Теория простоты
и морфология мозаичных покрытий

Ю.В. Визильтер, *ФГУП «ГосНИИАС»*, ***viz@gosniias.ru***

***Простота** хуже воровства*

(Народная мудрость)

Старушка подошла к костру, на котором сгорал Ян Гус, и сунула в него вязанку хвороста.

*- О святая **простота**!- воскликнул Ян Гус. Старушка была растрогана.*

- Спасибо на добром слове,- сказала она и сунула в костер еще вязанку.

Ян Гус молчал. Старушка стояла в ожидании. Потом она спросила:

*- Что ж ты молчишь? Почему не скажешь: "О святая **простота**"?*

Ян Гус поднял глаза. Перед ним стояла старушка. Простая старушка.

*Не просто простая старушка, а старушка, **гордая своей простотой**.*

(Феликс Кривин, «Божественные истории»)

Москва, ММРО-2021, 7-10.12.2021

Краткое содержание предыдущих серий

Почему опять мозаичные морфологии?

Морфологический анализ Пытьева

Математические морфологии Серра

2002-2014 (*Визильтер, Желтов, Горбацевич, Сидякин, Рубис, Лебедев,…*) **Обобщенные морфологии:** селективные морфологии, проективные морфологии, морфологический анализ свидетельств, критериальные морфологии, диффузные морфологии, компаративные и УМ-морфологии…

Попытка подвести итог многолетних исследований

Визильтер Ю.В., Желтов С.Ю., Бусурин В.И. Современный морфологический анализ и его применение в авиационных системах технического зрения. – М.: Изд-во МАИ, 2020.

Глубокие нейронные сети превосходят все методы анализа изображений

Проблема «непрозрачности» ГНС

Вновь мозаичные модели изображений!

Потребность еще раз переосмыслить основания мозаичных морфологий

Реализация морфологических подходов через ГНС

Семантико-морфологический анализ **(семантическая сегментация + морфология)**

2016-20: Грант РНФ № 16-11-00082: «Разработка методов… на основе морфологического анализа изображений и машинного обучения»

А что, собственно, не так с нашими морфологическими инструментами?

Их стало слишком много:

Нет внутреннего единства…

Морфологический анализ мозаичных изображений

Формы-разбиения	Формы-отношения
Морф. операторы	Формы-классы
Сравнение по форме	Сравнение форм
Сравнение по сходству	Сравнение по сложности
Проективные операторы	Диффузные операторы
Четкие формы	Нечеткие формы
Геометрическое сравнение	Статистическое сравнение
Морф. корреляция форм	Метрики форм

«Так ведь что угодно можно назвать морфологией…» (С) Л.М. Местецкий

Как могло бы выглядеть подтверждение внутреннего единства?

Например, так…

Теория чисел

Геометрия

Действительный анализ

Логарифмы

Производные

Функции

Тождество Эйлера:

$$e^{i\pi}+1=0$$

Алгебра

Тригонометрия

Комплексный анализ

Иррациональные числа

Интегралы

Системы счисления

Хотелось бы увидеть «объединительную формулу», которая сводит воедино самые разные аспекты рассматриваемого предмета

«Так ведь что угодно можно назвать математикой…»

Морфологические инструменты: Мозаичная морфология Пытьева

В рамках простейшей морфологии Пытьева [1] изображения традиционно рассматриваются как кусочно-постоянные функции вида

$$\boxed{f(x,y)=\sum_{i=1}^{n} f_{Fi}\chi_{Fi}(x,y)}, \quad (1)$$

Линейная комбинация значений яркости с характеристическими функциями областей мозаичного разбиения кадра

где n – число областей разбиения $\mathbf{F}$ кадра Ω площади S на связные непересекающиеся области постоянной яркости, $\mathbf{F}=\{F_1,\ldots,F_n\}$; $\mathbf{f}=(f_{F1},\ldots,f_{Fn})^{\mathrm{T}}$ – вектор значений яркости. Такие изображения называются *мозаичными*.

Форма = класс изображений:

$$F = \{ f(x,y) = \sum_{i=1,..,n} f_i\, \chi_{Fi}(x,y),\ \mathbf{f}\in R^n\}.$$

Проекция на форму F – морфологический оператор:

$$g_F(x,y) = P_F\, g(x,y) = \sum_{i=1,..,n} g_{Fi}\, \chi_{Fi}(x,y),$$

$$g_{Fi} = (\chi_{Fi},g) / \| \chi_{Fi} \|^2,\ i=1,\ldots,n.$$

берет форму от F, а яркость от G

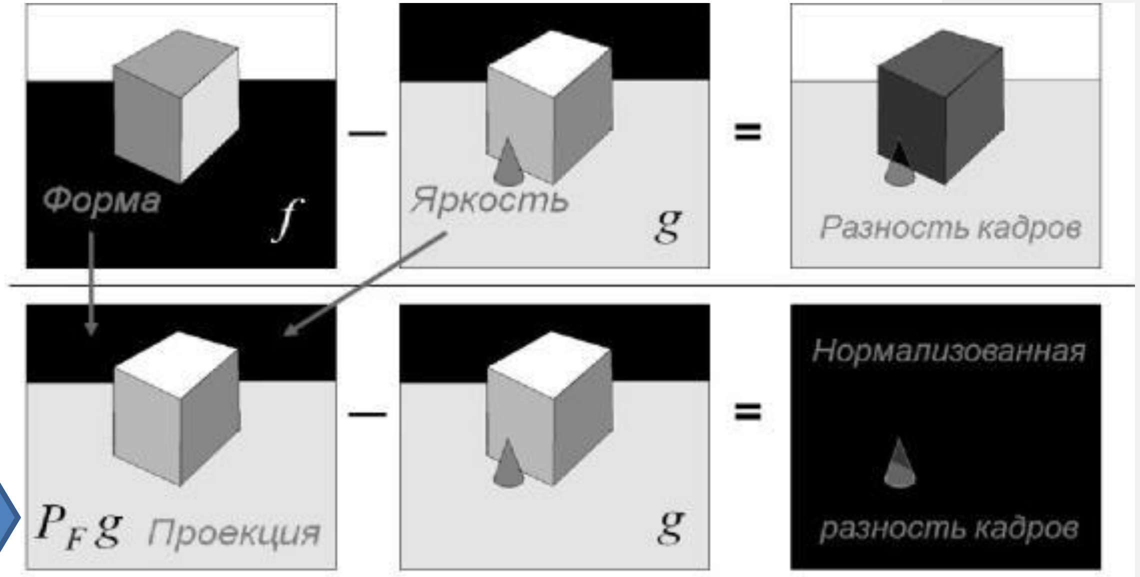


Схема морфологической нормализации фона для выделения изменений в сцене

1. Пытьев Ю.П., Чуличков А.И. Методы морфологического анализа изображений. М.: Физматлит, 2010

Морфологические инструменты: Сравнение по форме, морф. корреляция

В рамках простейшей морфологии Пытьева [1] изображения традиционно рассматриваются как кусочно-постоянные функции вида

$$\boxed{f(x,y)=\sum_{i=1}^{n} f_{Fi}\chi_{Fi}(x,y)}, \qquad (1)$$

Линейная комбинация значений яркости с характеристическими функциями областей мозаичного разбиения кадра

где n – число областей разбиения **F** кадра Ω площади S на связные непересекающиеся области постоянной яркости, $\mathbf{F}=\{F_1,\ldots,F_n\}$; $\mathbf{f}=(f_{F1},\ldots,f_{Fn})^{\mathrm{T}}$ – вектор значений яркости. Такие изображения называются *мозаичными*.

Форма = класс изображений (гиперплоскость):

$$\boxed{F = \{\, f(x,y) = \textstyle\sum_{i=1,\ldots,n} f_i\, \chi_{Fi}(x,y),\ \mathbf{f}\in R^n\}.}$$

Проекция на форму F – морфологический оператор:

$g_F(x,y) = P_F\, g(x,y) = \sum_{i=1,\ldots,n} g_{Fi}\, \chi_{Fi}(x,y)$,

$g_{Fi} = (\chi_{Fi},g) / \|\chi_{Fi}\|^2$, $i=1,\ldots,n$.

$$\boxed{K_M(g,F)=\frac{\|P_F\, g\|}{\|g\|}},$$

$$\boxed{K_M(f,G)=\frac{\|P_G\, f\|}{\|f\|}}$$

Геометрическая иллюстрация схемы проецирования в пространстве изображений ***(формы-классы = гиперплоскости)*** *и морфологической корреляции*

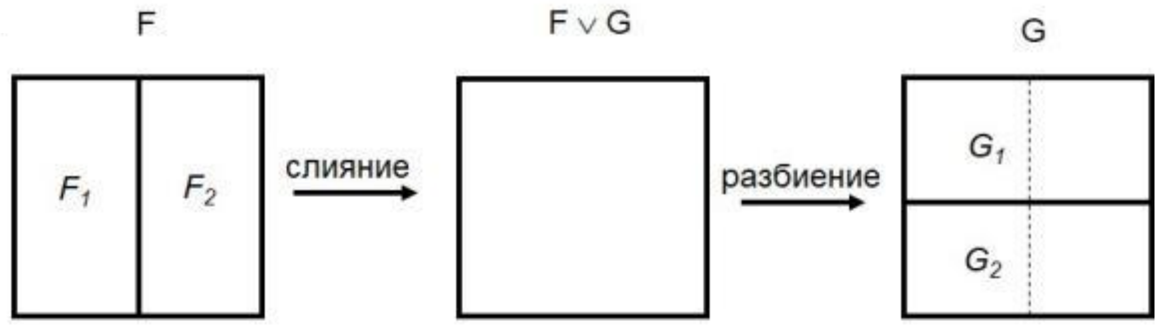
Морфологические коэффициенты корреляции Пытьева

1. Пытьев Ю.П., Чуличков А.И. Методы морфологического анализа изображений. М.: Физматлит, 2010

Морфологические инструменты: Сравнение форм по сложности

Это нам пригодится. Сегодня мы говорим о сложности и простоте

Морфологическое сравнение мозаичных форм *по сложности* традиционно осуществляется в терминах отношения частичного порядка «не сложнее по форме». Множество мозаичных форм образует по данному отношению алгебраическую структуру типа «решетка», в которой для любых форм F и G можно указать форму более сложную $F \wedge G$ и менее сложную $F \vee G$. Более сложные формы получаются из менее сложных разбиением, а менее сложные из более сложных – слиянием областей. В терминах множеств (классов) изображений, F «не сложнее по форме» G, если $F \subseteq G$. В терминах проекторов, F «не сложнее по форме» G, если $P_G P_F = P_F$.



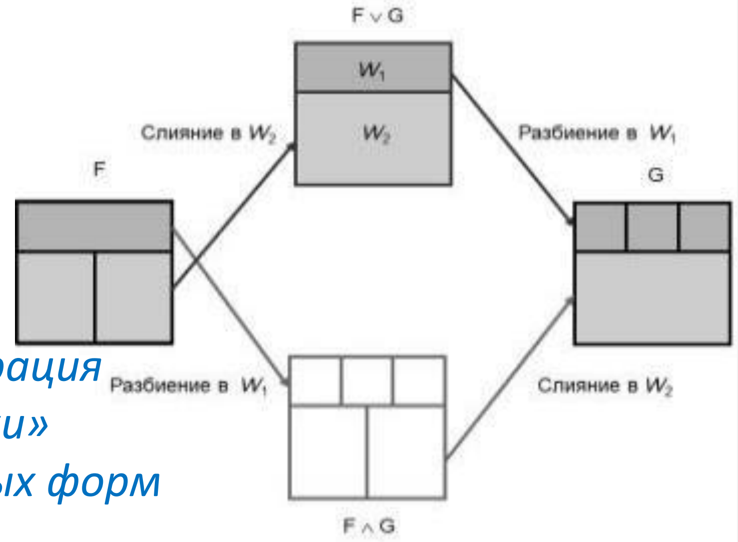


Иллюстрация «решетки» мозаичных форм

1. Пытьев Ю.П., Чуличков А.И. Методы морфологического анализа изображений. М.: Физматлит, 2010

Это нам пригодится. Сегодня мы говорим о сложности и простоте

Морфологические инструменты: Меры сложности форм

В работе [2] была введено обобщенное отношение *полного порядка*, основанное на определении *меры сложности* формы, которая равна 0 для простейшей формы *O* (одна область на весь кадр) и монотонно увеличивается при последовательных разбиениях областей. Для мозаичного разбиения **F** с площадями областей $S_{Fi} = S\, p_i$, $i=1,..,n$ такой мерой является ОГО-сложность

$$\boxed{\mu_H(F) = \sum_{i=1,..,n} p_i\,(1 - p_i),} \qquad (2)$$

связанная с метрикой *оценки геометрических отличий* (ОГО) [3]:

$$\boxed{d_H(\mathbf{F},\mathbf{G}) = \sum_{j=1,..,l} \sum_{i=1,..,n} S_{ij}\, d_H(F_i, G_j),} \qquad (3)$$

где $d_H(F_i, G_j) = S_{Fi} + S_{Gj} - 2S_{ij}$ – расстояние Хэмминга между областями разбиения F_i и G_j; S_{ij} – площадь области $F_i \cap G_j$. ОГО-метрика может интерпретироваться как метрика редактирования мозаичных форм. Другая ее интерпретация сязана с реляционным описанием мозаичных форм [4].

2. Визильтер Ю. В., Рубис А. Ю. Морфологическое сравнение образов по сложности // ММРО-16, 2013 г.
3. Визильтер Ю. В., Рубис А. Ю. Метрическое пространство форм изображений // ИОИ-9, 2012 г.
4. Визильтер Ю. В., Рубис А. Ю., Горбацевич В. С. Реляционные модели формы изображений и метрики сравнения// ИОИ-9, 2012 г.

Морфологические инструменты: Реляционные описания форм

Определим реляционную форму мозаичного изображения как *предикат бинарного отношения* «пикселы не принадлежат одной области»:

$$\boxed{\begin{aligned}\pi_F(x,y,u,v) = \{0, &\text{ если } \forall i\colon \chi_{Fi}(x,y)=\chi_{Fi}(u,v);\\ &1, \text{ в противном случае}\}.\end{aligned}} \qquad (4)$$

L^1-метрика между реляционными формами π_F и π_G в точности эквивалентна ОГО-метрике между соответствующими мозаичными формами **F** и **G**:

$$d_\pi(\pi_F,\pi_G) = \|\, \pi_F(x,y,u,v) - \pi_G(x,y,u,v) \,\| =$$

$$= \sum_{i=1,..,n} \sum_{j=1,..,m} S_{ij}\,(S_{Fi} + S_{Gj} - 2S_{ij}) = \sum_{i=1,..,n} \sum_{j=1,..,m} S_{ij}\, d_H(F_i,G_j) = d_H(\mathbf{F},\mathbf{G}). \quad (5)$$

Значит, нормированное значение L^1-нормы реляционной формы π_F

$$\mu_H(\pi_F) = (\|\,\pi_F\,\| - \|\,\pi_O\,\|) \,/\, (\|\,\pi_I\,\| - \|\,\pi_O\,\|) = d_\pi(\pi_F,\pi_O) \,/\, d_\pi(\pi_I,\pi_O) =$$

$$= \sum_{i=1,..,n} S_{Fi}\,(1 - S_{Fi}) \,/\, S^2 = \sum_{i=1,..,n} p_i\,(1 - p_i) = d_H(F,O) \,/\, d_H(I,O) = \mu_H(F), \qquad (6)$$

есть ничто иное, как нормированная ОГО-сложность $\mu_H(F)$ (2).

Это нам пригодится. Сегодня мы говорим о сложности и простоте

4. Визильтер Ю. В., Рубис А. Ю., Горбацевич В. С. Реляционные модели формы изображений и метрики сравнения// ИОИ-9, 2012 г.

Морфологические инструменты: Морфологический коэффициент корреляции форм

Нечеткая (диффузная [5]) мозаичная модель G_F возникает как *проекция мозаичной модели на другую мозаичную модель*: $\chi_{GF} = P_F\, \chi_G \Leftrightarrow G_F = P_F\, G$.

Определим *морфологический коэффициент корреляции форм* (МККФ):

$$K_M(G,F) = \| P_F\, G \| \,/\, \| G \| = \| \chi_{GF}(x,y) \| \,/\, \| \chi_G(x,y) \|. \qquad (8)$$

Подставив (7) в (8) получим явное выражение для $K_M(G,F)$:

$$\boxed{\begin{aligned} K_M^2(G,F) &= \| \chi_{GF}(x,y) \|^2 \,/\, \| \chi_G(x,y) \|^2 = \\ &= \sum_{j=1,..,m} \sum_{i=1,..,n} S_{ij}^{\;2} \,/\, (S\, S_{Fi}) = \sum_{j=1,..,m} \sum_{i=1,..,n} p_{ij}^{\;2} \,/\, p_{Fi}, \end{aligned}} \qquad (9)$$

где $p_{ij} = S_{ij} / S$, $p_{Fi} = S_{Fi} / S$.

Выражение (9) уже было ранее получено нами из **статистических соображений** [6]. Тогда было предложено называть ***среднеквадратичным эффективным коэффициентом морфологической корреляции (СКМК)*** форм *F* и *G* корень из отношения среднего квадрата нормы проекции изображения из *F* на форму *G* к среднему квадрату нормы проецируемого изображения.

Статистическая морфологическая корреляция форм

Геометрическая иллюстрация множества проекций образов формы F на форму G.

5. Yu. V. Vizilter, V. S. Gorbatsevich, A. Yu. Rubis, and S. Yu. Zheltov. Shape-Based Image Matching Using Heat Kernels and Diffusion Maps. // Int. Arch. Photogramm. Remote Sens. Spatial Inf. Sci. – Volume XL-3, 2014, pp. 357-364.
6. Vizilter, Y. V. and Zheltov, S. Y.: Geometrical Correlation and Matching of 2D Image Shapes, ISPRS Ann. Photogramm. Remote Sens. Spatial Inf. Sci., I-3, 191-196, doi:10.5194/isprsannals-I-3-191-2012, 2012.

«ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА» ДЛЯ МОРФОЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МОЗАИЧНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Сравнивая при помощи K_M^2 форму F с простейшей формой O:

$$\boxed{K_M^2(F,O) = \sum_{i=1,\ldots,n} \frac{S_{Fi}^{\;2}}{S^2} = \sum_{i=1,\ldots,n} p_{Fi}^{\;2}}, \qquad (10)$$

легко убедиться, что:

$$\mu_H(F) = \sum_{i=1,..,n} p_{Fi}\,(1 - p_{Fi}) = \sum_{i=1,..,n} p_{Fi} - \sum_{i=1,..,n} p_{Fi}^{\;2} = 1 - K_M^2(F,O). \qquad (11)$$

Таким образом, мера сложности $\mu_H(F)$ оказалась непосредственно связана с морфологической корреляцией $K_M^2(F,O)$. Более того, теперь можно записать:

Все это нам пригодится. Сегодня мы говорим о сложности и простоте

$$\boxed{\mu_H(F) = \|\,\pi_F - \pi_O\,\|_{L1} \,/\, \|\,\pi_I - \pi_O\,\|_{L1} = d_H(F,O) \,/\, d_H(I,O) = 1 - K_M^2(F,O).} \qquad (12)$$

Формула (12) не так красива, как тождество Эйлера, но она действительно связывает все инструменты мозаичного морфологического анализа

Схематично это можно изобразить примерно так…

7. Ю.В. Визильтер, О.В. Выголов, С.Ю. Желтов. «Формула Эйлера» для морфологического анализа мозаичных изображений // Конференция ИОИ-13, Москва, 8-11 декабря 2020.

«ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА» ДЛЯ МОРФОЛОГИЧЕСКОГО АНАЛИЗА МОЗАИЧНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

- Формы-разбиения
- Морф. операторы
- Сравнение по форме
- Сравнение по сходству
- Проективные операторы
- Четкие формы
- Геометрическое сравнение
- Морф. корреляция форм

$$\mu_H(F) = \|\pi_F - \pi_O\|_{L1} / \|\pi_I - \pi_O\|_{L1} = d_H(F,O) / d_H(I,O) = 1 - K_M^2(F,O)$$

- Формы-отношения
- Формы-классы
- Сравнение форм
- Сравнение по сложности
- Диффузные операторы
- Нечеткие формы
- Статистическое сравнение
- Метрики форм

Результат-2020: Все инструменты мозаичного морфологического анализа оказались связаны одним тождеством

Раз так, нельзя ли вообще все это разнообразие свести к одной базовой сущности?

Морфологическая теория простоты

Наблюдение: квадрат МККФ формы *F* с простейшей формой *O* дополняет сложность *F*

Сравнивая при помощи K_M^2 форму *F* с простейшей формой *O*:

$$K_M^2(F,O) = \sum_{i=1,\ldots,n} \frac{S_{Fi}^2}{S^2} = \sum_{i=1,\ldots,n} p_{Fi}^2,$$

Величину, дополнительную к *морфологической сложности*, естественно назвать *морфологической простотой.* Исследуем ее свойства.

Морфологическая простота:

$$q(F) = 1 - \mu_H(F). \tag{13}$$

Пусть площадь кадра *S*=1, тогда из *тождества сложности* (12) можно получить следующее *тождество простоты*:

$$q(F) = \sum_{i=1,..,n} p_{Fi}^2 = \|\eta_F\|_{L1} = 1 - d_H(F,O) = K_M^2(F,O), \tag{14}$$

где реляционная форма описывается *моделью сходства – предикатом бинарного отношения* «пикселы принадлежат одной области»:

$$\eta_F(x,y,u,v) = \sum_{i=1,..,n} \chi_{Fi}(x,y)\,\chi_{Fi}(u,v) = \begin{cases} 1, & \text{если } \forall i: \chi_{Fi}(x,y)=\chi_{Fi}(u,v); \\ 0, & \text{в противном случае}. \end{cases} \tag{15}$$

Свойства простоты

Свойство 1. Простота – нормированная величина $q(F) \in [0,1]$.

Доказательство следует из (14)

$\sum_{i=1,..,n} p_{Fi} = 1$, $p_{Fi} \geq 0$, $i=1,..,n \Rightarrow q(F) = \sum_{i=1,..,n} p_{Fi}^2 \in [0,1]$.

Свойство 2. Простота простейшей формы *O* максимальна: $q(O)=1$.

Эмпирически это следует из того, что для простейшей формы n=1,

$p_{O1} = 1$, $q(F) = p_{O1}^2 = 1$.

Свойство 3. Для *независимых* мозаичных форм простота их супремума по сложности равна произведению простоты этих форм:

$q(F \wedge G) = q(F)\, q(G)$.

---

*Мозаичные разбиения *F* и *G* будем называть *независимыми*, если каждая область их супремума по сложности $W=F \wedge G$ удовлетворяет условиям:

$p_{Wij} / p_{Gj} = p_{Fi}$, $p_{Wij} / p_{Fi} = p_{Gj}$, $i=1,..,n$, $j=1,..,m$.

Свойства простоты

Свойство 1. Простота – нормированная величина $q(F)\in[0,1]$.

Доказательство следует из (14)

$\sum_{i=1,..,n} p_{Fi} = 1,\ p_{Fi} \geq 0,\ i=1,..,n \Rightarrow q(F) = \sum_{i=1,..,n} p_{Fi}^{\,2} \in[0,1]$.

Свойство 2. Простота простейшей формы O максимальна: $q(O)=1$.

Эмпирически это следует из того, что для простейшей формы n=1,

$p_{O1} = 1,\ q(F) = p_{O1}^{\,2} = 1$.

Свойство 3. Для независимых мозаичных форм простота их супремума по сложности) равна произведению простоты этих форм:

$q(F\wedge G) = q(F)\ q(G)$.

Нормированная площадь пересечения любых двух областей из F и G равна произведению их нормированных площадей

Вывод условия независимости форм. Обозначим $W=F\wedge G$:

$q(F\wedge G) = \sum_{i=1,..,n} \sum_{j=1,..,m} p_{Wij}^{\,2} = q(F)\ q(G) = \sum_{i=1,..,n} p_{Fi}^{\,2} \sum_{j=1,..,m} p_{Gj}^{\,2} =$

$= \sum_{i=1,..,n} \sum_{j=1,..,m} p_{Fi}^{\,2}\, p_{Gj}^{\,2} = \sum_{i=1,..,n} \sum_{j=1,..,m} (p_{Fi}\, p_{Gj})^2 \Rightarrow p_{Wij} = p_{Fi}\, p_{Gj}$, $i=1,..,n,\ j=1,..,m.$

Свойства простоты

Свойство 1. Простота – нормированная величина $q(F)\in[0,1]$.

Доказательство следует из (14)

$\Sigma_{i=1,..,n}\, p_{Fi} = 1,\ p_{Fi} \geq 0,\ i=1,..,n \Rightarrow q(F) = \Sigma_{i=1,..,n}\, p_{Fi}^{\ 2} \in[0,1].$

Свойство 2. Простота простейшей формы *O* максимальна: $q(O)=1$.

Эмпирически это следует из того, что для простейшей формы n=1,

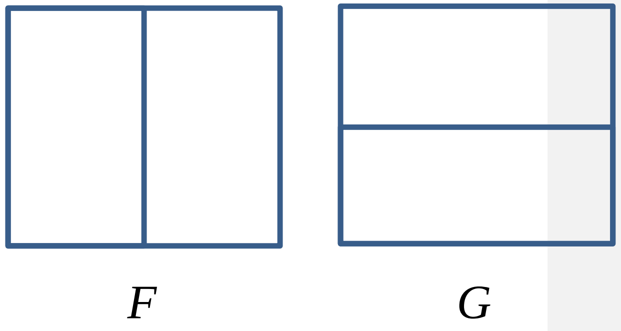
$p_{O1} = 1,\ q(F) = p_{O1}^{\ 2} = 1.$

Свойство 3. Для независимых мозаичных форм простота их супремума по сложности) равна произведению простоты этих форм:

$q(F\wedge G) = q(F)\, q(G).$

Это условие было ранее введено Пытьевым именно как условие *независимости* или *ортогональности* форм *F* и *G*. Смысл термина «ортогональность» в морфологическом анализе изображений связана с тем, что для любого изображения $f\in F$, норма проекции центрированного изображения $f^* = f - f_O$ на *G* равна 0.

Пример независимых форм



Эти свойства напоминают свойства вероятностной меры!

Наблюдение 1: Простота $q(F)$ это нормированная на [0,1] функция, определенная на множестве мозаичных форм.

Что нужно, чтобы ее можно было назвать вероятностной мерой?

Для вероятностей характерны *мультипликативность* на *независимых* событиях и *аддитивность* на *несовместных*:

- A и B *независимы* если $\Pr(AB) = \Pr(A)\Pr(B)$, где $AB = A$ *и* B;
- A и B *несовместны* если $\Pr(A+B) = \Pr(A)+\Pr(B)$, где $A+B = A$ *или* B.

Для *совместных* событий – *правило сложения вероятностей*:

$\Pr(A+B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(AB)$.

Можно ли найти аналогичные понятия для мозаичных форм?

Наблюдение 2: *мультипликативность* относительно $\wedge$ наблюдается!

Поэтому *аналогом произведения* (логического *и*) мозаичных форм F и G можно считать их *супремум по сложности* $W=F\wedge G$.

Эти свойства напоминают свойства вероятностной меры!

Гипотеза: предположим, что аналог правила сложения вероятностей имеет вид:

$$q(F \vee G) = q(F) + q(G) - q(F \wedge G).$$

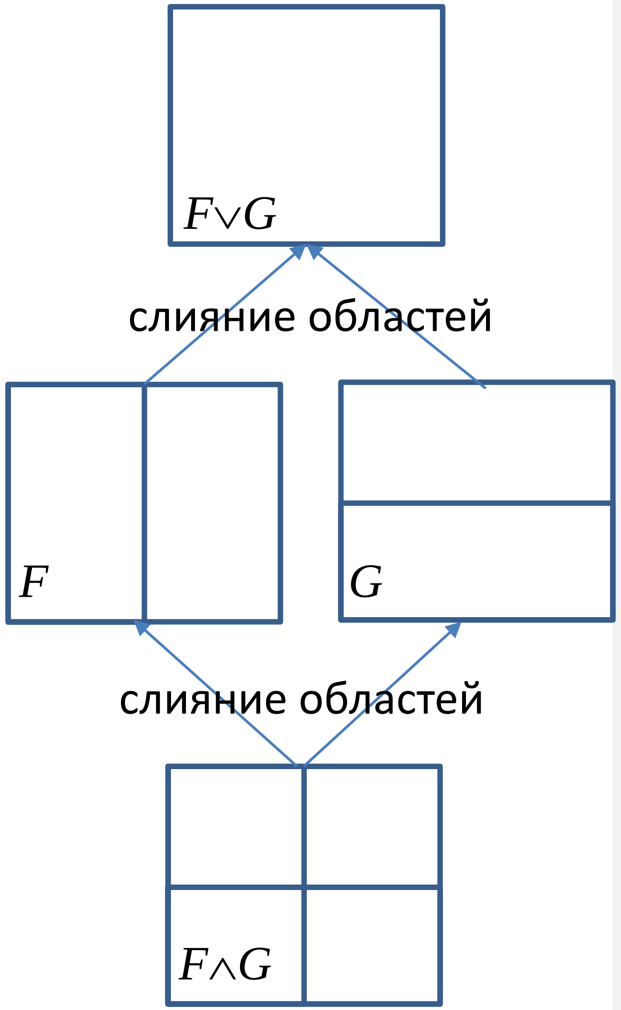
Эти свойства напоминают свойства вероятностной меры!

Гипотеза: предположим, что аналог правила сложения вероятностей имеет вид:

$q(F \vee G) = q(F) + q(G) – q(F \wedge G).$

Проверим это выражение для самого простого примера двух независимых форм из двух областей:

$q(F \vee G) = 1;\ q(F) = q(G) = 0{,}5;\ q(F \wedge G) = 0{,}25$



Эти свойства напоминают свойства вероятностной меры!

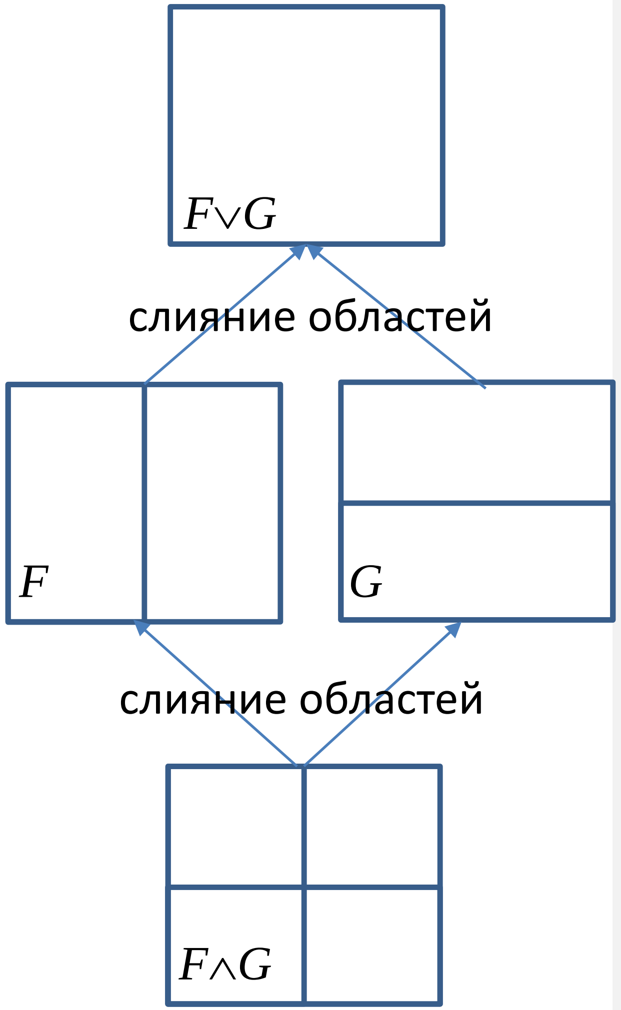
Гипотеза: предположим, что аналог правила сложения вероятностей имеет вид:

$q(F \vee G) = q(F) + q(G) - q(F \wedge G)$.

Проверим это выражение для самого простого примера двух независимых форм из двух областей:

$q(F \vee G) = 1;\ q(F) = q(G) = 0{,}5;\ q(F \wedge G) = 0{,}25 \Rightarrow$

$q(F \vee G) = \boxed{1 \neq 0{,}75} = q(F) + q(G) - q(F \wedge G)$.



Наблюдение 3: для единственной известной нам пары операций $(\wedge, \vee)$ на множестве мозаичных форм гипотеза о том, что *простота* является вероятностной мерой **не оправдывается**.

Неужели аналогия *простоты* с *вероятностью* была всего лишь случайностью? Ведь нам не хватает одной операции и одного свойства…

Откуда берутся свойства вероятностной меры?

Для вероятностей на событиях:

- *A* и *B* *независимы*

  если Pr(*AB*) = Pr(*A*) Pr(*B*),

где *AB* = *A и B*;

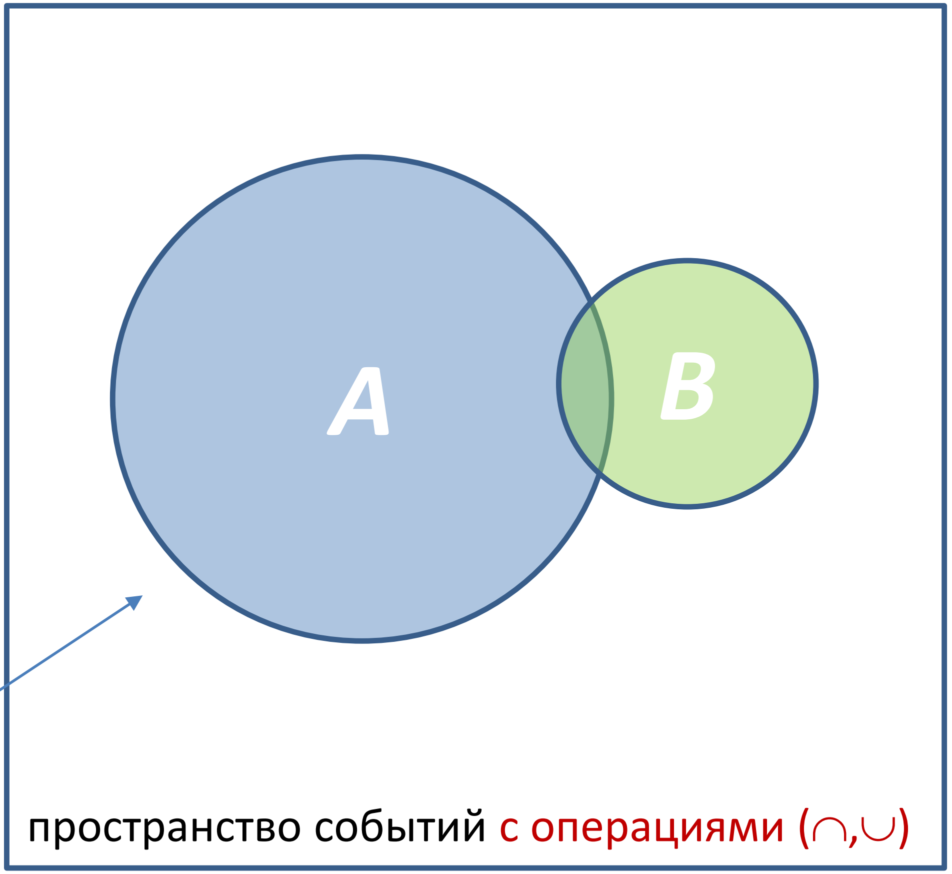
- *A* и *B* *несовместны*

  если Pr(*A*+*B*) = Pr(*A*)+Pr(*B*),

где *A*+*B* = *A или B*.

Для *совместных* вероятностей:

Pr(*A*+*B*) = Pr(*A*) + Pr(*B*) – Pr(*AB*).



Множество T = 2^{B} всех подмножеств (булеан) некоторого множества базовых элементов B соответствует множеству отображений из B в {0,1}. Иными словами, каждому элементу $t \in T$ соответствует *индикаторная функция*

$$\alpha_t(b \in B) = \{\ 1, \text{ если } b \in t;\quad 0 \text{ – в противном случае}\}.$$

Откуда берутся свойства вероятностной меры?

Для вероятностей на событиях:

- A и B *независимы*

  если $\Pr(AB) = \Pr(A)\Pr(B)$,

где $AB = A$ *и* B;

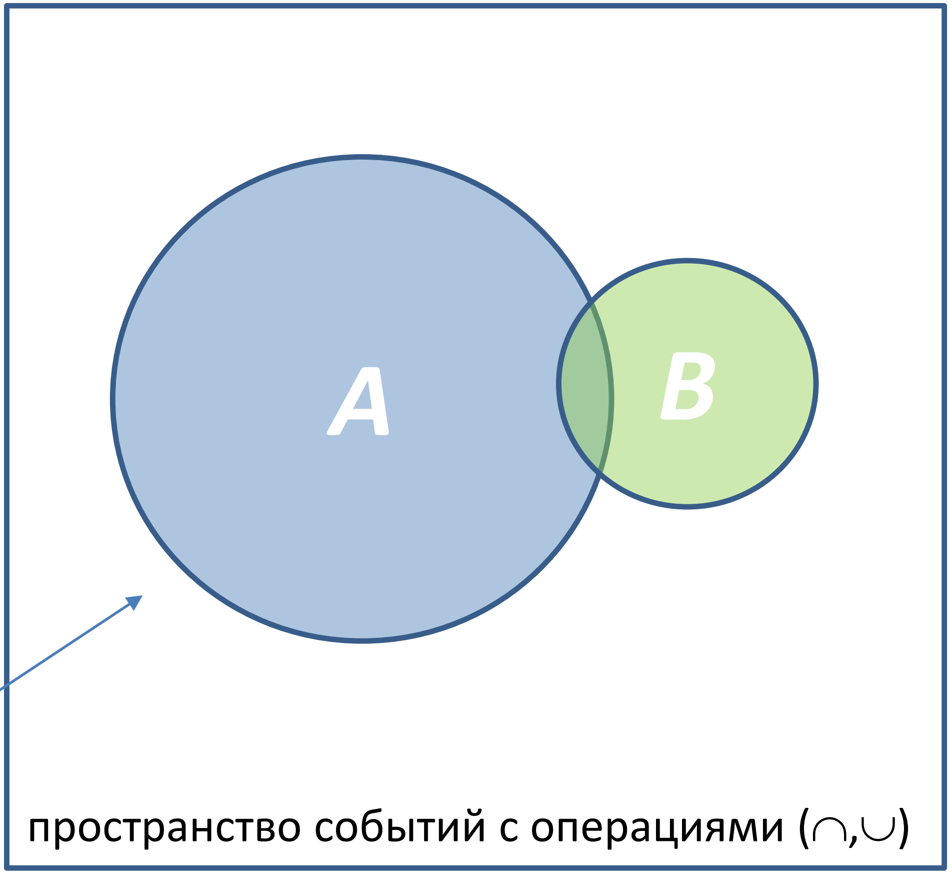
- A и B *несовместны*

  если $\Pr(A+B) = \Pr(A)+\Pr(B)$,

где $A+B = A$ *или* B.

Для *совместных* вероятностей:

$\Pr(A+B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(AB)$.



Соответственно основные операции объединения (∪) и пересечения (∩) двух подмножеств $t,r\in\mathrm{T}$ эквивалентны операциям взятия *поэлементного минимума и максимума индикаторных функций*: $\alpha_{t\cap r}(b) = \min(\alpha_t(b), \alpha_r(b))$,

$\alpha_{t\cup r}(b) = \max(\alpha_t(b), \alpha_r(b))$.

Откуда берутся свойства вероятностной меры?

Для вероятностей на событиях:

- A и B *независимы*

  если $\Pr(AB) = \Pr(A)\Pr(B)$,

где $AB = A$ *и* B;

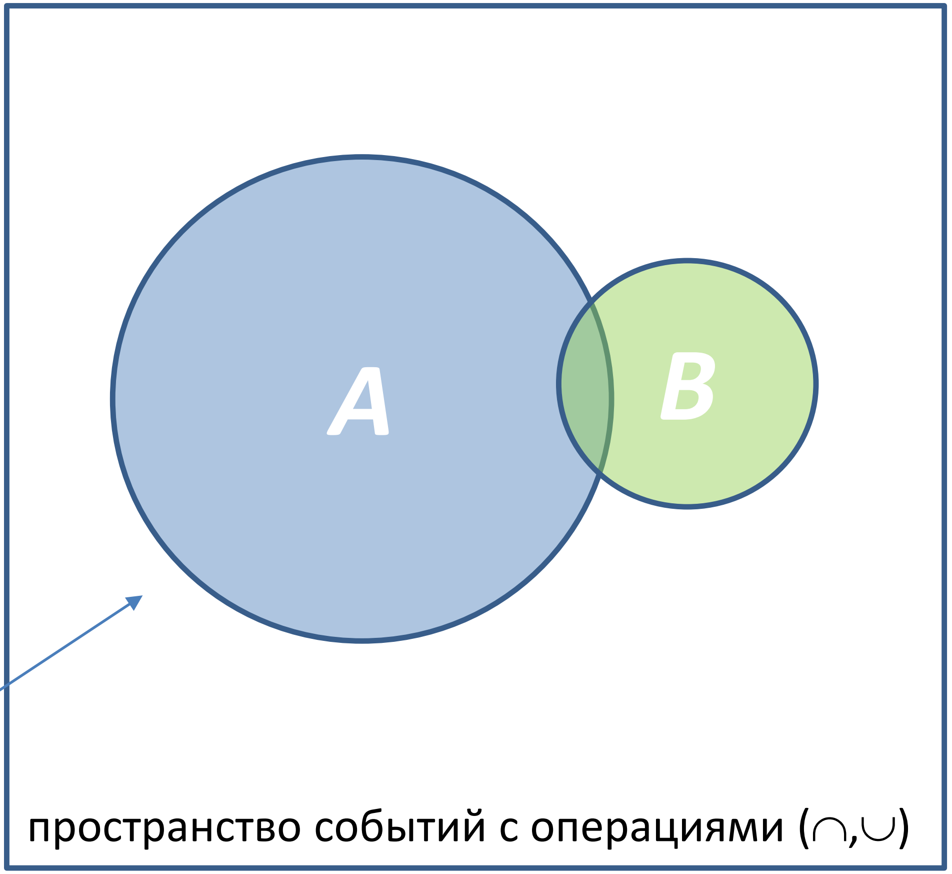
- A и B *несовместны*

  если $\Pr(A+B) = \Pr(A)+\Pr(B)$,

где $A+B = A$ *или* B.

Для *совместных* вероятностей:

$\Pr(A+B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(AB)$.



Пусть число базовых элементов в B конечно и равно n.

Введем функцию *объема* множества $t \in T$, которая равна количеству элементов в t.

$N(t) = \| \alpha_t(b) \|_1 = \sum_{b \in B} \alpha_t(b)$,

Наибольшее подмножество $B \in T$ будет включать в себя все элементы из B: $N(B) = n$.

Наименьшее подмножество $\varnothing \in T$ не будет включать ни одного элемента из B: $N(\varnothing) = 0$.

Откуда берутся свойства вероятностной меры?

Для вероятностей на событиях:

- A и B *независимы*

  если $\Pr(AB) = \Pr(A)\Pr(B)$,

где $AB = A$ *и* B;

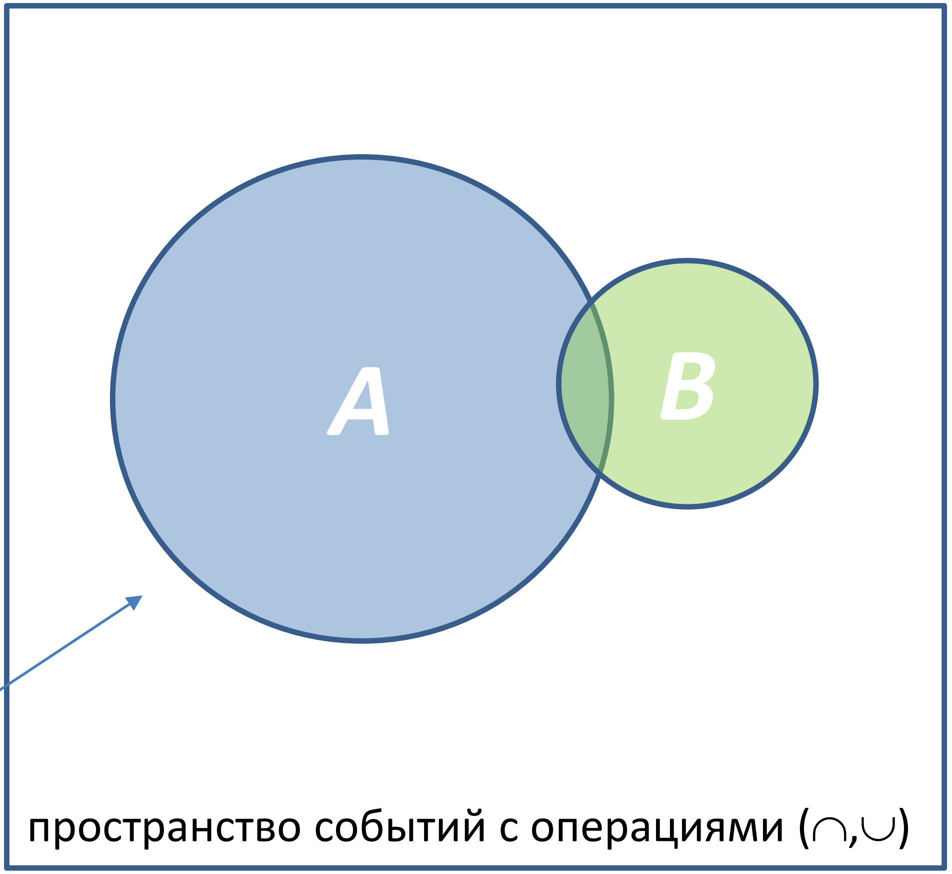
- A и B *несовместны*

  если $\Pr(A+B) = \Pr(A)+\Pr(B)$,

где $A+B = A$ *или* B.

Для *совместных* вероятностей:

$\Pr(A+B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(AB)$.



Теперь можно ввести нормированную функцию *доли* элементов из B, присутствующих в $t \in T$:

$p(t) = N(t) / N(B)$,

для которой легко показать, что:

$p(t) \in [0,1]$; $p(\varnothing) = 0$; $p(B) = 1$;

$p(t \cup r) = p(t) + p(r) - p(t \cap r)$.

Откуда берутся свойства вероятностной меры?

Для вероятностей на событиях:

- *A* и *B независимы*

  если $\Pr(AB) = \Pr(A)\Pr(B)$,

где $AB = A$ *и* B;

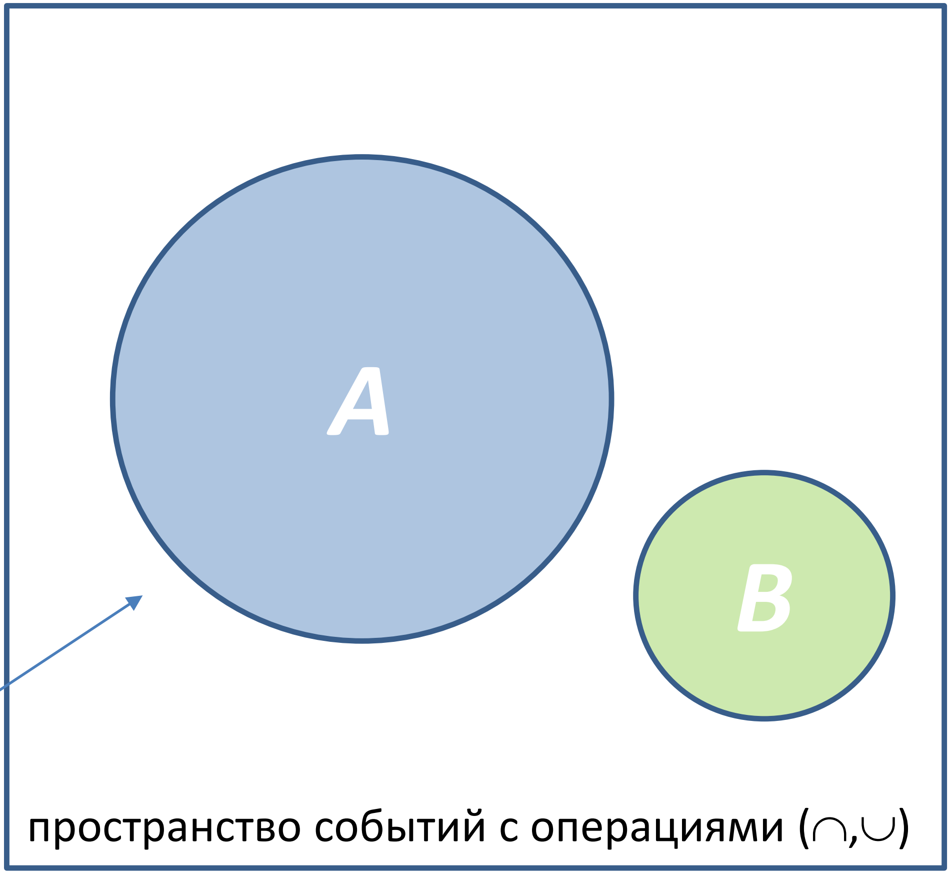
- *A* и *B несовместны*

  если $\Pr(A+B) = \Pr(A)+\Pr(B)$,

где $A+B = A$ *или* B.

Для *совместных* вероятностей:

$\Pr(A+B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(AB)$.



Назовем *несовместными* такие подмножества $t, r \in T$, которые *не пересекаются*,

то есть $t \cap r = \varnothing$, и следовательно

$p(t \cup r) = p(t) + p(r) - p(t \cap r) = p(t) + p(r) - p(\varnothing) = p(t) + p(r)$.

Откуда берутся свойства вероятностной меры?

Для вероятностей на событиях:

- A и B *независимы*

  если $\Pr(AB) = \Pr(A)\,\Pr(B)$,

где $AB = A$ *и* B;

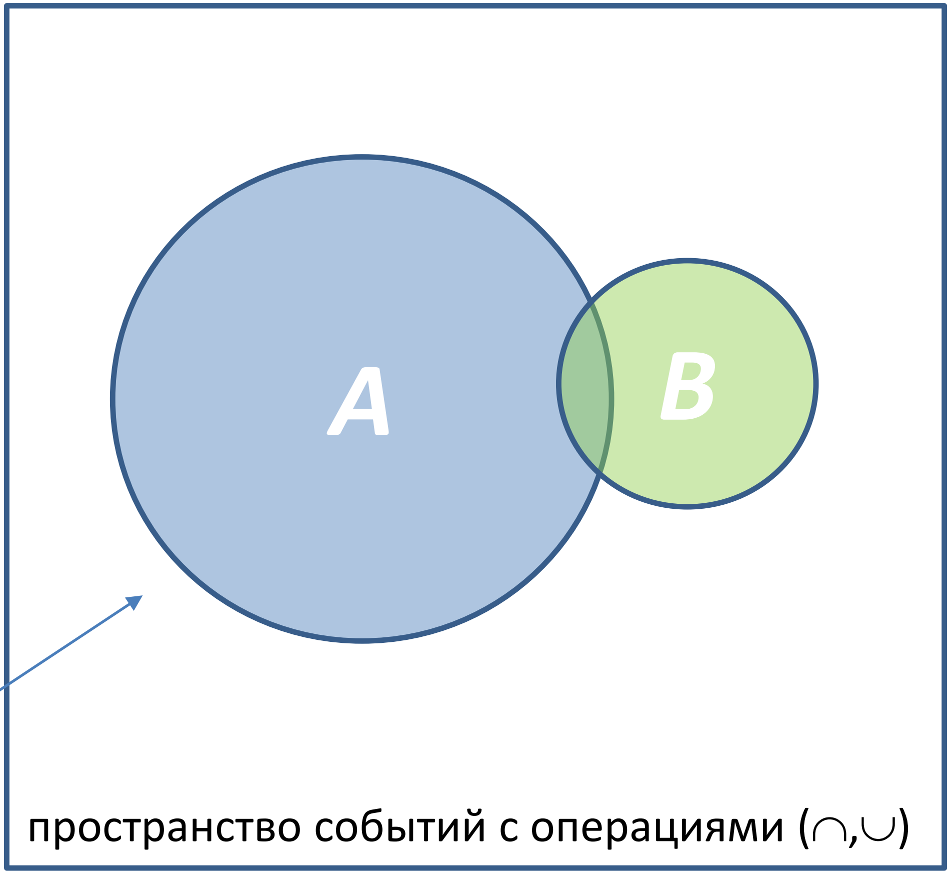
- A и B *несовместны*

  если $\Pr(A+B) = \Pr(A)+\Pr(B)$,

где $A+B = A$ *или* B.

Для *совместных* вероятностей:

$\Pr(A+B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(AB)$.



Назовем *независимыми* такие подмножества $t,r \in T$, для которых *доля* элементов одного множества в другом (*относительная доля* их пересечения) такая же, как и *доля* элементов этого множества в исходном базовом множестве: $p(r) = N(t \cap r) / N(t)$, $p(t) = N(t \cap r) / N(r)$.

Отсюда сразу следует, что для независимых элементов $N(t \cap r) = N(t)\,p(r) = p(t)\,N(r)$. $\Rightarrow$

$p(t \cap r) = p(t)\,p(r)$, то есть *доля* пересечения таких подмножеств есть произведение их *долей*.

Откуда берутся свойства вероятностной меры?

Для вероятностей на событиях:

- A и B *независимы*

  если $\Pr(AB) = \Pr(A)\Pr(B)$,

где $AB = A$ *и* B;

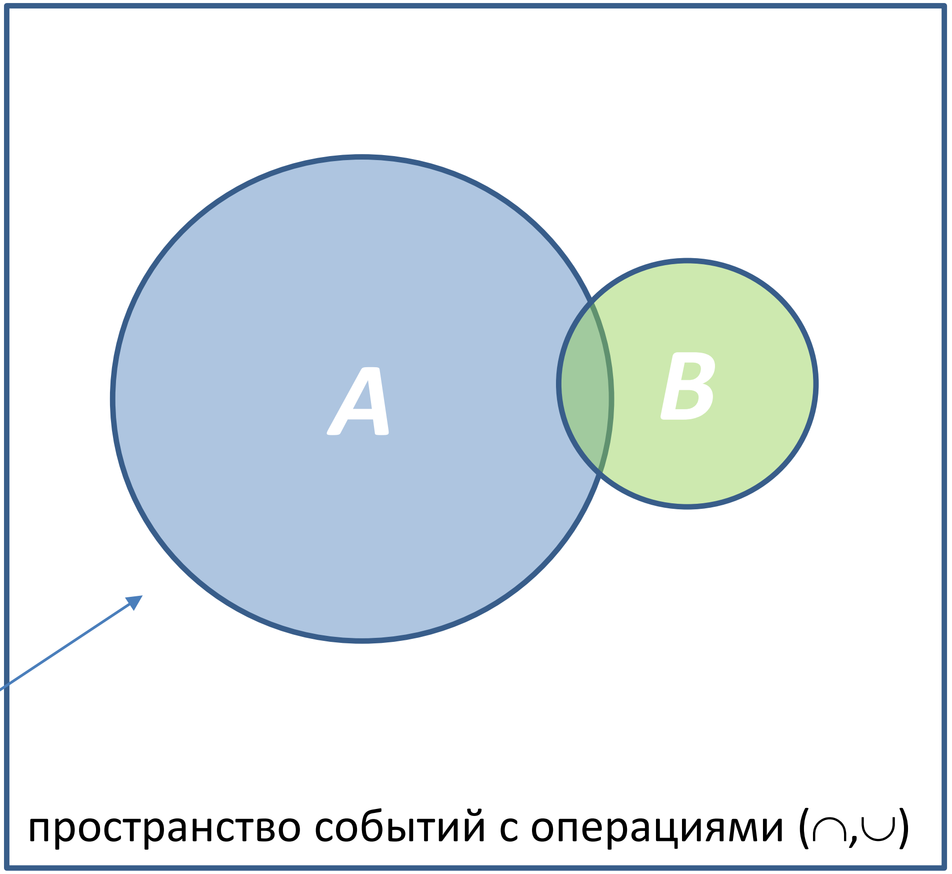
- A и B *несовместны*

  если $\Pr(A+B) = \Pr(A)+\Pr(B)$,

где $A+B = A$ *или* B.

Для *совместных* вероятностей:

$\Pr(A+B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(AB)$.



Назовем *независимыми* такие подмножества $t,r \in T$, для которых *доля* элементов одного множества в другом (*относительная доля* их пересечения) такая же, как и *доля* элементов этого множества в исходном базовом множестве: $p(r) = N(t \cap r) / N(t)$, $p(t) = N(t \cap r) / N(r)$.

Отсюда сразу следует, что для независимых элементов $N(t \cap r) = N(t)\, p(r) = p(t)\, N(r)$. $\Rightarrow$

$p(t \cap r) = p(t)\, p(r)$, то есть *доля* пересечения таких подмножеств есть произведение их *долей*.

Откуда берутся свойства вероятностной меры?

Для вероятностей на событиях:

- A и B *независимы*

  если $\Pr(AB) = \Pr(A)\Pr(B)$,

где $AB = A$ *и* B;

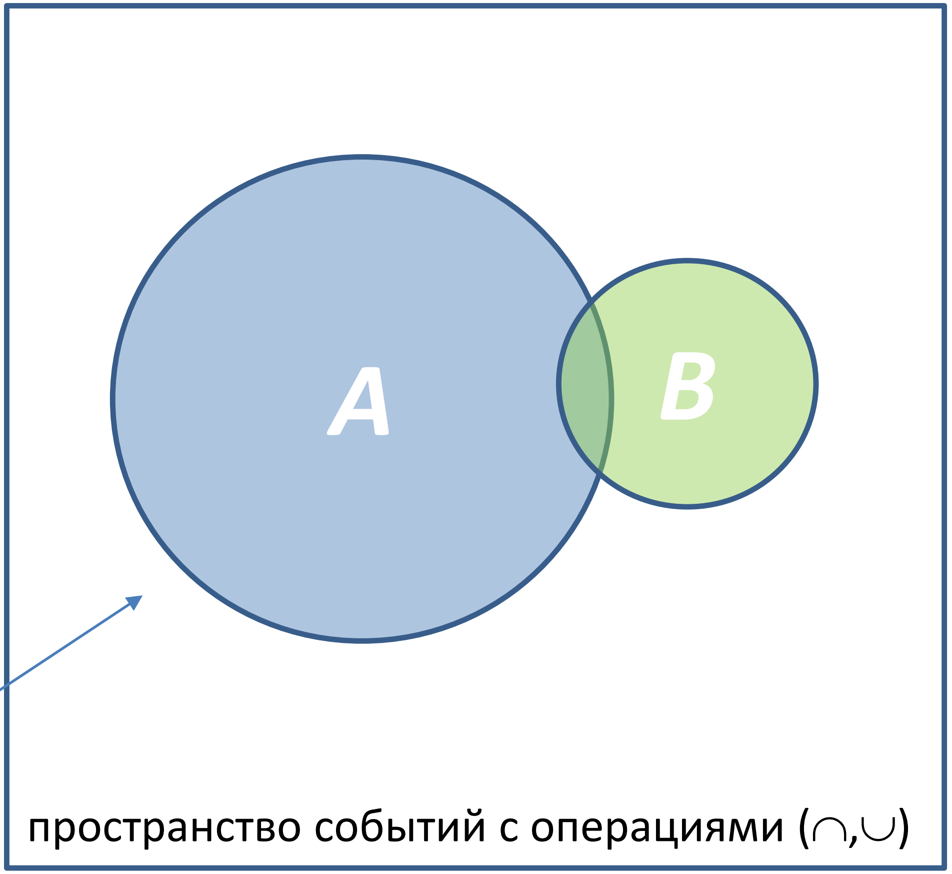
- A и B *несовместны*

  если $\Pr(A+B) = \Pr(A)+\Pr(B)$,

где $A+B = A$ *или* B.

Для *совместных* вероятностей:

$\Pr(A+B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(AB)$.



По совокупности свойств, *долевая функция* *(L1-норма индикаторной функции события, деленная на норму* В*)* $p(t)$ есть *вероятностная мера* на Т = $2^{\text{В}}$, согласованная с отношением *включения*: $(t \subseteq r) \Rightarrow p(t) \leq p(r)$.

Простота – это L1-норма индикаторной функции в пространстве отношений!

$$q(F) = \| \eta_F \|_{L1}$$

Рассмотрим множество мозаичных форм как вложение в 2^{Θ}, где $\Theta = \Omega\times\Omega$.

Определим операции *объединения* ($\cup$) и *пересечения* ($\cap$) двух *форм* $F,G\in\Theta$:

$\eta_{F\cap G}(x,y,u,v) = \min(\eta_F(x,y,u,v),\ \eta_G(x,y,u,v))$, — *знакомая операция* ($\wedge$)

$\eta_{F\cup G}(x,y,u,v) = \max(\eta_F(x,y,u,v),\ \eta_G(x,y,u,v))$. — *новая операция*!

Простота $q(F)\in[0,1]$ есть *вероятностная мера* на $(\Theta,\cup,\cap)$, поскольку:

$q(O) = 1$ для *простейшей формы* O ($\eta_O(x,y,u,v) \equiv 1$);

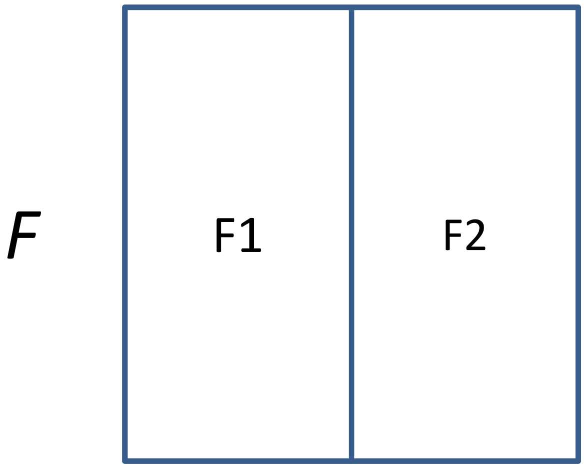
$q(\varnothing) = 0$ для *сложнейшей формы* $\varnothing$ ($\eta_\varnothing(x,y,u,v) \equiv 0$);

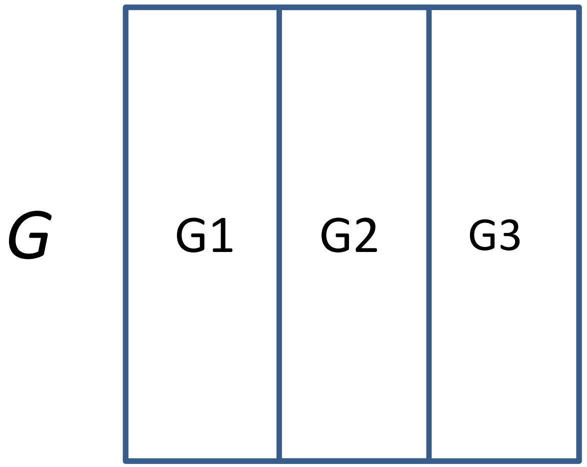
$q(F\cup G) = q(F) + q(G) - q(F\cap G)$; (*правило сложения простоты*)

$q(F\cup G) = q(F) + q(G)$ для *несовместных* форм ($F\cap G=\varnothing$);

$q(F\cap G) = q(F)q(G)$ для *независимых* форм ($q(F\cap G)/q(F) = q(G)$).

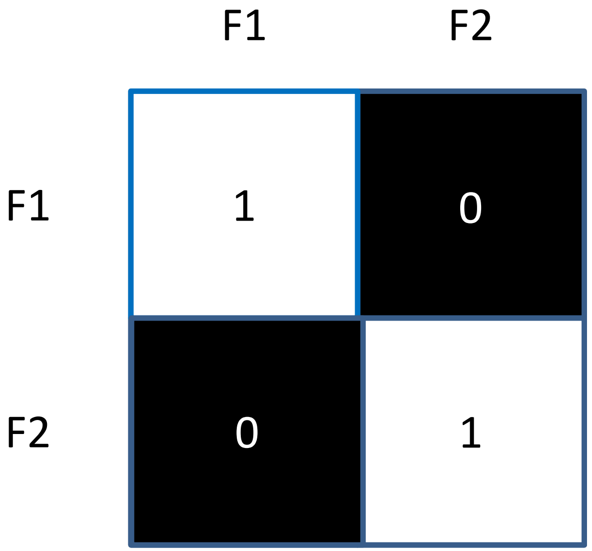
Вложение множества мозаичных форм в 2^{Θ}, где $\Theta = \Omega\times\Omega$



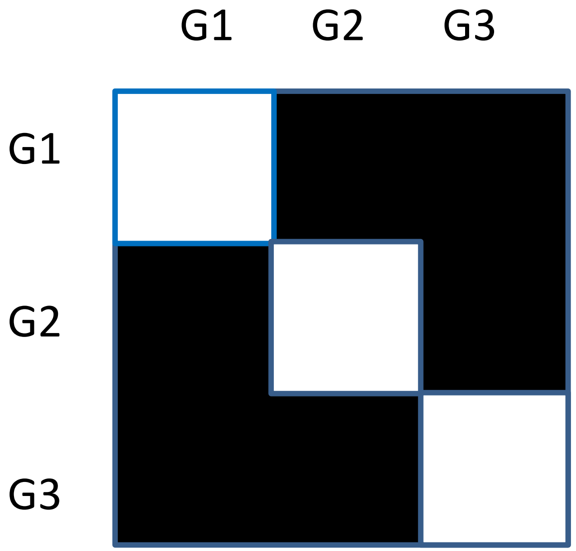


Мозаичная форма в Ω

Мозаичная форма в $\Omega\times\Omega$



η_F



η_G

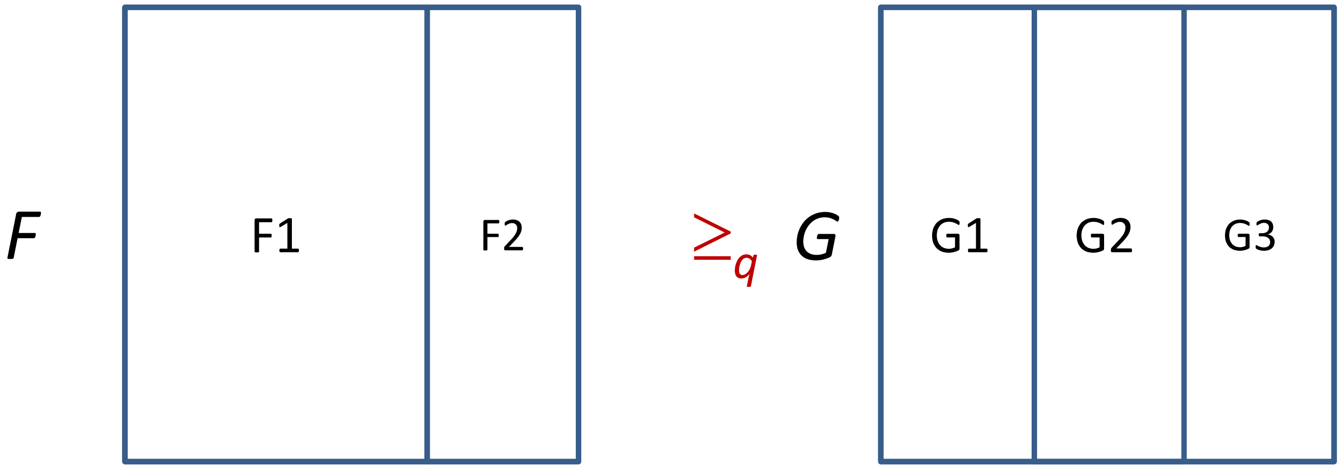
$\eta_F(x,y,u,v) =$

$= \sum_{i=1,..,n} \chi_{Fi}(x,y)\ \chi_{Fi}(u,v) =$

$= \{1$, если $\forall i$: $\chi_{Fi}(x,y)=\chi_{Fi}(u,v)$;

0 – в противном случае$\}$.

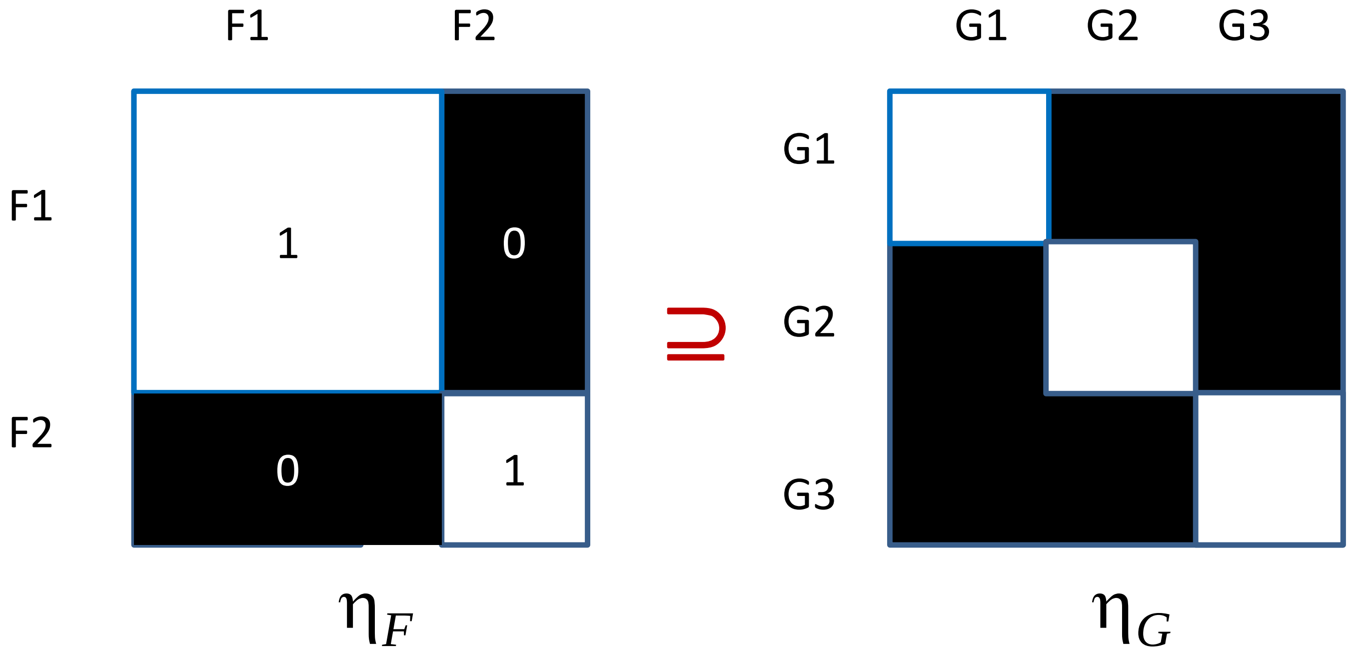
Отношение «не сложнее по форме» как *включение* в $\Omega\times\Omega$



более сложные формы получаются из менее сложных разбиением, а менее сложные из более сложных – слиянием областей.

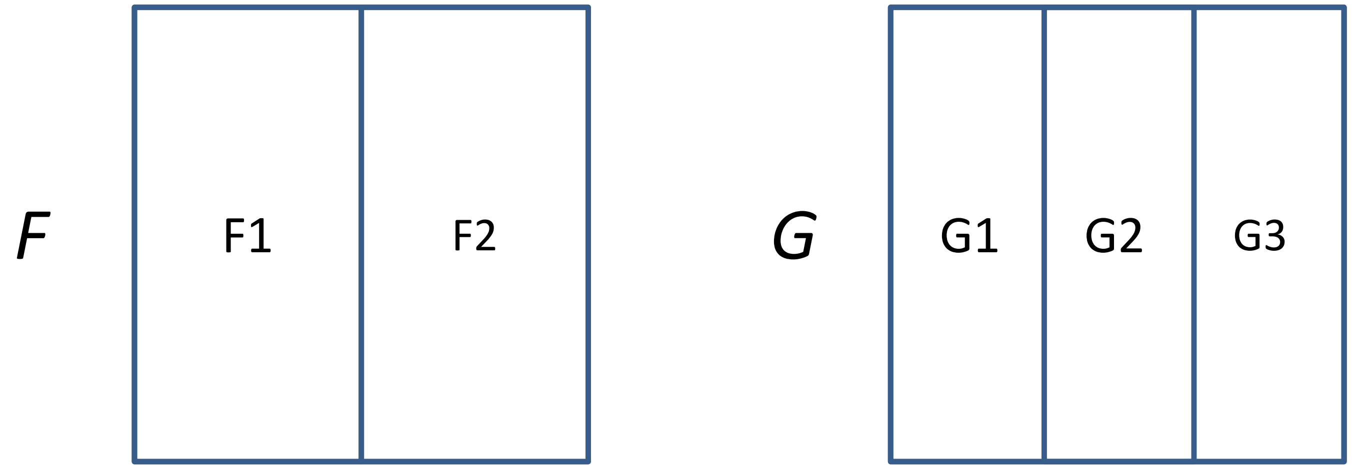
Мозаичная форма в Ω

Мозаичная форма в $\Omega\times\Omega$



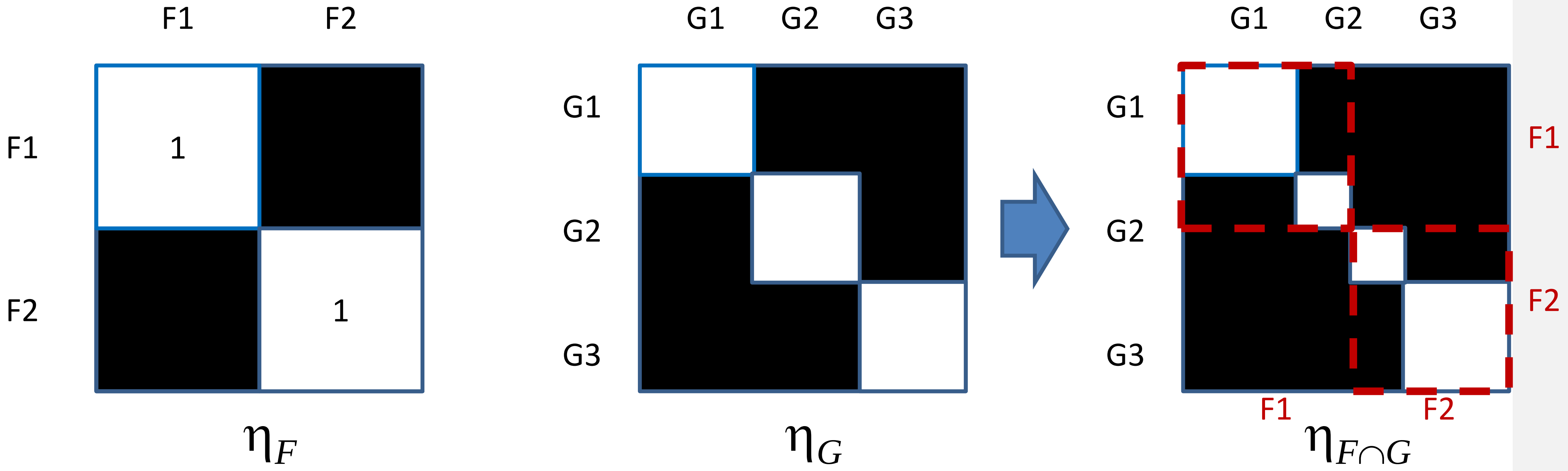
Реляционные модели более сложных форм целиком принадлежат реляционным моделям менее сложных форм (пикселы, которые связаны в более сложной форме, связаны и в более простой)

Операции над формами в $\Omega\times\Omega$ (пересечение)

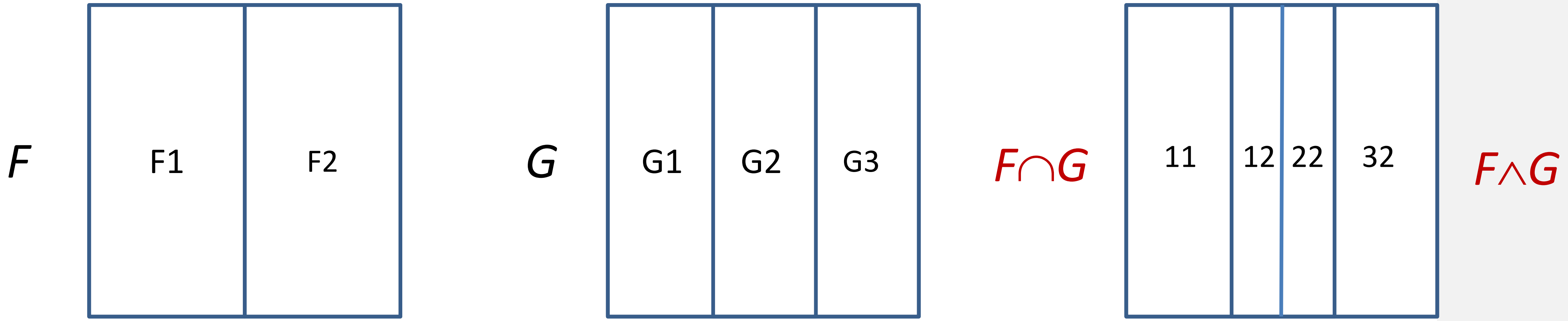


Мозаичная форма в Ω

Мозаичная форма в $\Omega\times\Omega$

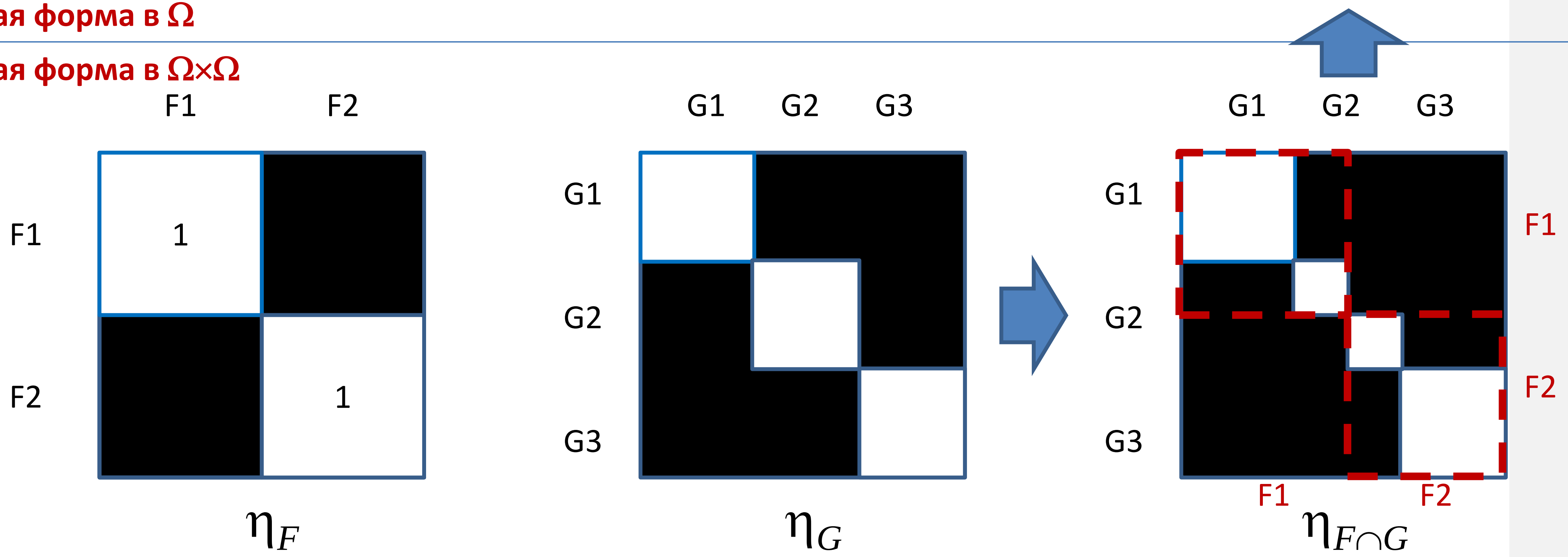


Операции над формами в Ω×Ω (пересечение)



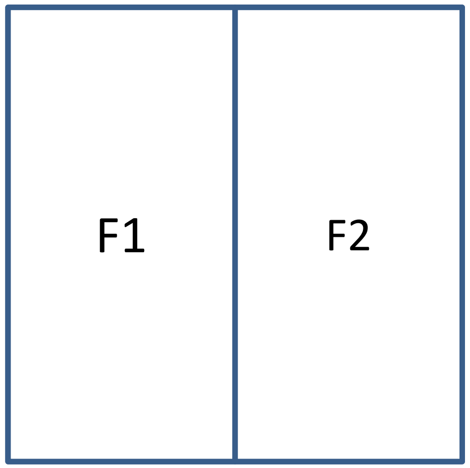
Мозаичная форма в Ω

Мозаичная форма в Ω×Ω

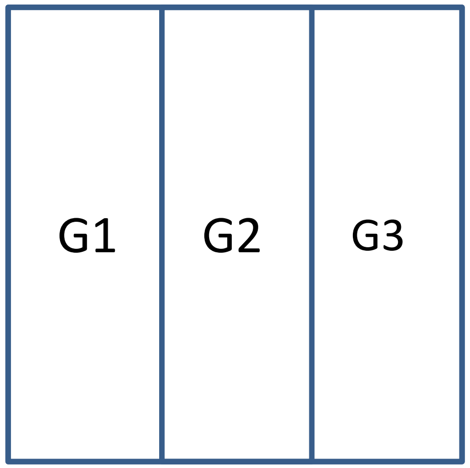


Операции над формами в $\Omega\times\Omega$ (объединение)

F



G

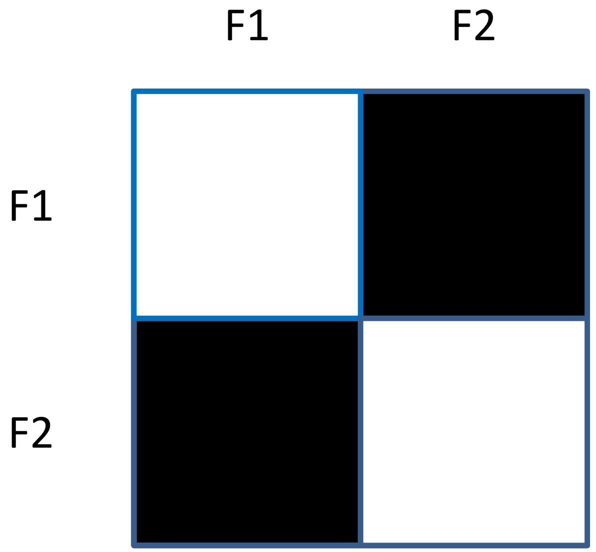


$q(F\cup G) = q(F) + q(G) - q(F\cap G)$

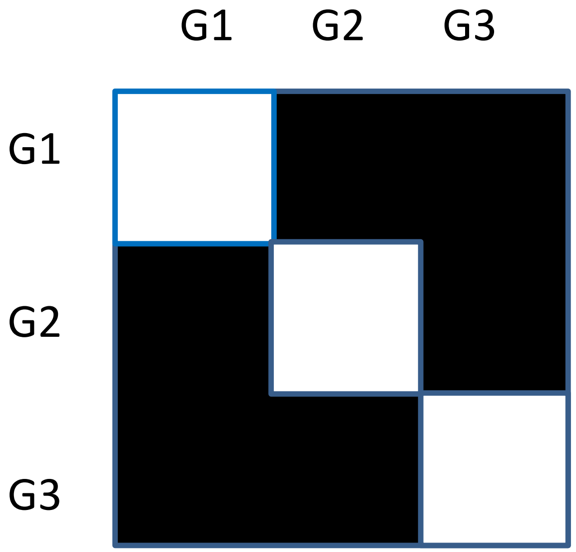
правило сложения простоты

Мозаичная форма в Ω

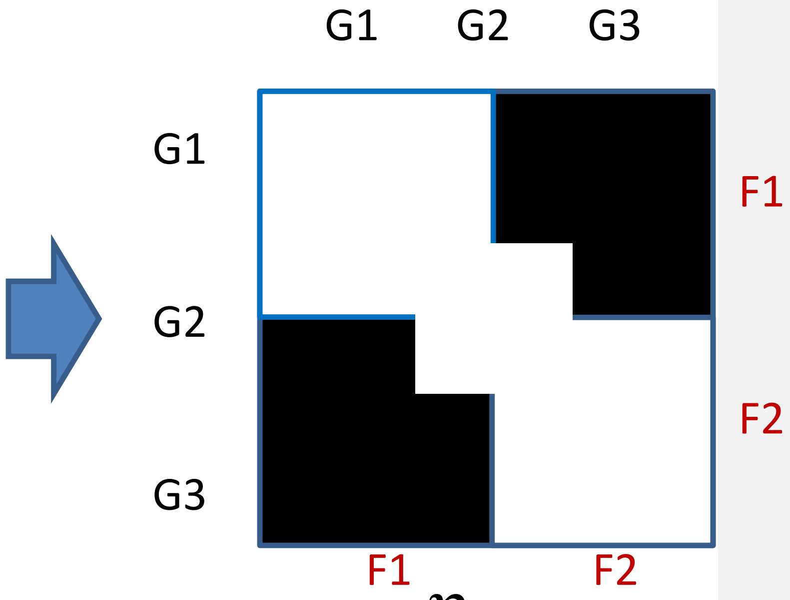
Мозаичная форма в $\Omega\times\Omega$



η_F

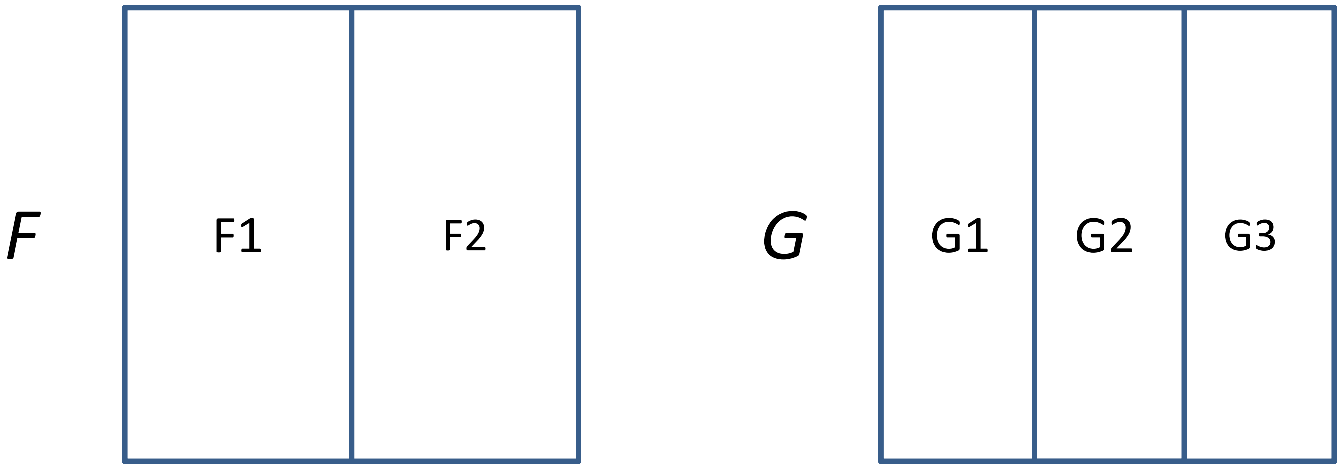


η_G



$\eta_{F\cup G}$

Операции над формами в $\Omega\times\Omega$ (объединение)

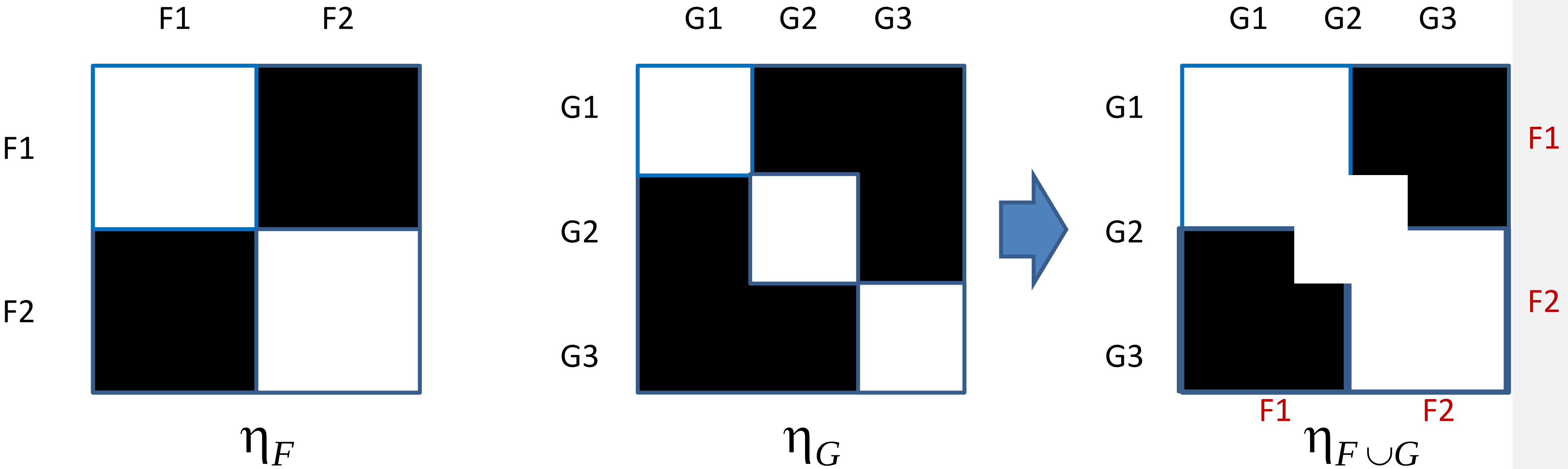


Геометрический смысл объединения форм, вообще говоря, ***пока неясен***: объединение форм ($F\cup G$): $\eta_{F\cup G}(x,y,u,v)$ нельзя представить в «блочно-диагональном» виде.

Это не мозаичная форма!

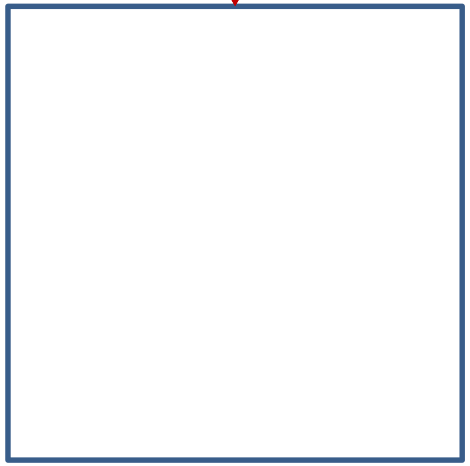
Мозаичная форма в Ω

Мозаичная форма в $\Omega\times\Omega$



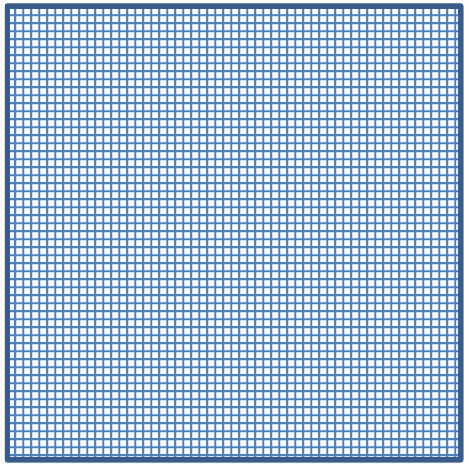
Простейшая и сложнейшая формы в $\Omega\times\Omega$

O



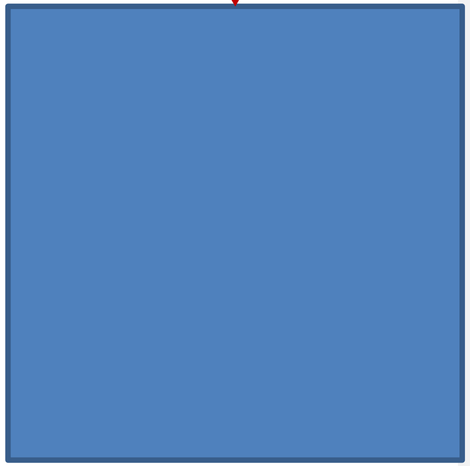
I

Это мозаичная форма



$\varnothing$

Это не мозаичная форма!

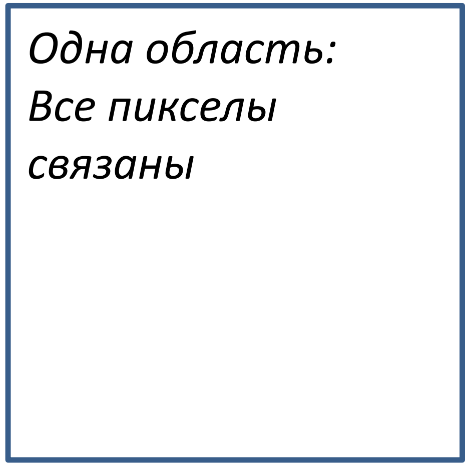


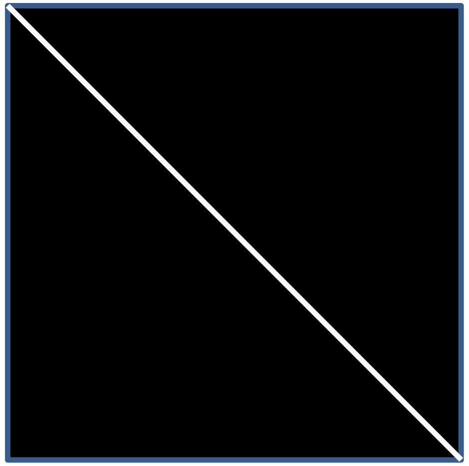
Форма в Ω

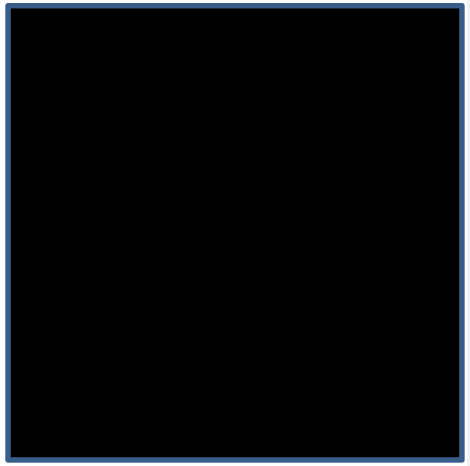
Пиксельное разбиение: Каждый пиксел - отдельная область, связан только с собой

*«Пустая» форма (вакуум): **Ни одной области**, пикселы не связаны даже сами с собой*

Форма в $\Omega\times\Omega$



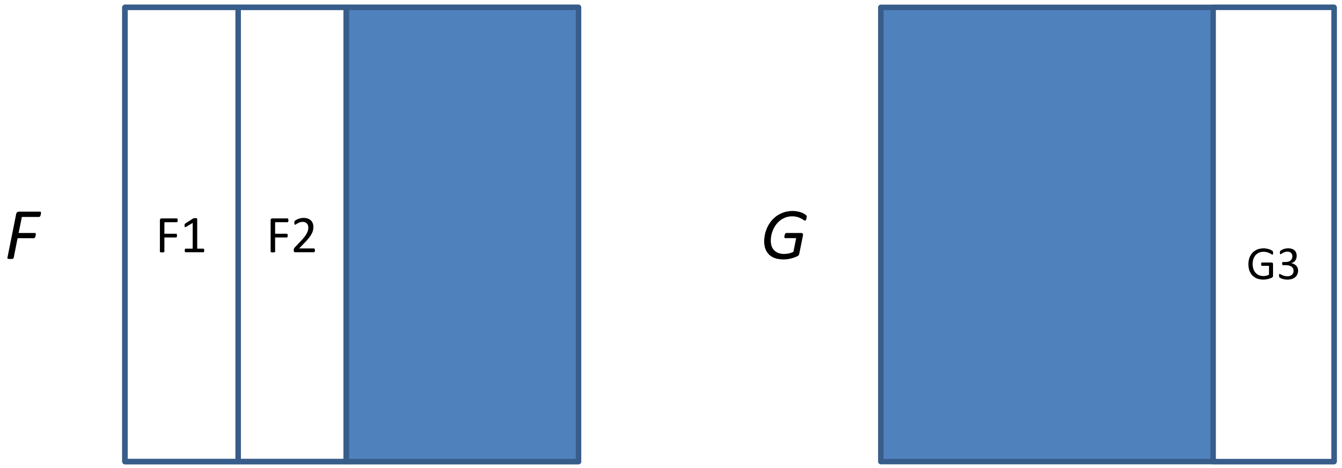




$q(O) = 1$ для *простейшей формы* O $(\eta_O(x,y,u,v) \equiv 1)$

$q(\varnothing) = 0$ для *сложнейшей формы* $\varnothing$ $(\eta_\varnothing(x,y,u,v) \equiv 0)$

Несовместные формы в $\Omega\times\Omega$



$q(F\cup G) = q(F) + q(G)$

для *несовместных* форм

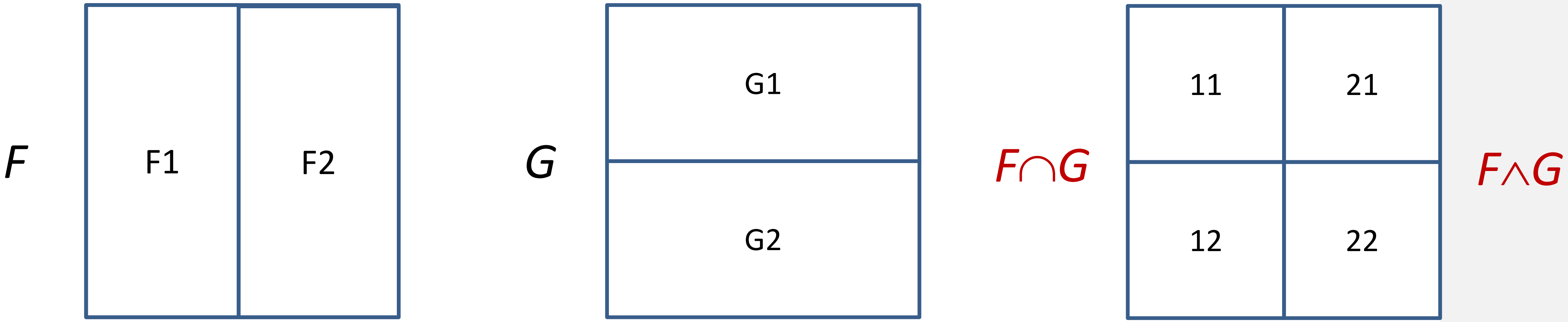
$(F\cap G=\varnothing)$;

Локализованная мозаичная форма в Ω

Локализованная мозаичная форма в $\Omega\times\Omega$

η_F η_G $\eta_{F\cup G}$

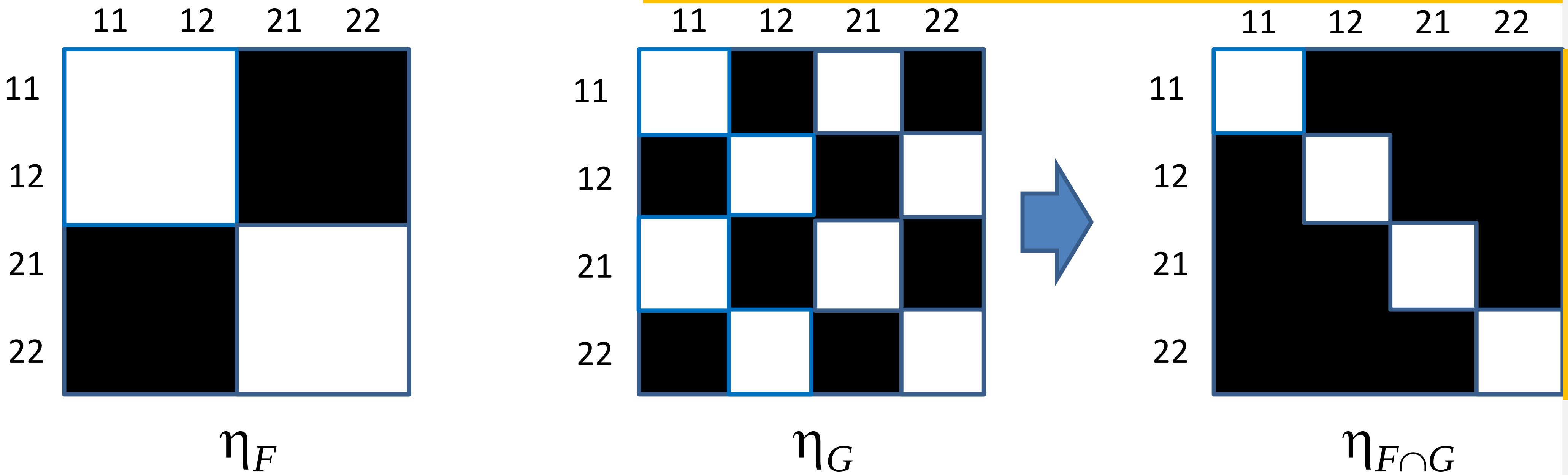
Независимые формы в Ω×Ω



Локализованная мозаичная форма в Ω

Локализованная мозаичная форма в Ω×Ω

$q(F\cap G) = q(F)q(G)$ для *независимых* форм, таких, что $q(F\cap G)/q(F) = q(G)$



Доля ***F∩G*** **в *F*** такая же, как *Доля* ***G*** **в Θ**

Теория простоты форм как аналог теории вероятности для событий

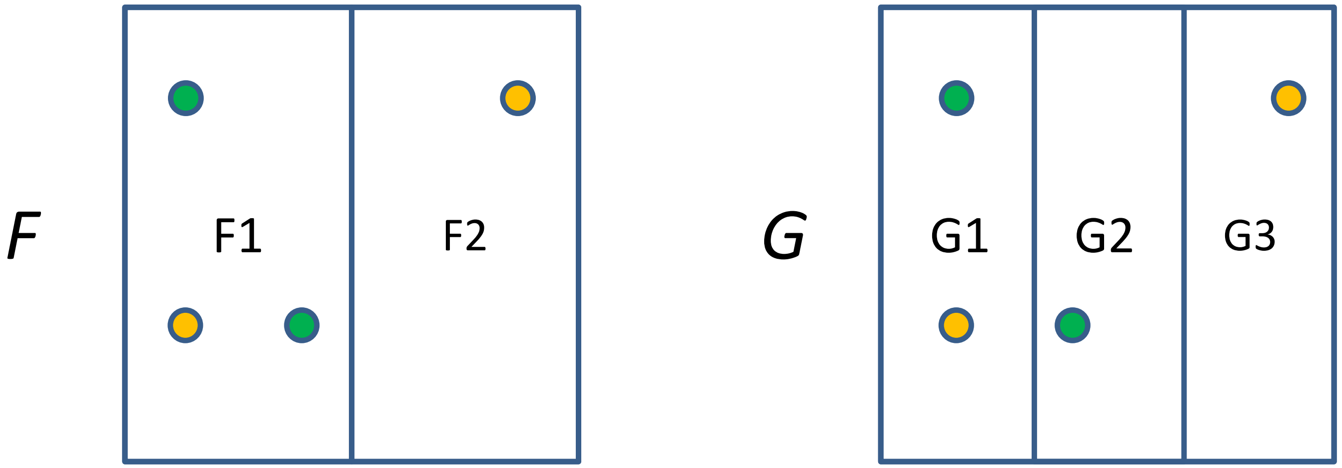
По аналогии с *теорией вероятностей*, связанной с множеством *событий,* операциями (И,ИЛИ) и мерой «*вероятность события*»,

предлагается такую конструкцию на множестве Θ *реляционных форм* с операциями $(\cap,\cup)$ и мерой «*простота формы*» называть *морфологической теорией простоты*.

Базовая интуиция (почему *простота* это вероятность):

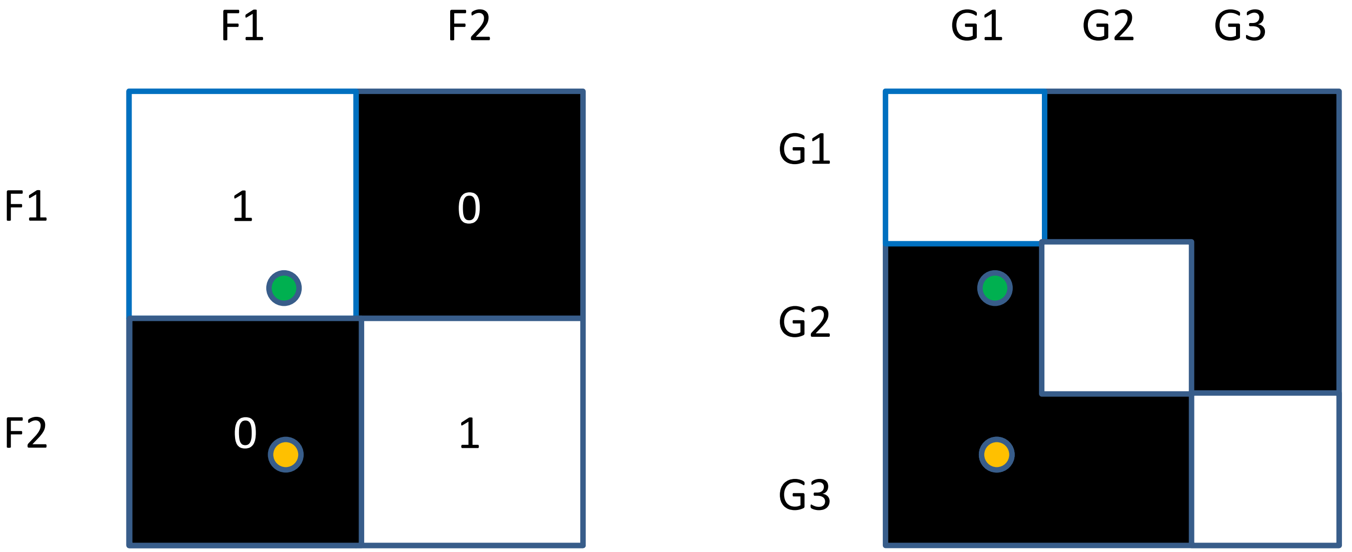
Простота **имеет смысл** ***геометрической вероятности:*** **это вероятность случайной пары точек попасть в одну область формы.**

Простота как *внутренняя* геометрическая вероятность



Мозаичная форма в Ω

Мозаичная форма в Ω×Ω



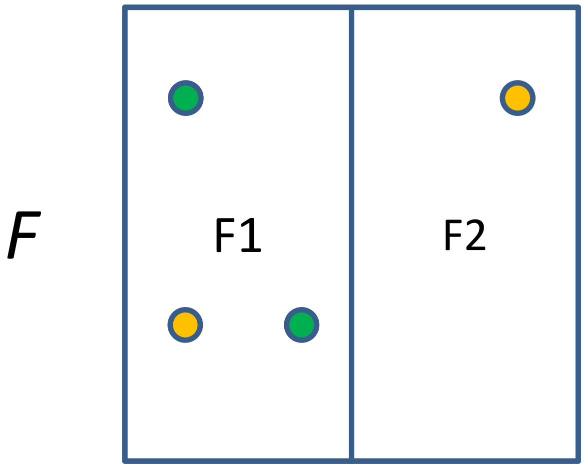
Понятие «геометрической вероятности» хорошо известно. Оно вводится обычно для непрерывных пространств событий, вложенных в R^n.

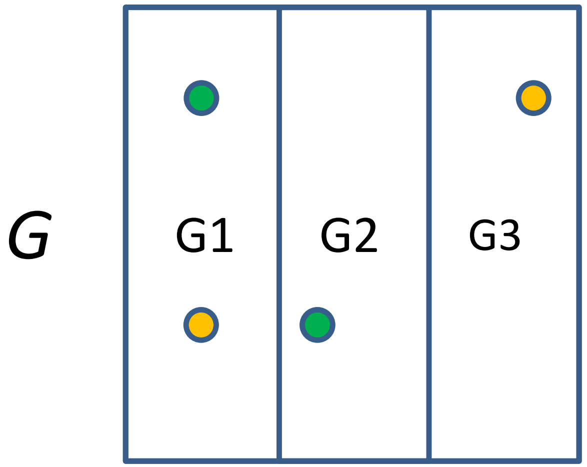
Геометрическая вероятность события *A* определяется отношением: $p(A)=m(A)/m(G)$, где $m(G)$, $m(A)$ – геометрические меры (длины, площади или объемы) всего пространства элементарных исходов *G* и события *A* соответственно.

В 1D случае это длины *отрезков*, в двумерном Ω – площади *фигур*, в трехмерном – объемы *тел*, в Θ = Ω×Ω – 4D объемы *форм*.

$$\boxed{q(F) = \sum_{i=1,..,n} p_{Fi}^{\,2}}$$

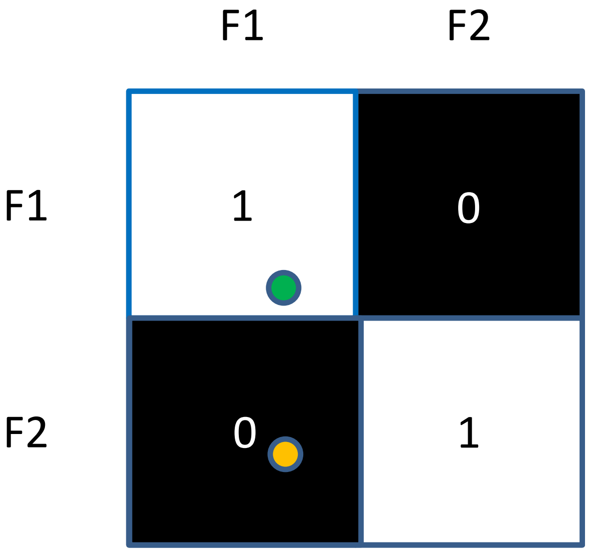
Простота как *внутренняя* геометрическая вероятность

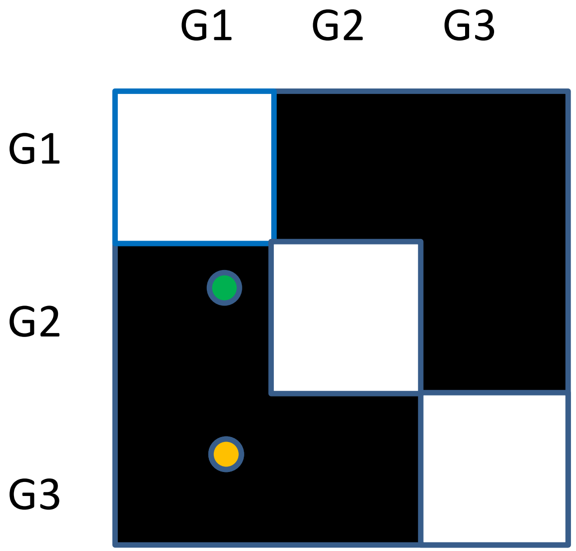




Мозаичная форма в Ω

Мозаичная форма в Ω×Ω



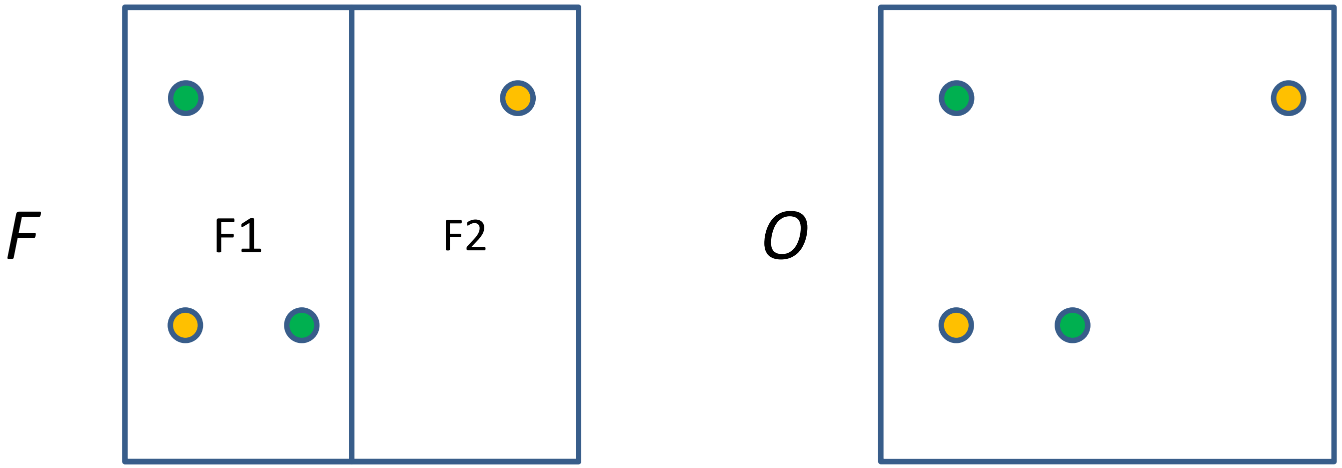


Простота формы – это геометрическая вероятность для случайной пары точек попасть в одну область данного разбиения. *Совместная простота* двух форм – это вероятность случайной пары точек попасть в одну область разбиения в обеих формах одновременно и так далее.

Важно: Простота - это *морфологическая* или *внутренняя геометрическая вероятность*, связанная с морфологией (внутренней геометрией) данной конкретной формы, а не со статистическим ансамблем форм или классом изображений данной формы.

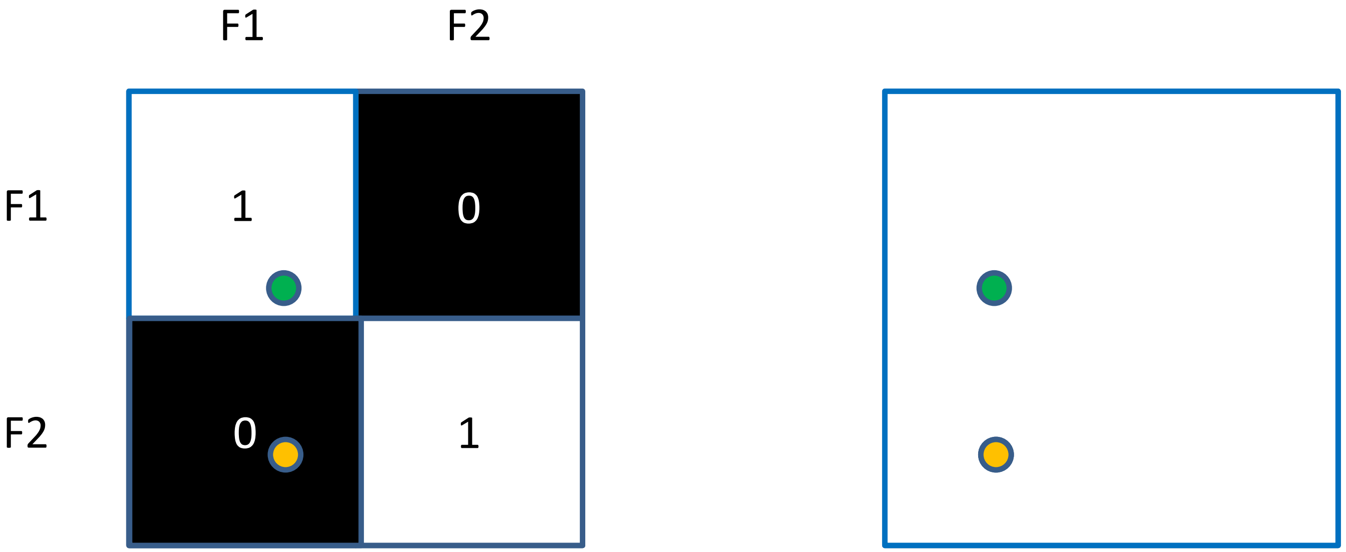
$$\boxed{q(F) = \sum_{i=1,..,n} p_{Fi}^{2}}$$

Простота как *внутренняя* геометрическая вероятность



Мозаичная форма в Ω

Мозаичная форма в Ω×Ω



С внутренней статистической точки зрения, каждое изображение или его описание (форма) представляет собой не одно, а целую выборку наблюдений (относительно пар точек). Поэтому мы можем в теории простоты статистически анализировать отдельные наблюдения форм, а не их ансамбли.

Например, какова ***вероятность наблюдения*** простейшей формы *O*? В любом внешне-статистическом подходе – ***очень маленькая***, поскольку эта форма уникальна. Между тем, ***внутренняя геометрическая вероятность*** для случайной пары точек принадлежать одной области в *O* ***максимальна***, поэтому простота наблюдения *O* равна 1.

Теория простоты как основа морфологического анализа (известные инструменты)

Легко показать, что все инструменты морфологического анализа мозаичных форм можно заново ввести на основе теории простоты.

В частности, *морфологический коэффициент корреляции форм* (МККФ) имеет вид:

$$\boxed{K_M^2(G,F) = \sum_{i=1,..,n} p_i \sum_{j=1,..,m} q(G_j \mid F_i) = \sum_{i=1,..,n} \sum_{j=1,..,m} p_{ij}^2 / \mathrm{p}_i,}$$

где $q(G_j \mid F_i) = q(G_j \cap F_i) / q(F_i)$ – *условная простота* G_j относительно F_i. Иными словами, квадрат МККФ это *средняя по кадру локальная условная простота* G относительно F.

Теория простоты как основа морфологического анализа (новые инструменты)

Введем глобальные (по Θ) аналоги МККФ – *условную и апостериорную простоту* для гипотезы F и наблюдения G:

$$q(G \mid F) = q(G \cap F) \,/\, q(F) = \textstyle\sum_{i=1,..,n} \sum_{j=1,..,m} p_{ij}^2 \,/\, \sum_{k=1,..,n} p_k^2,$$

$$q(F \mid G) = q(F \cap G) \,/\, q(G) = \textstyle\sum_{i=1,..,n} \sum_{j=1,..,m} p_{ij}^2 \,/\, \sum_{l=1,..,m} p_l^2,$$

которые связаны *формулой Байеса для простоты*:

$$q(F \mid G) = q(G \mid F)\, q(F) \,/\, q(G).$$

Таким образом, в данной работе:

- предложена теория простоты для мозаичных форм,
- дана интерпретация МККФ как средней локальной оценки условной простоты,
- предложено сравнение форм на основе условных и апостериорных оценок простоты.

Почему простота хуже воровства? (что не так с теорией простоты)

1) Операция $\cap = \wedge$, но операция $\cup \neq \vee$. Геометрический смысл объединения форм, вообще говоря, неясен.

2) Форма $\varnothing$ не является разбиением кадра, поскольку в $\varnothing$ есть *несуществующие пикселы* ($\eta_F(x,y,x,y)=0$). Значит, решетка $(\Theta,\cap,\cup)$ с границами $(O,\varnothing)$ соответствует множеству *локализованных форм*, где операция $\cap$ замкнута.

3) Операция $\cup$ незамкнута на множестве мозаичных форм, для которых:

$$\eta_F(x,y,u,v) = \sum_{i=1,..,n} \chi_{Fi}(x,y)\,\chi_{Fi}(u,v),$$

ведь в общем случае объединение форм $F\cup G$:

$$\eta_{F\cup G}(x,y,u,v) = \max\left(\sum_{i=1,..,n} \chi_{Fi}(x,y)\,\chi_{Fi}(u,v), \sum_{j=1,..,m} \chi_{Gj}(x,y)\,\chi_{Gj}(u,v)\right)$$

нельзя представить в таком «блочно-диагональном» виде.

Таким образом, замыкание множества (локализованных) мозаичных форм относительно операций $(\cap,\cup)$ не совпадает с известными классами форм.

Почему простота хуже воровства? (что не так с теорией простоты)

Аналогия с пересечением и объединением событий в теории вероятностей. Пересечение событий (И) означает «наблюдаются одновременно оба события», и такое «И-составное» событие *действительно является событием*, так как его можно наблюдать. Объединение событий (ИЛИ) означает «наблюдается хотя бы одно из двух событий», и такое «ИЛИ-составное» событие, вообще говоря, *является фиктивным событием*, так как его нельзя непосредственно наблюдать. Можно наблюдать *либо* событие А, *либо* В, *либо* событие (А И В).

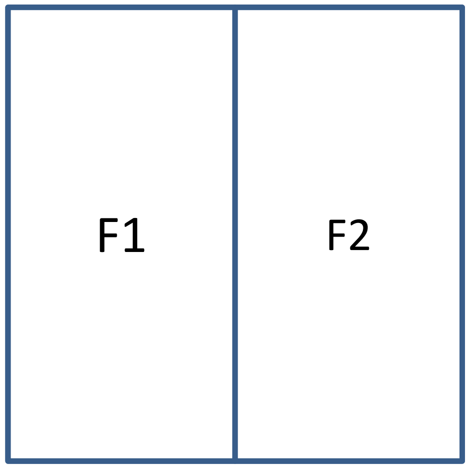
Пересечение мозаичных форм также является мозаичной формой, которую можно графически изобразить на плоскости (то есть «наблюдать» как событие в мире форм). *Результат объединения форм не всегда является мозаичной формой*, и потому можно по аналогии с «ИЛИ-событием» интерпретировать его как *фиктивную форму*, которую нельзя «наблюдать» (нарисовать).

Такая «фиктивная» интерпретация оставляет слишком много вопросов в теории простоты без ответов. Возможно ли построить для этих «фиктивных форм» столь же полную и хорошо геометрически интерпретируемую морфологическую систему со всеми перечисленными разнообразными атрибутами, как и для мозаичных форм? Возможно! ***Содержательная геометрическая интерпретация дана в следующей работе.***

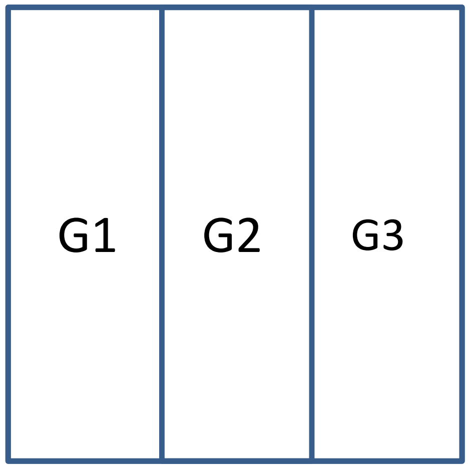
Теория простоты
и мозаичные покрытия

Операции над формами в Ω×Ω (объединение)

F



G

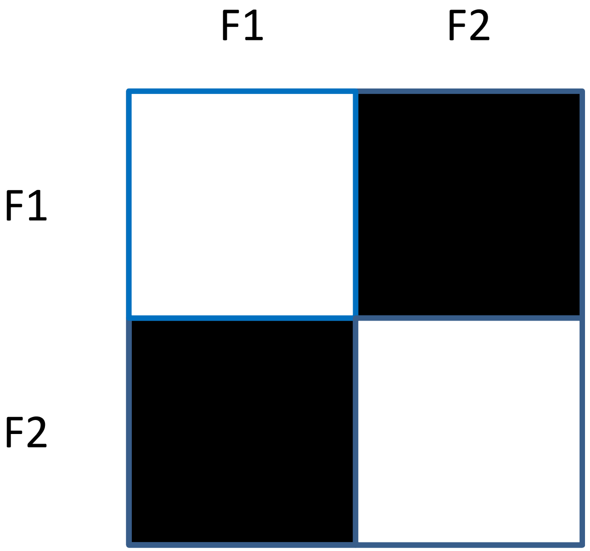


Геометрический смысл объединения форм, вообще говоря, ***пока неясен***: объединение форм ($F\cup G$): $\eta_{F\cup G}(x,y,u,v)$ нельзя представить в «блочно-диагональном» виде.

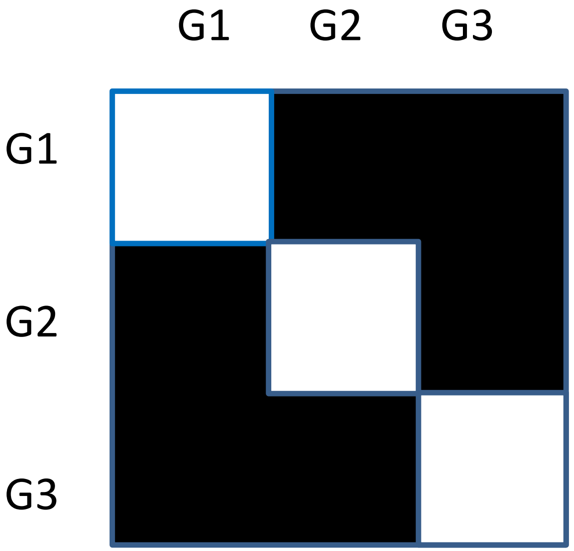
Это не мозаичная форма!

Мозаичная форма в Ω

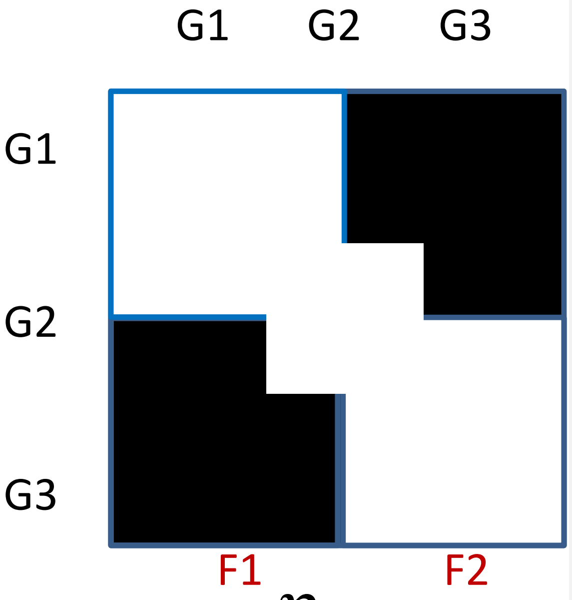
Мозаичная форма в Ω×Ω



η_F



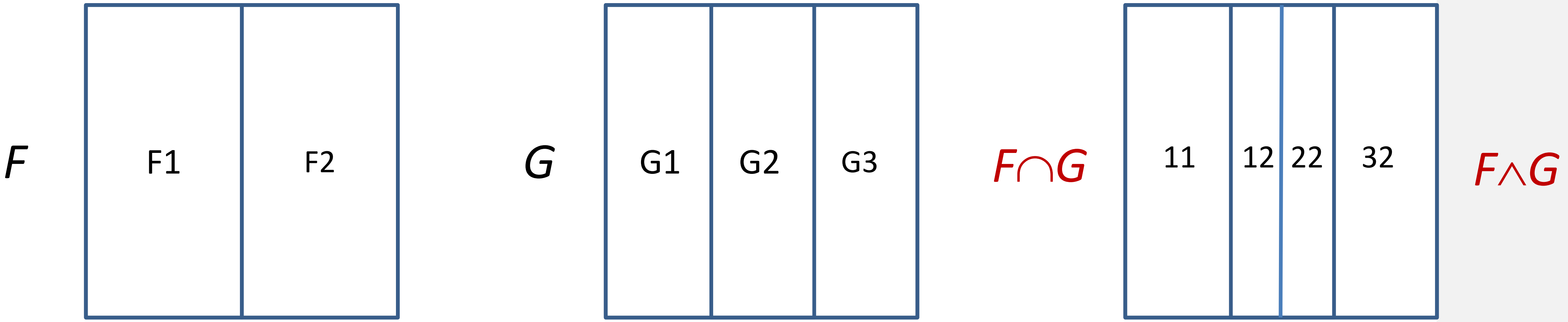
η_G



$\eta_{F\cup G}$

Такую форму нельзя разбить на квадраты

Меняем интерпретацию: не отношение сходства, а *отношение покрытия*



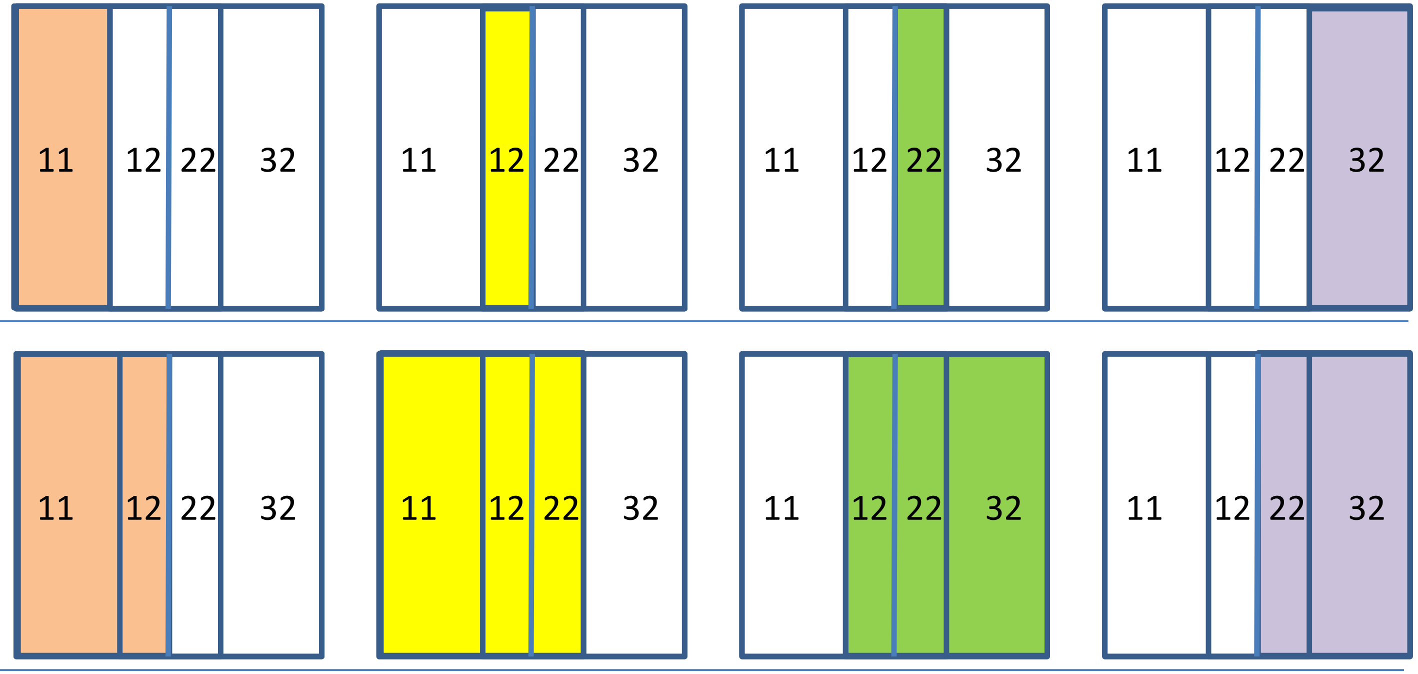
Обобщенная форма в Ω

База топологии $F \cup G$

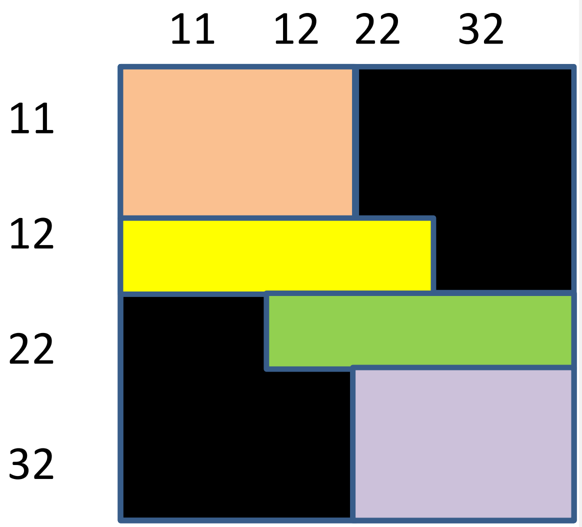
Это не области, а *пары областей*:

Носитель

Покрытие



Обобщенная форма в Ω×Ω

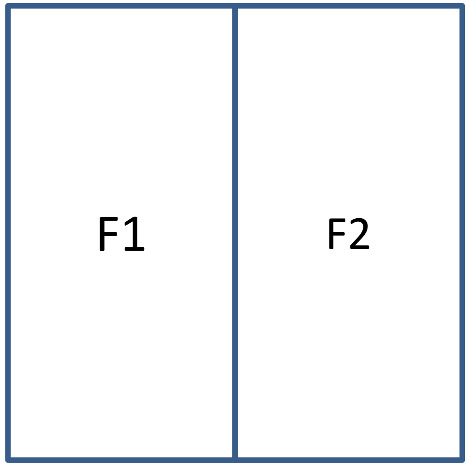


Такую форму нельзя разбить на квадраты Но можно на прямо-угольники

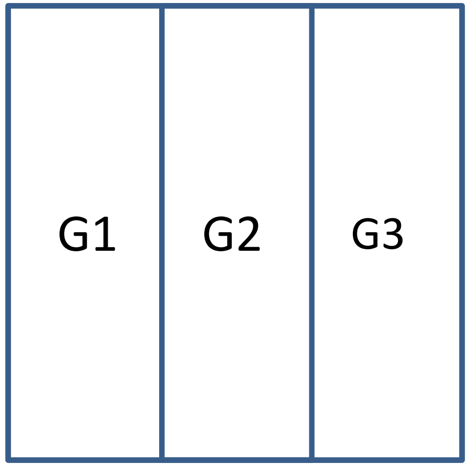
$\eta_{F \cup G}$

Меняем интерпретацию: не отношение сходства, а *отношение покрытия*

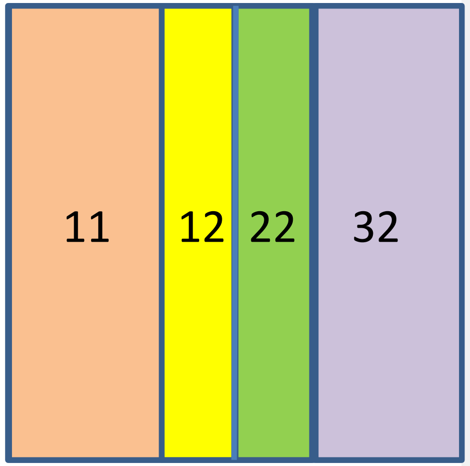
F



G



$F \cap G$



$F \wedge G$

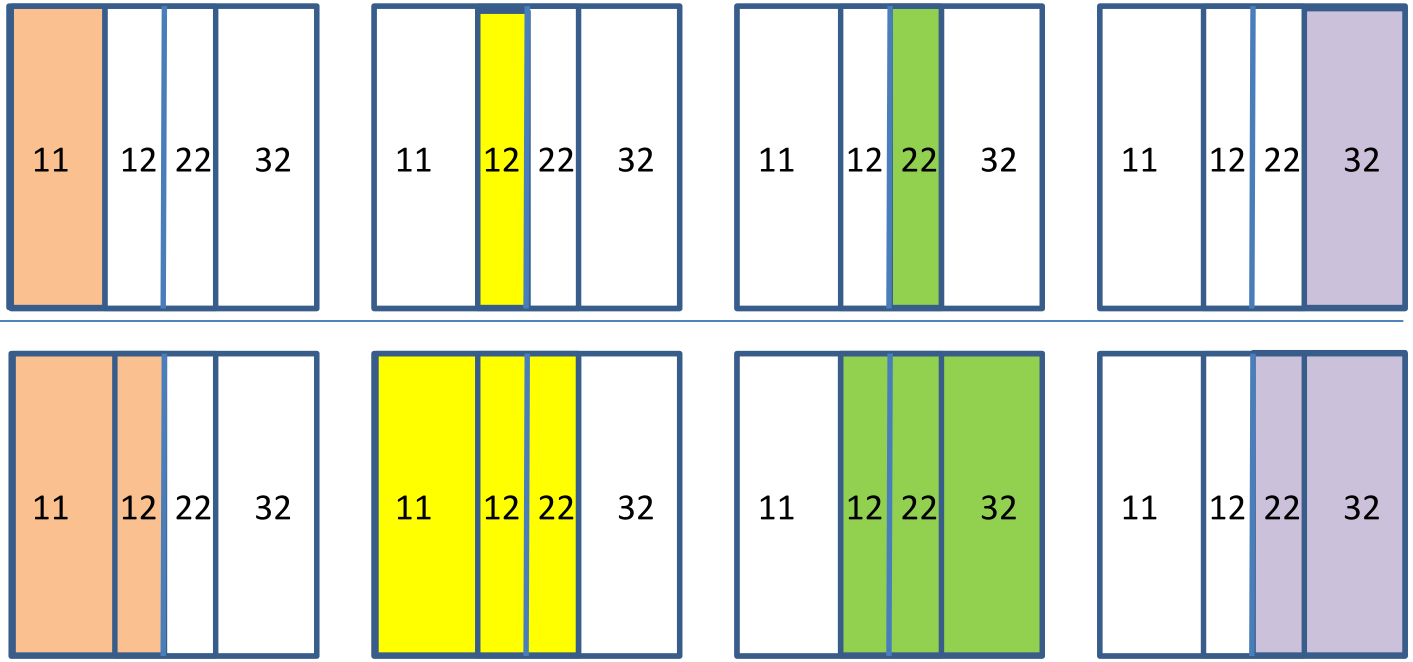
Обобщенная форма в Ω

Разбиение-носитель

Это не области, а *пары областей*:

Носитель

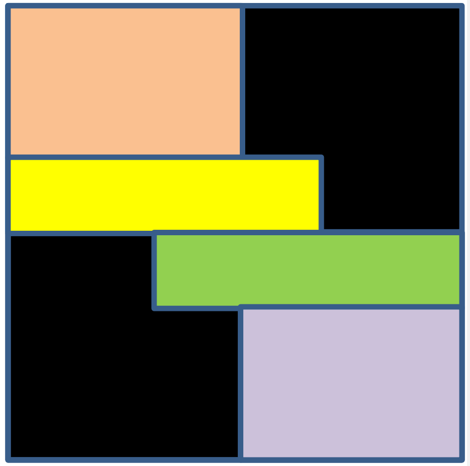
Покрытие



Обобщенная форма в Ω×Ω

11 12 22 32

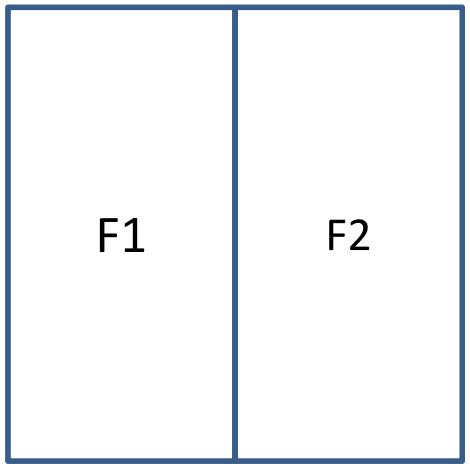
11
12
22
32

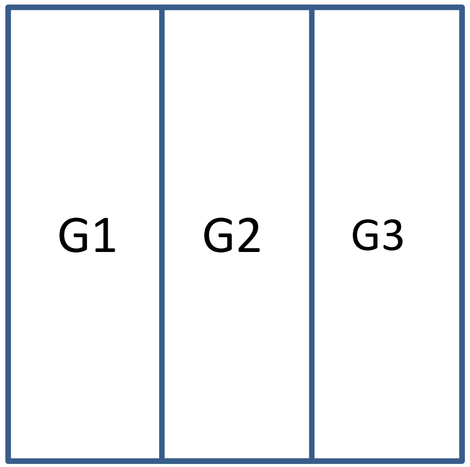


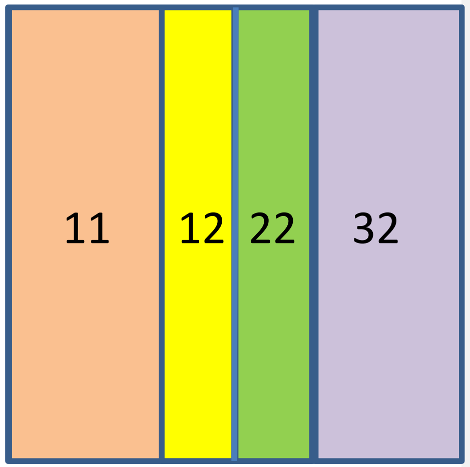
Такую форму нельзя разбить на квадраты Но можно на прямо-угольники

$\eta_{F \cup G}$

Меняем интерпретацию: не отношение сходства, а *отношение покрытия*

F


G


$F \cap G$


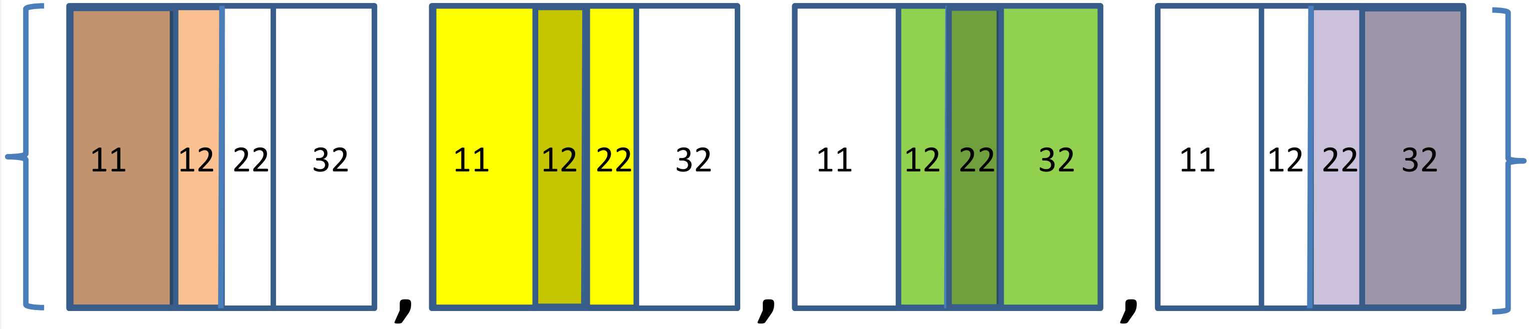
$F \wedge G$

Обобщенная форма в Ω

Разбиение-носитель

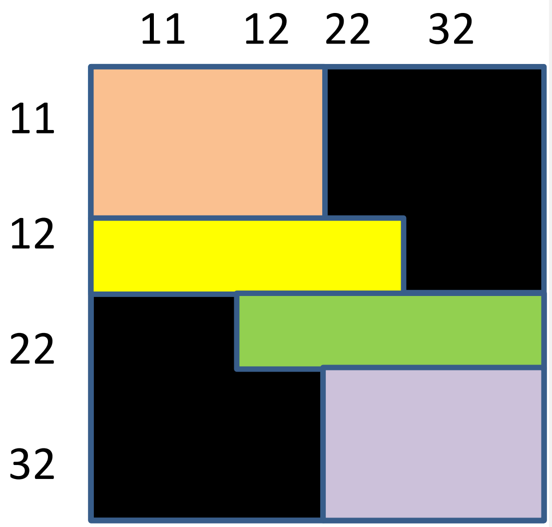
Это не области, а *пары областей*:

Мозаичным покрытием **Φ** кадра Ω назовем пару *разбиение-покрытие*, или (эквивалентно) множество пар областей кадра вида: $\mathbf{\Phi} = \langle F,\Phi\rangle = \{\langle F_1,\Phi_1\rangle,\ldots,\langle F_n,\Phi_n\rangle\}$



Поскольку носитель области всегда принадлежит покрытию, можно рисовать экономнее, обозначая носитель как затемненную часть покрытия

Обобщенная форма в Ω×Ω



$\eta_{F \cup G}$

Такую форму нельзя разбить на квадраты Но можно на прямоугольники

Мозаичные покрытия (определения)

Мозаичным покрытием **Ф** кадра Ω площади S назовем пару *разбиение-покрытие*, или (эквивалентно) множество пар областей кадра вида:

$$\mathbf{Ф} = \langle F,\Phi\rangle = \{\langle F_1,\Phi_1\rangle,\ldots,\langle F_n,\Phi_n\rangle\}, \tag{1}$$

таких, что:

$F_1 \cup\ldots\cup F_n = \Omega$; $F_i \cap F_k = \varnothing$; F – полное разбиение кадра

$(\Phi_i = \varnothing)$ *или* $(\Phi_i \supseteq F_i)$; $(F_i \not\subset \Phi_k) \Rightarrow (F_i \cap \Phi_k = \varnothing)$; F – база топологии для Φ

$(F_i \subseteq \Phi_k) \Leftrightarrow (F_k \subseteq \Phi_i)$, $i=1,..,n$; $k=1,..,n$; Φ – симметричное покрытие F

где n – число пар ⟨*носитель, покрытие*⟩;

$F=\{F_1,\ldots,F_n\}$ – набор *носителей,* составляющих *базовое разбиение* Ω;

$\Phi=\{\Phi_1,\ldots,\Phi_n\}$ – набор *покрытий,* составляющих *покрытие* Ω.

*В частном случае при $F = \Phi$, **Ф** – полное мозаичное разбиение кадра (классическая пытьевская форма).

Мозаичные покрытия (обозначения)

Для пары покрытий $\mathbf{\Phi} = \langle F, \Phi \rangle$ и $\mathbf{\Gamma} = \langle G, \Gamma \rangle = \{\langle G_1, \Gamma_1 \rangle, \ldots, \langle G_l, \Gamma_l \rangle\}$ введем следующие обозначения:

$\chi_{Fi}(x,y)$ – характеристическая функция F_i;

$\xi_{\Phi i}(x,y)$ – характеристическая функция Φ_i;

$p_i = S_{Fi} / S$ –доля площади F_i;

$z_i = S_{\Phi i} / S$ – доля площади Φ_i;

$p_j = S_{Gj} / S$ – доля площади G_j;

$z_j = S_{\Gamma j} / S$ – доля площади Γ_j;

p_{ij} – доля площади $F_i \cap G_j$;

z_{ij} – доля площади $\Phi_i \cap \Gamma_j$.

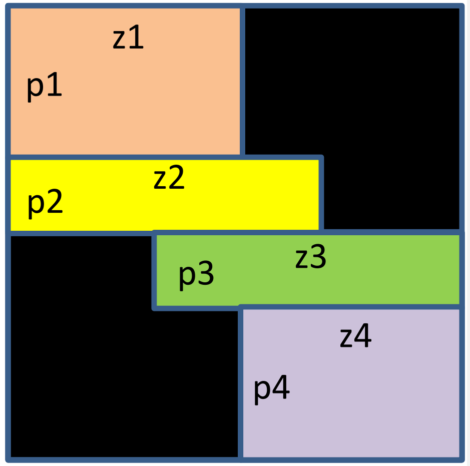
$q(\Phi) = \| \eta_\Phi \|_{L1}$

$q(\Phi) = \sum_{i=1,..,n} q(\Phi_i)$

$q(\Phi) = \sum_{i=1,..,n} p_i z_i$

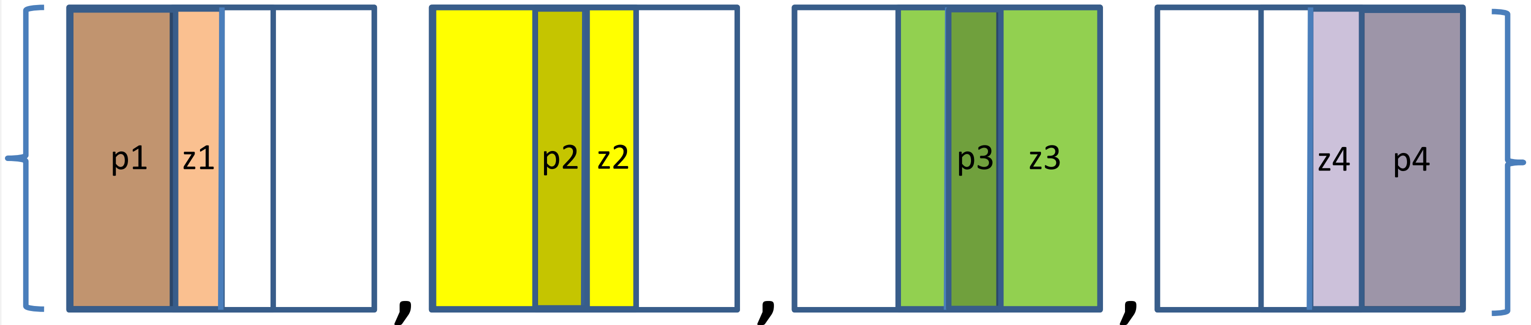
Простота формы – сумма простоты ее областей

Обобщенная форма в Ω×Ω



η_Φ

$\mathbf{\Phi} =$



Мозаичные покрытия (отношение покрытия, каноническая форма, операции)

Реляционная форма **Ф** описывается *отношением покрытия*:

$\eta_{\Phi}(x,y,u,v) = \{1$, если $\exists i$: $((x,y)\in F_i;)$ и $((u,v)\in \Phi_i)$;

0, в противном случае$\}$.

Мозаичные покрытия, имеющие различные базовые разбиения, но одинаковые реляционные формы, считаются эквивалентными.

Канонической формой покрытия **Ф** считается такая, в которой нет пустых носителей ($\varnothing$) и пар носитель-покрытие с совпадающими покрытиями.

Операцию *приведения базового разбиения к каноническому виду* будем обозначать (**Ф**)*.

Операция *пересечения* **Ф** и **Г** имеет вид:

$$\mathbf{\Phi} \cap \mathbf{\Gamma} = \mathbf{У} = \langle W, \mathbf{У} \rangle = (\{\langle W_{ij} = F_i \cap G_j,\ У_{ij} = \Phi_i \cap \Gamma_j \rangle\}_{j=1,..,l;\ i=1,..,n})^*.$$

Попарное пересечение носителей и покрытий

Операция *объединения* **Ф** и **Г** имеет вид:

$$\mathbf{\Phi} \cup \mathbf{\Gamma} = \mathbf{B} = \langle V, \mathbf{B} \rangle = (\{\langle V_{ij} = F_i \cap G_j,\ B_{ij} = \Phi_i \cup \Gamma_j \rangle\}_{j=1,..,l;\ i=1,..,n})^*.$$

Попарное пересечение носителей и попарное объединение покрытий

Мозаичные покрытия (замыкание множества мозаичных форм)

Можно доказать следующие *утверждения*:

- Множество (класс) полных мозаичных покрытий ($\Phi_i \neq \varnothing$, $i=1,..,n$) является $(\cap,\cup)$-замыканием множества полных мозаичных разбиений;
- Множество (класс) мозаичных покрытий является $(\cap,\cup)$-замыканием множества локализованных мозаичных разбиений.

Доказательство основано на том, что это подкласс моделей с симметричным отношением покрытия, где форма областей покрытия ограничена базой топологии множества их носителей, что вытекает из их происхождения как $(\cap,\cup)$-замыкания мозаичных разбиений.

Теперь можно описать *компаративную морфологию мозаичных покрытий*, вводя все те же инструменты и характеристики, какие вводились для морофлогии пытьевских форм, прослеживая при этом связь с ними, а также выражение инструментов и характеристик через *простоту*.

Морфология мозаичных покрытий

Реляционная модель формы.

$$\eta_{\Phi}(x,y,u,v) = \sum_{i=1,\dots,n} \chi_{Fi}(x,y)\ \xi_{\Phi i}(u,v). \qquad (2)$$

Отношение частичного порядка «не сложнее по форме».

$$\mathbf{\Phi} \geq \mathbf{\Gamma} \Leftrightarrow \eta_{\Phi}(x,y,u,v) \geq \eta_{\Gamma}(x,y,u,v) \Leftrightarrow \forall \mathbf{\Phi}_i,\mathbf{\Gamma}_j\text{: } F_i \cap G_j \neq \varnothing \Rightarrow \mathit{\Gamma}_j \subseteq \mathit{\Phi}_i. \qquad (3)$$

Полный порядок по простоте (сложности). Простота и сложность.

$$\mathit{\Phi} \leq_{\mu} \mathit{\Gamma} \Leftrightarrow \mathit{\Phi} \geq_{q} \mathit{\Gamma} \Leftrightarrow q(\mathit{\Phi}) \geq q(\mathit{\Gamma}),$$

$$q(\mathit{\Phi}) = \|\ \eta_{\Phi}\ \|_{L1} = \sum_{i=1,\dots,n} q(\mathit{\Phi}_i) = \sum_{i=1,\dots,n} p_i\, z_i. \qquad (4)$$

$$\mu_H(\mathit{\Phi}) = 1 - q(\mathit{\Phi}) = \sum_{i=1,\dots,n} p_i\,(1 - z_i). \qquad (5)$$

Метрическое пространство форм (пространство Хэмминга).

$$d_{H\Theta}(\mathit{\Phi},\mathit{\Gamma}) = \|\ \eta_{\Phi}(x,y,u,v) - \eta_{\Gamma}(x,y,u,v)\ \|_{L1} =$$

$d_{H\Omega}(A,B) = p(A) + p(B) - 2\,p(A \cap B)$ – расстояние Хэмминга для $A,B \subseteq \Omega$.

$$= \sum_{j=1,\dots,l} \sum_{i=1,\dots,n} p_{ij}\, d_{H\Omega}(\mathit{\Phi}_i, \mathit{\Gamma}_j) = \sum_{j=1,\dots,l} \sum_{i=1,\dots,n} p_{ij}\,(z_i + z_j - 2z_{ij}), \qquad (6)$$

Иными словами, пространство покрытий с ОГО-метрикой $d_{H\Theta}$ это {0,1}-*пространство Хэмминга*.

Морфология мозаичных покрытий

Метрика редактирования и метрика по простоте.

ОГО-метрика может также интерпретироваться как *метрика редактирования мозаичных форм*.

Для мозаичных покрытий (обобщенное определение) это **расстояние редактирования с 4 операциями** – *слияние, разбиение*, *добавление* и *удаление* областей. Слияние и добавление областей *упрощают* форму, а разбиение и удаление – *усложняют*.

Легко увидеть, что $d_{H\Theta}$ прямо связана с *простотой*:

$$q(\Phi) = \| \eta_{\Phi} \|_{L1} = d_{H\Theta}(\Phi, O), \quad (7)$$

$$\mu_H(\Phi) = 1 - q(\Phi) = 1 - d_{H\Theta}(\Phi, O) = d_{H\Theta}(\Phi, \varnothing). \quad (8)$$

$$d_{H\Theta}(\Phi, \Gamma) = d_{H\Theta}(\Phi, \Phi \cap \Gamma) + d_{H\Theta}(\Phi \cap \Gamma, \Gamma) =$$
$$= q(\Phi) + q(\Gamma) - 2\, q(\Phi \cap \Gamma) = q(\Phi \cup \Gamma) - q(\Phi \cap \Gamma). \quad (9)$$

Это позволяет называть $d_{H\Theta}$ также *метрикой по простоте.*

Для пытьевских форм это расстояние редактирования включает **только 2 операции** – *слияние* и *разбиение* областей.

Морфология мозаичных покрытий

Морфологическая корреляция форм.

Морфологический коэффициент корреляции форм (МККФ) для покрытий:

$$\boxed{K_M^2(\Gamma,\Phi) = \Sigma_{i=1,..,n}\, p_i\, \Sigma_{j=1,..,m}\, q(\Gamma_j \mid \Phi_i) = \Sigma_{i=1,..,n}\, \Sigma_{j=1,..,m}\, p_{ij}\, z_{ij} / z_i,} \qquad (10)$$

где $q(\Gamma_j \cap \Phi_i)$ – *совместная простота* $\mathbf{\Gamma}_j$ и $\mathbf{\Phi}_i$; $q(\Gamma_j \mid \Phi_i) = q(\Gamma_j \cap \Phi_i) / q(\Phi_i)$ – *условная простота* $\mathbf{\Gamma}_j$ относительно $\mathbf{\Phi}_i$. Иными словами, МККФ (4.11) это *средняя по площади разбиения условная простота* областей покрытия *Г* относительно областей покрытия *Ф*. Легко убедиться, что

$$\boxed{K_M^2(\Phi,O) = \Sigma_{i=1,..,n}\, p_i\, z_i = q(\Phi).} \qquad (11)$$

$$\boxed{K_M^2(G,F) = \Sigma_{i=1,..,n}\, p_i\, \Sigma_{j=1,..,m}\, q(G_j \mid F_i) = \Sigma_{i=1,..,n}\, \Sigma_{j=1,..,m}\, p_{ij}^{\,2} / p_i,}$$

В частном случае Ф=F выражение для ММКФ соответствует выражению для МККФ пытьевских форм.

Совместная, условная и апостериорная простота форм.

Исходя из теории простоты, введем **функциональные аналоги МККФ:**

- *условная простота* наблюдения *Г* относительно формы-гипотезы *Ф*:

$$q(\Gamma \mid \Phi) = q(\Gamma \cap \Phi) / q(\Phi) = \Sigma_{i=1,..,n}\, \Sigma_{j=1,..,m}\, p_{ij}\, z_{ij} / \Sigma_{k=1,..,n}\, p_k\, z_k, \qquad (12)$$

- *апостериорная простота* гипотезы *Ф* относительно наблюдения *Г*:

$$q(\Phi \mid \Gamma) = q(\Phi \cap \Gamma) / q(\Gamma) = \Sigma_{i=1,..,n}\, \Sigma_{j=1,..,m}\, p_{ij}\, z_{ij} / \Sigma_{l=1,..,m}\, p_l\, z_l. \qquad (13)$$

Гипотеза и наблюдение связаны *формулой Байеса для простоты*:

$$q(\Phi \mid \Gamma) = q(\Gamma \mid \Phi)\, q(\Phi) / q(\Gamma). \qquad (14)$$

Морфология мозаичных покрытий

Связь всех элементов морфологии и теории простоты.

Обобщенное тождество простоты для мозаичных покрытий связывает все инструменты морфологического анализа с *простотой*:

$$q(\Phi) = \| \eta_\Phi(x,y,u,v) \|_{L1} = \sum_{i=1,..,n} p_i z_i = d_H(\Phi,\varnothing) =$$
$$= 1 - d_H(\Phi,O) = K_M^2(\Phi,O) = q(\Phi|O). \qquad (15)$$

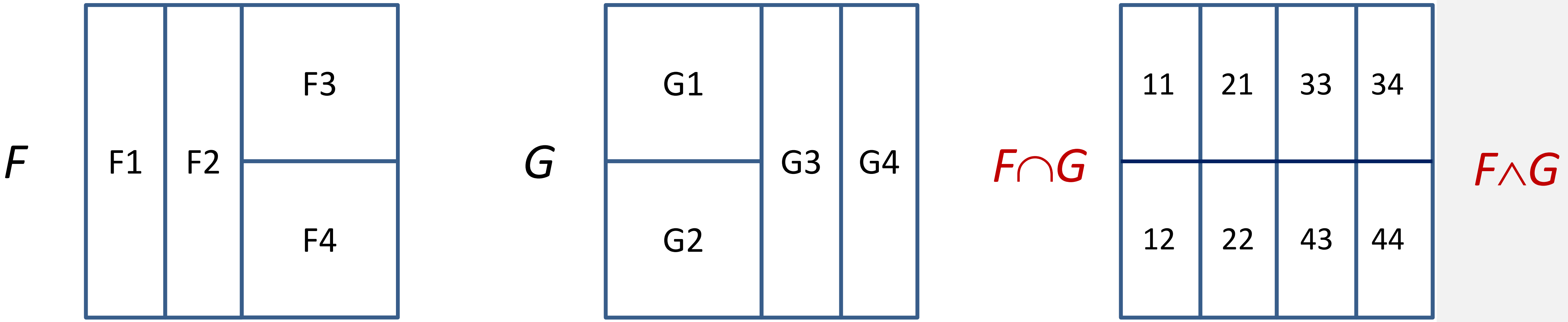
Связь решетки покрытий и решетки разбиений.

Пусть $[\Phi]$ - операция *замыкания по связности*: последовательно находит в **Ф** пары областей с пересекающимися покрытиями и заменяет покрытия в этих парах на их объединение до тех пор, пока не остается пар областей с пересекающимися покрытиями. Легко убедиться, что

$$F \vee G = ([F \cup G])^*, \qquad (16)$$

то есть, *$F \vee G$ есть результат замыкания по связности $F \cup G$.*

Замыкание по связности объединения мозаичных форм

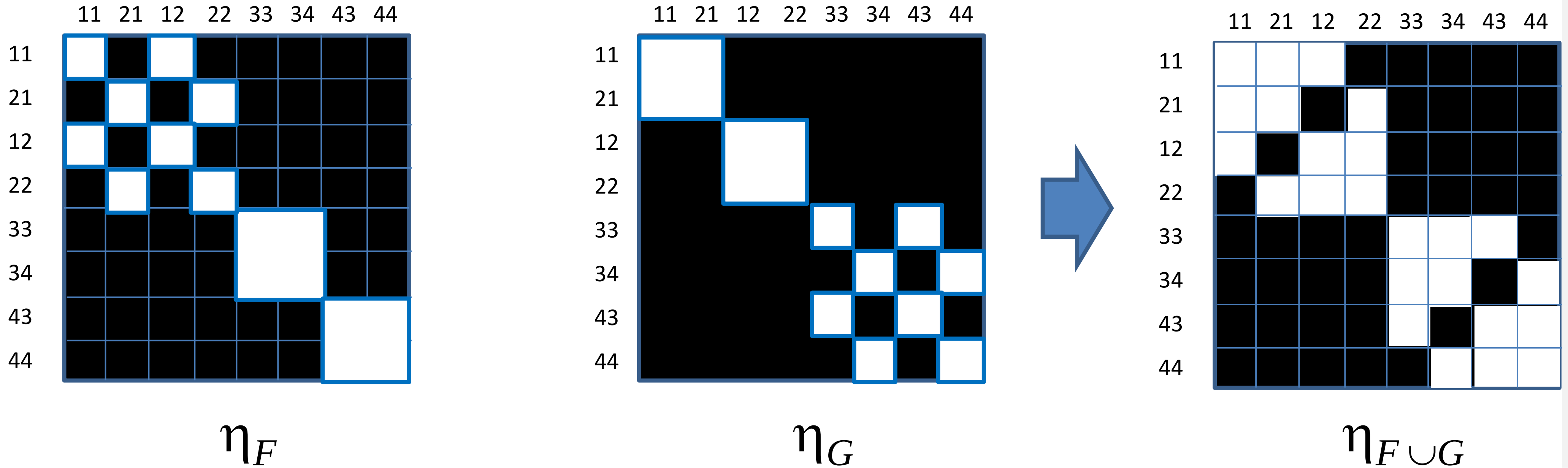


Мозаичная форма в Ω

База топологии $F \cup G$

Мозаичная форма в Ω×Ω

Объединение

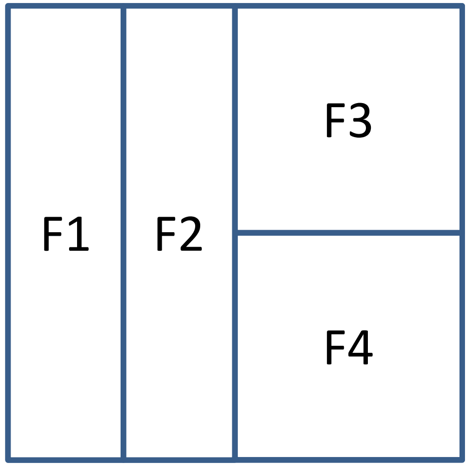


Такую форму нельзя разбить на квадраты

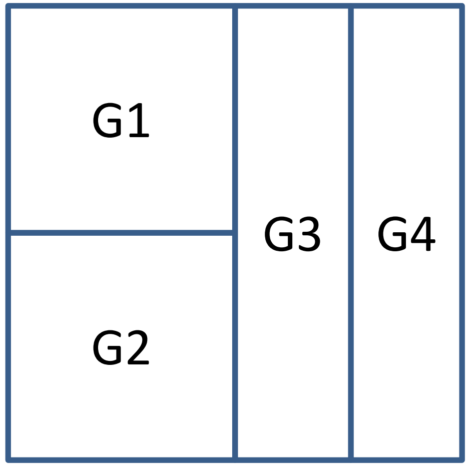
Это не мозаичная форма

Замыкание по связности объединения мозаичных форм

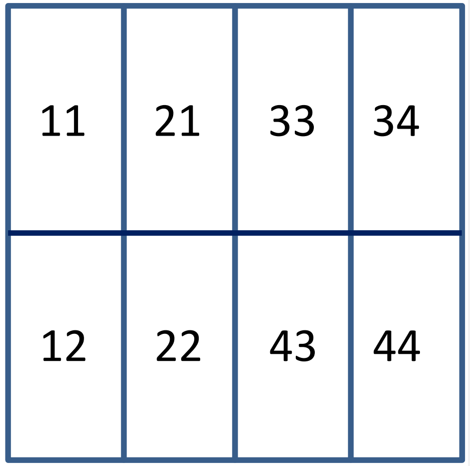
F



G



F∩G



F∧G

Мозаичная форма в Ω

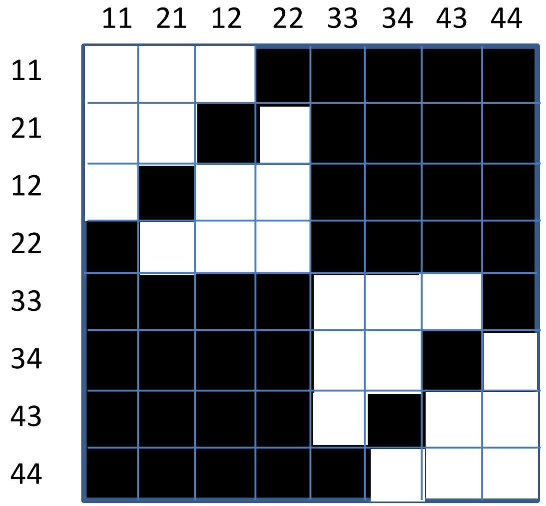
База топологии $F \cup G$

Мозаичная форма в Ω×Ω

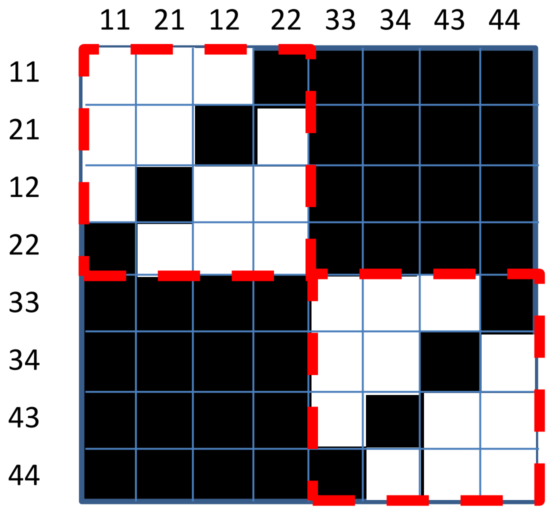
Однако легко найти ближайшую более простую диагонально-квадратичную форму, включающую данную

Такую форму нельзя разбить на квадраты

Это не мозаичная форма



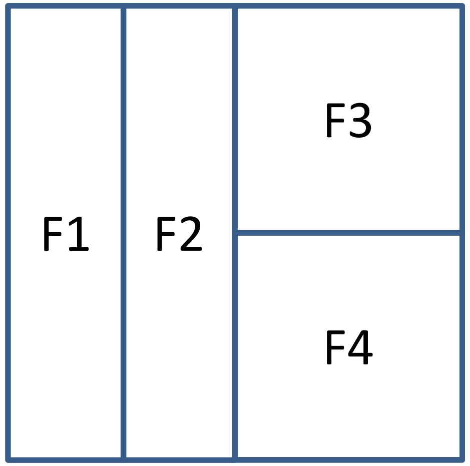
$\eta_{F \cup G}$



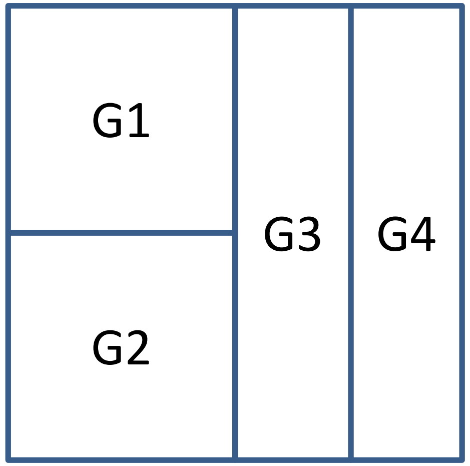
Это и будет замыкание по связности!

Замыкание по связности объединения мозаичных форм

F

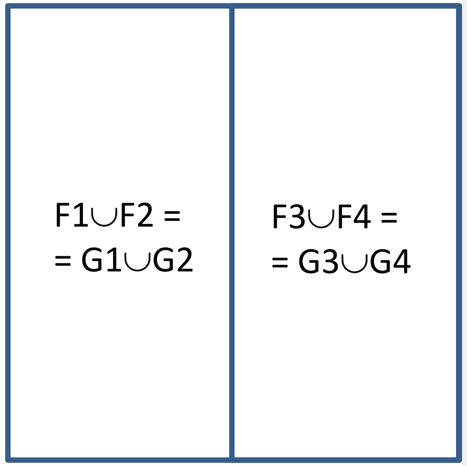


G



F∨G

Слияние областей



([*F*∪*G*])*

Мозаичная форма в Ω

F∨G есть результат замыкания по связности F∪G

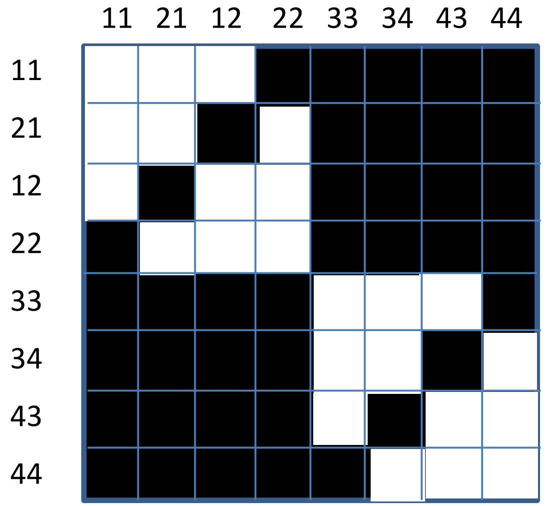
Это ясная связь между двумя типами известных решеток (частичных порядков) форм по сложности (простоте).

Точнее, это ***один тип решетки по простоте****: с условием мозаичности формы и без него.*

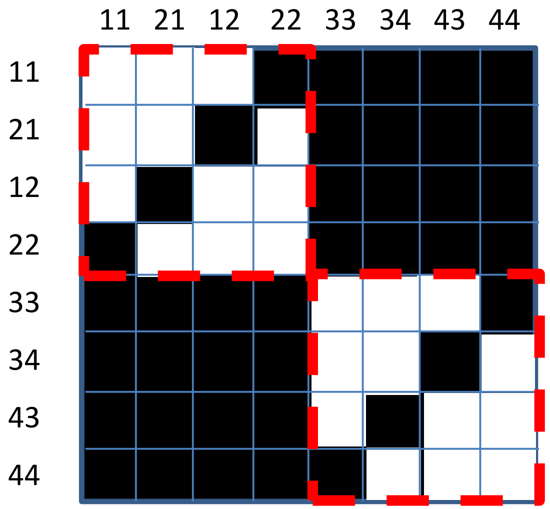
Мозаичная форма в Ω×Ω

Однако легко найти ближайшую более простую диагонально-квадратичную форму, включающую данную

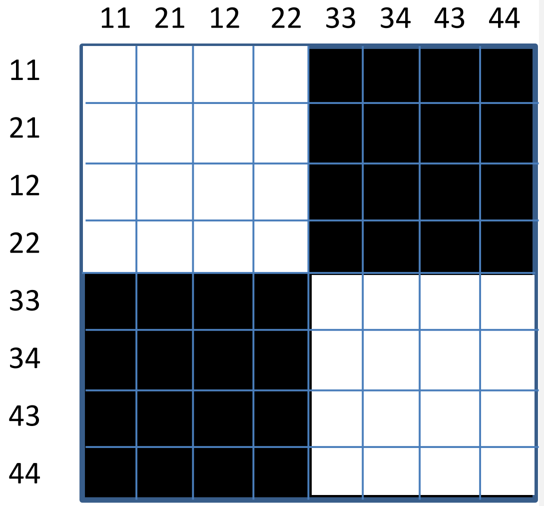
Такую форму нельзя разбить на квадраты ***Это не мозаичная форма***



$\eta_{F \cup G}$



Это и будет замыкание по связности!



$\eta_{([F \cup G])^*}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ (ЧТО СДЕЛАНО)

1. В данной работе предложены:

- *теория простоты* для мозаичных форм, представляющая собой полный аналог теории вероятности для событий;
- *морфология обобщенных мозаичных форм* (мозаичных покрытий), согласованная с простотой как вероятностной мерой и включающая в качестве подкласса пытьевскую морфологию мозаичных разбиений.

2. Все ранее известные инструменты морфологического анализа форм последовательно определены заново в терминах *простоты*.

3. Дана интерпретация морфологической корреляции форм как *средней (по площади кадра) условной простоты* областей разбиения.

4. Предложено сравнение форм на основе *условных и апостериорных оценок простоты*.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ (ПЕРСПЕКТИВЫ)

В дальнейшем (в будущих публикациях) предполагается:

• Ввести *морфологии изображений (диффузную и проективную)* на основе мозаичных покрытий со всеми ранее известными инструментами сравнения форм и по форме.

• Ввести *формализм точечных покрытий*, который позволяет распространить теорию простоты и инструменты морфологического анализа на *широкий класс морфологий*, в том числе непрерывных и нечетких: морфологии Серра, структурные модели с направленными отношениями, тензорные модели отношений, нечеткие формы, смешанные мозаично-фигурные модели и т.д.

• Ввести *нечеткие модели сходства и классы форм* для описания несегментированных данных (изображений), позволяющие непосредственно оценивать их собственную

$L^2 \rightarrow L^1$ простоту и совместную простоту с формами, за счет чего морфологическая корреляция изображений и форм может быть определена и вычислена без обращения к понятиям «оператора» и «проекции», исключительно инструментами теории простоты.

• Развить на основе теории простоты как аналога теории вероятности соответствующие инструменты анализа сегментированных и несегментированных данных – *морфологическую статистику* (теорию оценивания гипотез и параметров по простоте) и *теорию структурной информативности* (аналог теории информации).

• Расширить область практических приложений теории простоты, рассмотрев, помимо сегментации изображений, другие примеры работы с разбиениями: сегментацию сигналов, текста, данных других модальностей; разбиение пространства признаков классификаторами; структурный анализ на графах и т.д.

Теория простоты
и мозаичные покрытия

Ю.В. Визильтер, *ФГУП «ГосНИИАС»,*
viz@gosniias.ru

Спасибо за внимание!

Визильтер Ю.В., Желтов С.Ю., Бусурин В.И. Современный морфологический анализ и его применение в авиационных системах технического зрения. – М.: Изд-во МАИ, 2020. *Это свод наших результатов примерно до 2018 г. Если кому вдруг интересно, здесь есть несколько экземпляров, могу подарить!*

Москва, ММРО-2021, 7-10.12.2021