Динамическое ценообразование с помощью томсоновского сэмплирования

Александра Харь

Московский физико-технический институт
Факультет управлени и прикладной математики
Кафедра интеллектуальных систем

Научные руководители д.ф.-м.н. В. В. Стрижов, Ю.В. Дорн

Постановка задачи динамического ценообразования

Дано:

- $\mathcal{B}$ – множество товаров, $|\mathcal{B}| = n$,
- Период времени T – горизонт планирования,
- $\{\mathcal{J}_t\}_{t=1}^{T}$ – история заказов, где $\mathcal{J}_t = \{(d_{i,t}, p_{i,t})\}_{i\in\mathcal{B}}$, $d_{i,t}$ – количество товара i, купленное в период времени t по цене $p_{i,t}$.

Фактический *агрегированный* спрос $d_{i,t}$ при цене $p_{i,t}$ является i-й компонентой реализации случайной функции *агрегированного* спроса $\mathcal{D}_t(p_{1,t}, \dots, p_{n,t})$, которая неизвестна.

Задача: Построить алгоритм ценообразования, максимизирующий ожидаемый доход за период времени T.

Замечание: После каждой установки цен наблюдается фактический спрос (покупки). Эти наблюдения алгоритм может использовать во время работы.

Постановка задачи динамического ценообразования

Заданы:

- $\boldsymbol{p}_t = (p_{1,t}, \ldots, p_{n,t})$ – вектор цен,
- $\mathrm{R}_t(\boldsymbol{p}_t) = \sum\limits_{i \in \mathcal{B}} \mathcal{D}_{i,t}(\boldsymbol{p}_t) \cdot p_{i,t}$ – случайная функция дохода при ценах $\boldsymbol{p}_t$,
- $\boldsymbol{p}^* = \underset{\boldsymbol{p}}{\operatorname{argmax}} \sum\limits_{t=1}^{T} \mathrm{ER}_t(\boldsymbol{p})$ – оптимальные постоянные цены при известной функции агрегированного спроса $\mathcal{D}(\boldsymbol{p}_t)$.

Задача: Построить алгоритм подбора цен $\boldsymbol{p}_t$, максимизирующий выражение:

$$\sum_{t=1}^{T} \mathrm{ER}_t(\boldsymbol{p}_t)$$

при условии, что функция $\mathcal{D}(\boldsymbol{p}_t)$ изначально неизвестна.

Модель функции спроса

Предлагается на каждом этапе работы алгоритма строить *модель* функции спроса.

Функция спроса на время t для товара i задается уравнением:

$$\mathrm{d}_{i,t}(\mathrm{p}_{i,t}) = \mathrm{f}_{i,t}\left(\frac{\mathrm{p}_{i,t}}{\mathrm{p}_{i,t-1}}\right)^{\gamma_i^*},$$

где $\mathrm{f}_{i,t}$ - прогноз спроса для товара i в момент времени t если цена на него $\mathrm{p}_{i,t-1}$, $\gamma_i^* < 0$ – эластичность товара i.
При значениях $\mathrm{p}_{i,t}$ близких к $\mathrm{p}_{i,t-1}$ производится следующая аппроксимация:

$$\mathrm{d}_{i,t}(\mathrm{p}_{i,t}) \approx \mathrm{f}_{i,t} + (\mathrm{p}_{i,t} - \mathrm{p}_{i,t-1})\frac{\mathrm{f}_{i,t}\gamma_i^*}{\mathrm{p}_{i,t-1}}.$$

Доход от товара i из множества $\mathcal{B}$ оценивается следующим образом:

$$\mathsf{Rev}_{i,t}(\mathsf{p}_{i,t}) = \mathsf{p}_{i,t} \times \mathsf{d}_{i,t}(\mathsf{p}_{i,t}) \approx \frac{\mathsf{p}_{i,t}^2 \mathsf{f}_{i,t} \gamma_i^*}{\mathsf{p}_{i,t-1}} - \mathsf{p}_{i,t} \mathsf{f}_{i,t} \gamma_i^* + \mathsf{p}_{i,t} \mathsf{f}_{i,t}.$$

Оптимизируем, используя оценку на величины γ_i^*, $\mathsf{f}_{i,t}$:

$$\boldsymbol{p}_t = \operatorname*{argmax}_{\boldsymbol{p}} \sum_{i \in \mathcal{B}} \frac{\mathsf{p}_i^2 \mathsf{f}_{i,t} \gamma_i^*}{\mathsf{p}_{i,t-1}} - \mathsf{p}_i \mathsf{f}_{i,t} \gamma_i^* + \mathsf{p}_i \mathsf{f}_{i,t}.$$

Аппроксимация функции спроса $\mathcal{D}(\boldsymbol{p}_t)$

Алгоритм на каждом шаге для подсчета функции $\mathrm{Rev}_{i,t}(\mathrm{p}_{i,t})$ оценивает параметры:

1. параметр эластичности i-го товара γ_i^*,
2. прогноз спроса $\mathrm{f}_{i,t}$ на этот товар в момент времени t при некой фиксированной цене.

Методы оценивания параметров:

- параметр эластичности — томпсоновским сэмплированием,
- прогноз спроса $f_{i,t}$ — моделью прогнозирования временных рядов ARIMA.

Оценка параметра эластичности

$$\Pi_0(\gamma) = \mathcal{N}(\gamma \mid \boldsymbol{\mu}_0, \Sigma_0)$$

$$\Pi_t(\gamma) = \frac{\Pi_{t-1}(\gamma)(R_t \mid Rev_t(\gamma), \sigma^2)}{\int \Pi_{t-1}(\boldsymbol{\xi})(R_t \mid Rev_t(\boldsymbol{\xi}), \sigma^2) d\boldsymbol{\xi}} = \mathcal{N}(\gamma \mid \boldsymbol{\mu}_t, \Sigma_t),$$

$$\boldsymbol{\mu}_t = \left(\Sigma_{t-1}^{-1} + \boldsymbol{M}_t^{-1}\right)^{-1}\left(\Sigma_{t-1}^{-1}\boldsymbol{\mu}_{t-1} + \frac{R_t - \bar{R}_t}{\sigma^2}\boldsymbol{\theta}_t\right),$$

$$\Sigma_t = \left(\Sigma_{t-1}^{-1} + \boldsymbol{M}_t^{-1}\right)^{-1},$$

$$\boldsymbol{M}_t^{-1} = \frac{\boldsymbol{\theta}_t \boldsymbol{\theta}_t^T}{\sigma^2} + \lambda \boldsymbol{I},\ \theta_{ti} = \frac{p_i^2 f_{i,t}}{p_{i,t-1}} - p_i f_{i,t},\ \bar{R}_t = \sum_{i \in \mathcal{B}} p_i f_{i,t}.$$

Теорема (Харь, 2021):

Пусть γ^* – истинный вектор эластичностей.
Тогда $||\mathsf{E}(\gamma^* - \boldsymbol{\mu}_t)|| \to 0,\ ||\Sigma_t|| \to 0$ при $t \to +\infty$.

Алгоритм Max-Rev-TS

input: Множество товаров $\mathcal{B}$, период времени T.
Инициализируется априорное $\Pi_0(\gamma) = \mathcal{N}(\gamma \mid \boldsymbol{\mu}_0, \Sigma_0)$.

For $t = 1, \ldots, T$

- Сэмплируем γ_t из Π_{t-1} до тех пор, пока $\gamma_t < 0$,
- Используя прогноз спроса, получаем $f_{i,t}$ $\forall i \in \mathcal{B}$,
- Решаем оптимизационную задачу:

$$\boldsymbol{p}_t = \operatorname*{argmax}_{\boldsymbol{p}} \sum_{i \in \mathcal{B}} \frac{\mathrm{p}_i^2 \mathrm{f}_{i,t} \gamma_{i,t}}{\mathrm{p}_{i,t-1}} - \mathrm{p}_i \mathrm{f}_{i,t} \gamma_{i,t} + \mathrm{p}_i \mathrm{f}_{i,t}, \text{ получаем } \boldsymbol{p}_t,$$

- Применяем цену $\boldsymbol{p}_t$, получаем выигрыш $\mathrm{R}_t(\boldsymbol{p}_t)$,
- Изменяем распределение $\Pi_t(\gamma)$ по формуле байесовского обновления, используя полученное значение $\mathrm{R}_t(\boldsymbol{p}_t)$.

Эксперимент

Эксперимент проводился на синтетических данных (100 товаров и 1000 покупателей).

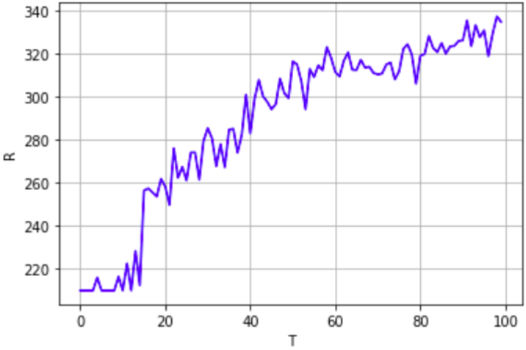

График зависимости дохода от времени.

Результаты

1. Предложен алгоритм динамического ценообразования, использующий томсоновское сэмплирование для оценки вектора эластичностей.
2. Доказана теорема о сходимости алгоритма.
3. Алгоритм протестирован на синтетических данных.