, \infty)$

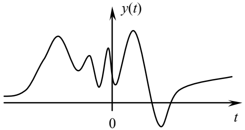


Рис. : Бесконечная область определения $(-\infty, \infty)$

Основные характеристики сигналов. Энергия

Энергия сигнала имеет смысл только для конечной области определения

$$E = \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)dt$$

Основные характеристики сигналов. Мощность

Мощность сигнала это удельная энергия, приходящаяся на единицу области определения, имеет смысл для любой области определения

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int\limits_{t_1}^{t_2} y^2(t)dt$$

$$P = \lim_{t_1 \to \infty} \frac{1}{t_1} \int\limits_{0}^{t_1} y^2(t)dt$$

$$P = \lim_{t_1 \to \infty} \frac{1}{2t_1} \int\limits_{-t_1}^{t_1} y^2(t)dt$$