

Семинар 10. Гауссовские процессы

Курс: Байесовские методы в машинном обучении, 2016

1. Доказать формулу для блочного обращения матрицы:

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BPCA^{-1} & -A^{-1}BP \\ -PCA^{-1} & P \end{bmatrix}, \quad P = (D - CA^{-1}B)^{-1}.$$

2. Вывести формулу прогнозного распределения для ГП регрессии, т.е. из условия

$$p(\mathbf{t}_*, \mathbf{t}) = \mathcal{N}\left([\mathbf{t}_*, \mathbf{t}] \mid [\mathbf{0}, \mathbf{0}], \begin{bmatrix} K & \mathbf{k}_* \\ \mathbf{k}_*^T & \mathbf{k}_{**} \end{bmatrix}\right)$$

найти $p(\mathbf{t}_* | \mathbf{t})$.

3. Рассмотрим модель байесовской линейной регрессии:

$$p(\mathbf{t}, \mathbf{w} | X, \beta, A) = \mathcal{N}(\mathbf{t} | X\mathbf{w}, \beta^{-1}I) \mathcal{N}(\mathbf{x} | \mathbf{0}, A^{-1}).$$

Для этой модели известно, что

$$\begin{aligned} p(\mathbf{w} | X, \beta, A) &= \mathcal{N}(\mathbf{w} | \boldsymbol{\mu}, \Sigma), \\ \boldsymbol{\mu} &= \beta \Sigma X^T \mathbf{t}, \quad \Sigma = (\beta X^T X + A)^{-1}, \\ p(\mathbf{t}_* | \mathbf{x}_*, \mathbf{t}, X, \beta, A) &= \mathcal{N}(\mathbf{t}_* | \mathbf{x}_*^T \boldsymbol{\mu}, \beta^{-1} + \mathbf{x}_*^T \Sigma \mathbf{x}_*). \end{aligned}$$

Требуется доказать, что прогнозное распределение $p(\mathbf{t}_* | \mathbf{x}_*, \mathbf{t}, X, \beta, A)$ в данной модели соответствует модели гауссовского процесса для некоторой ковариационной функции $k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.