10-я Международная конференция
«Интеллектуализация обработки информации»

4-11 октября 2014г

Оценки, минимизирующие возможность потерь, и минимаксные оценки: сравнительный анализ

Чуличков А.И., Юань Б.

achulichkov@gmail.com

Физический факультет
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

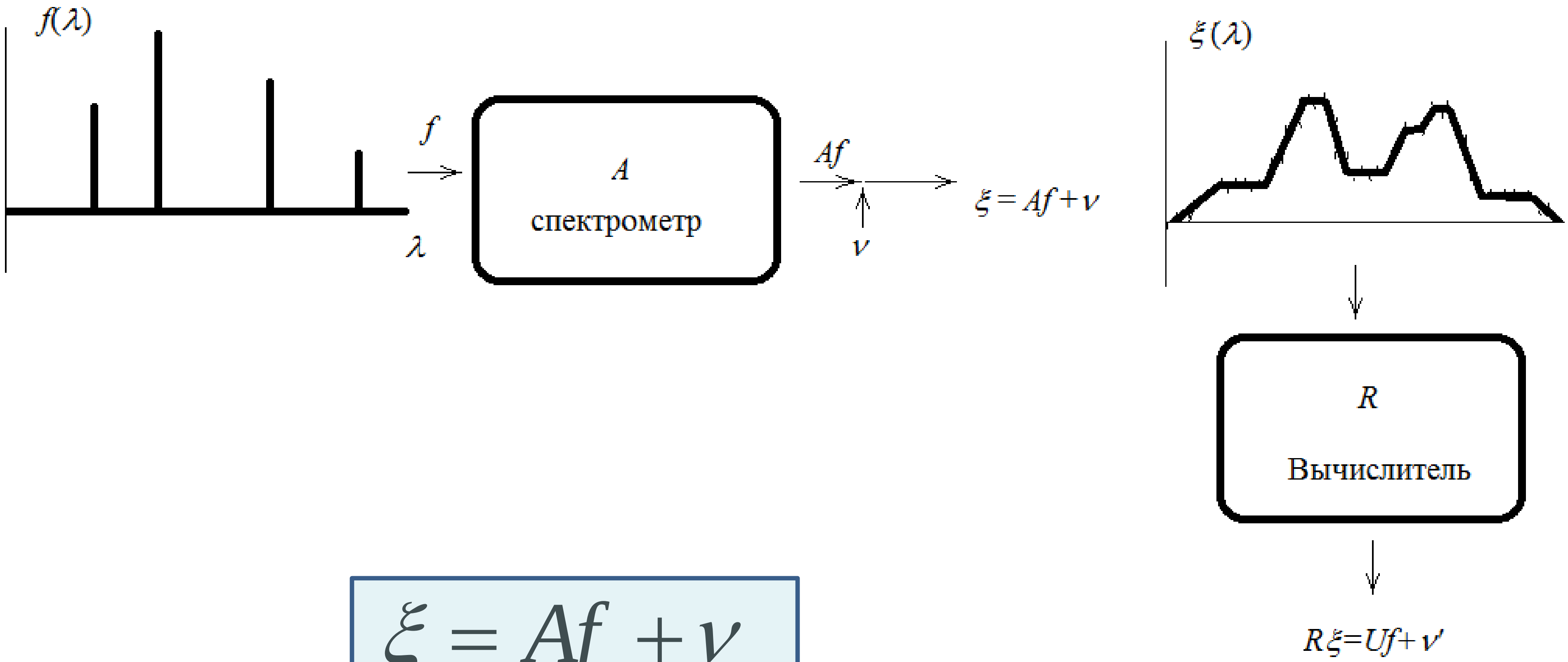
О задаче

- **Тема:** анализ и интерпретация экспериментальных данных
- **Подходы:** методы теории измерительно-вычислительных систем (Ю.П.Пытьев)
- **Схема измерений и интерпретации**

$$\xi = Af + \nu$$

$$u = Uf$$

Пример: спектрометрия



$$\xi = Af + \nu$$

$$u = Uf$$

Математическая модель измерения

Схема измерения: $\xi = Af + \nu$

$$\xi_i = \int_X a(x, x_i) f(x) dx + \nu_i, \quad i = 1, \ldots, n < \infty \quad (1.1)$$

где $a_i(\cdot) = a(\cdot, x_i)$, а $a(\cdot,\cdot): X \times X \to R^1$ — аппаратная функция измерительного прибора, на вход которого подан сигнал $f(\cdot)$,

ν_i - измерительная погрешность (шум)

По результату измерения $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ требуется восстановить функцию $f(\cdot)$.

Особенности подходов теории ИВС

МНК и регуляризация

$$\xi = Af + \nu$$

$$\hat{f}:\left\|\xi - Af\right\|^2 + \ldots \to \min_f$$

$$\hat{f} \to f \ \ if \quad \nu \to 0$$

Теория ИВС

$$\xi = Af + \nu$$

$$u = Uf$$

$$\tilde{f}:\left\|R(\xi) - Uf\right\| \to \min_f$$

Что можно и что нельзя оценить из результата измерений

$$\xi_i = \int_X a(x, x_i) f(x) dx + \nu_i = (a_i, f) + \nu_i, \quad i = 1, \dots, n < \infty,$$

$$f, a_1, \dots, a_n \in L^2(X)$$

$L \subset L^2(X)$ - линейная оболочка $a_1, \dots, a_n \in L^2(X)$

P - ортогональный проектор на L.

Проекция $(I-P)f$ элемента f на ортогональное дополнение $L^{\perp} \subset L^2(X)$ не контролируется измерениями (2) и при заданном результате $\xi_1, \dots, \xi_n$ может принимать любые значения.

Будем искать оценку проекции $Uf \overset{def}{=} Pf$ в виде

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^{n} a_j g_j$$

Модель измерения и интерпретации

$$\xi_i = (a_i, \sum_{j=1}^{n} a_j g_j) + \nu_i = \sum_{j=1}^{n} (a_i, a_j) g_j + \nu_i,$$

$$i = 1, \dots, n < \infty,$$

$$\xi_i = (\vec{b}_i, \vec{g}) + \nu_i, \quad \vec{b}, \vec{g} \in R^n, \quad \boxed{|\nu_i| \le \varepsilon_i,\ i = 1, \dots, n}$$

$$u = \sum_{j=1}^{n} a_k g_k \in L(X) \subset L^2(X)$$

Минимаксная оценка *u(x)*

$a_i(\cdot)$ - заданы как непрерывные функции,
тогда определено значение

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) g_k = (\vec{a}_x, \vec{g}), \vec{a}_x = (a(x_1, x), \ldots, a(x_n, x)) \in R^n, \vec{g} \in R^n$$

$$u_{\min}(x) = \min(\vec{a}_x, \vec{g})$$

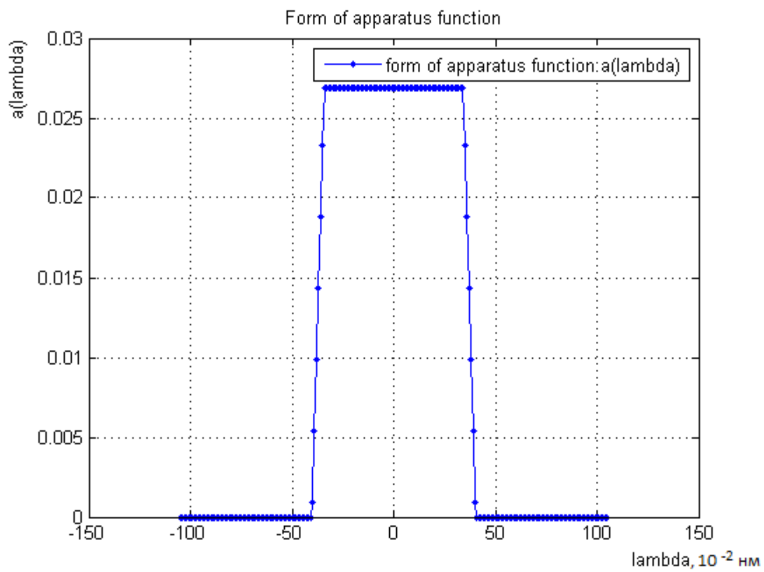
$$u_{\max}(x) = \max(\vec{a}_x, \vec{g})$$

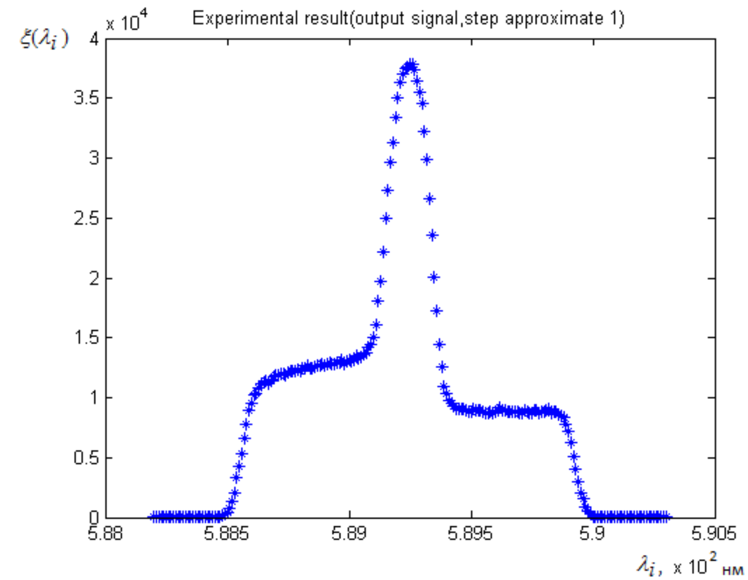
$$l(x) \le (\vec{a}_x, \vec{g}) \le r(x), \quad x \in (x_1, \ldots, x_m)$$

$$\left| \xi_i - (\vec{b}_i, \vec{g}) \right| \le \varepsilon_i, i = 1, \ldots, n.$$

$$\hat{u}(x) = \frac{u_{\max} + u_{\min}}{2}, h(x) = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{2}$$

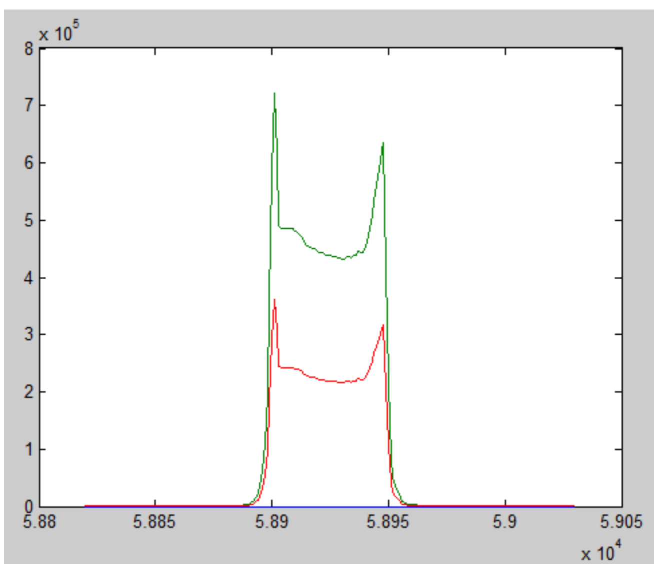
Результат оценивания спектра излучения дублета Na





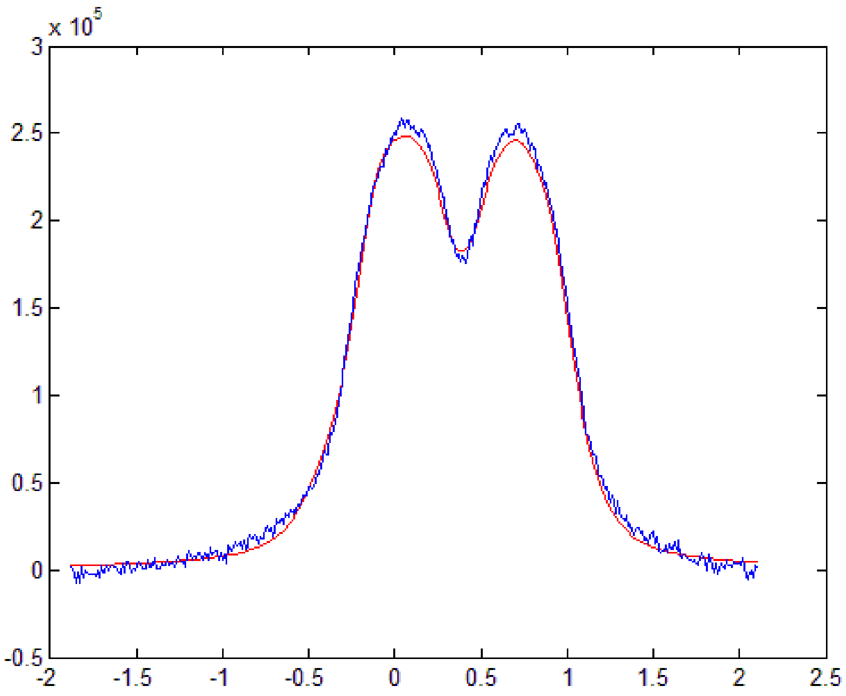
ξ(λ) – измеренный спектр

a(*x*) – аппаратная функция

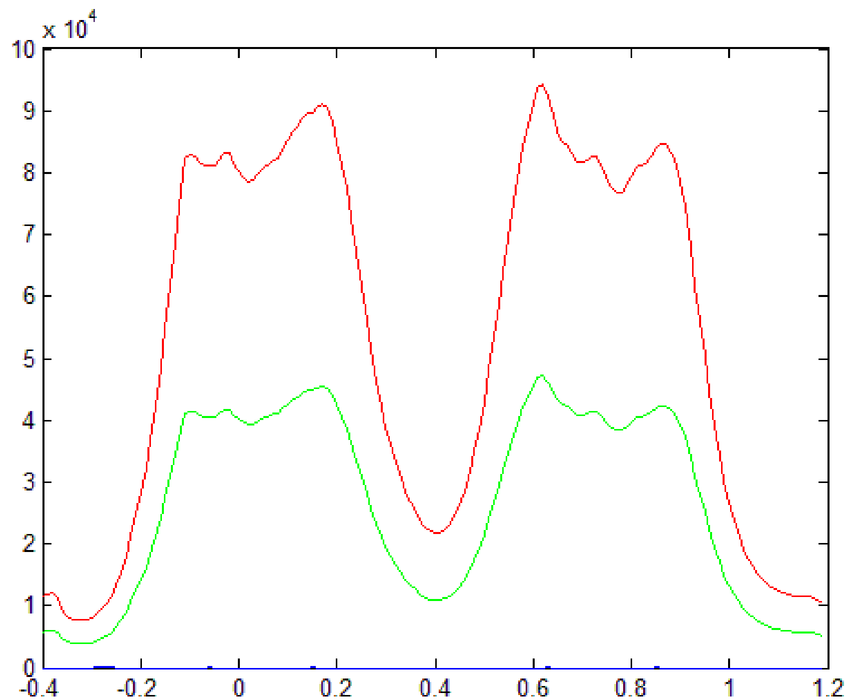


Минимаксная оценка: максимальное (красный), минимальное (синий) значения, и результат оценивания (зеленый цвет)

Результат оценивания спектра по данным мессбауэровского спектрометра



Результат измерения мессбауэровского спектра



Результат минимаксного оценивания: максимальное (красный), минимальное (синий) значения, и результат оценивания (зеленый цвет)

Минимаксная оценка *u(x)*

$$u_{\min}(x) = \min\left(\vec{a}_x, \vec{g}\right)$$

$$u_{\max}(x) = \max\left(\vec{a}_x, \vec{g}\right)$$

$$l(x) \le \left(\vec{a}_x, \vec{g}\right) \le r(x), \quad x \in (x_1, \ldots, x_m)$$

$$\left|\xi_i - (\vec{b}_i, \vec{g})\right| \le \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

$$\hat{u}(x) = \frac{u_{\max} + u_{\min}}{2}, h(x) = \frac{u_{\max} - u_{\min}}{2}$$

Минимаксные оценки минимизируют погрешность «в наихудшей ситуации»

Предложение:

Выбирать не наихудшую модель измерений среди равновозможных, а найти наиболее возможную, точнее – минимизирующую возможность потерь

Модель измерения и интерпретации

$$\xi_i = (a_i, \sum_{j=1}^{n} a_j g_j) + \nu_i = \sum_{j=1}^{n} (a_i, a_j) g_j + \nu_i,$$

$$i = 1, \ldots, n < \infty,$$

$$\xi_i = (\vec{b}_i, \vec{g}) + \nu_i, \quad \vec{b}, \vec{g} \in R^n, \quad \boxed{|\nu_i| \le \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, n}$$

$$u = \sum_{j=1}^{n} a_k g_k \in L(X) \subset L^2(X)$$

Возможность

- Возможность $P(A)$ характеризует шанс наступления события A по сравнению с шансами других событий.

В каком виде ищем решение

$$\vec{\xi} = B\vec{g} + \overline{v} \in R^n$$

$$\vec{u} = U\vec{g} \in R^m$$

- Решение $d(\cdot): R^n \to R^n; \quad d(\xi)$ - оценка Ug

Нечеткая модель измерения

Совместное распределение возможности $\varphi^{\vec{\xi},\vec{g},\vec{u}}(\cdot,\cdot,\cdot)$:

$\varphi^{\vec{\xi},\vec{g},\vec{u}}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ - возможность равенства

$\vec{\xi}=\vec{x},\vec{g}=\vec{y},\vec{u}=\vec{z}.$

$$\vec{v}=\vec{\xi}-A\vec{g},\vec{u}=U\vec{g}:$$

$$\varphi^{\vec{\xi},\vec{g},\vec{u}}(\vec{x},\vec{y},\vec{z})=\begin{cases}\pi^{\vec{v}}(\vec{x}-A\vec{y}), & \vec{z}=U\vec{y},\\ 0, & \vec{z}\neq U\vec{y}.\end{cases}$$

$\pi^{\vec{v}}(\vec{y})$ - возможность равенства $\vec{v}=\vec{y}.$

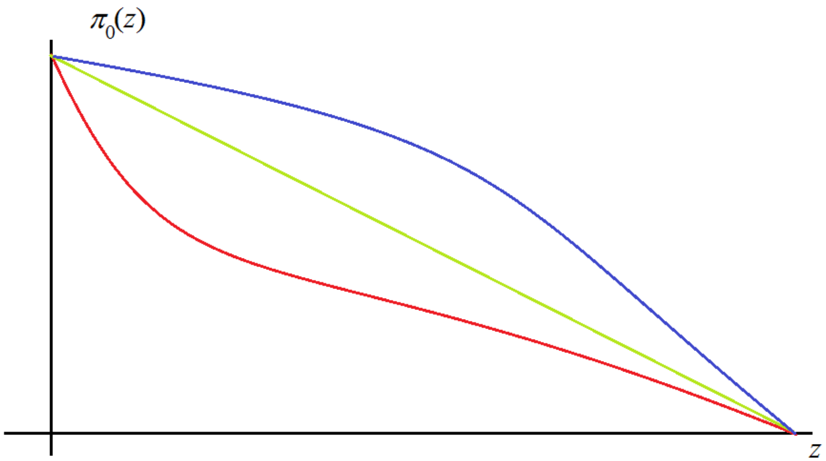
$$\vec{\xi}=B\vec{g}+\vec{v}\in R^n$$

$$\vec{u}=U\vec{g}\in R^m$$

Нечеткая модель погрешности измерения

$$\pi^{\nu_i}(z) = \begin{cases} \pi_0\left(\frac{|z|}{\varepsilon_i}\right), & |z| \leqslant \varepsilon_i, \\ 0, & |z| > \varepsilon_i, \end{cases}$$

$\pi_0(\cdot)$ - монотонно невозрастающая функция



$$\pi^{\vec{\nu}}(z_1, \ldots, z_n) = \min_i \pi^{\nu_i}(z_i)$$

Возможность потерь

$$\vec{\xi} = B\vec{g} + \vec{v}$$

$$\vec{u} = U\vec{g}$$

$l(d(\xi),u)$ – возможность нести потери при решении $d(\xi)$, если «истинное значение» - u.

$$l(\vec{d},\vec{u}) = \begin{cases} 0, & \vec{u} = \vec{d} \\ 1, & \vec{u} \neq \vec{d} \end{cases}$$

Оценка, минимизирующая возможность потерь

$$P(\vec{d}(\cdot)) = \sup_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}} \min(l(\vec{z},\vec{d}(\vec{x})),\varphi^{\vec{\xi},\vec{g},\vec{u}}(\vec{x},\vec{y},\vec{z}))$$

- возможность потерь, соответствующих решению $\vec{d}(\cdot)$.

P-оптимальное решение $\vec{d}_*(\cdot)$:

$$P(\vec{d}_*(\cdot)) = \min_{\vec{d}(\cdot)}(P(\vec{d}(\cdot)))$$

Задача на минимум возможности потерь

$$\max_{\vec{g}} \pi_0 \left\{ \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_i} \left| \xi_i - \left(\vec{b}_i, \vec{g}\right) \right| \right\} l_x \le (\vec{a}_x, \vec{g}) \le r_x, x \in (x_1, \dots, x_m) \right\}$$

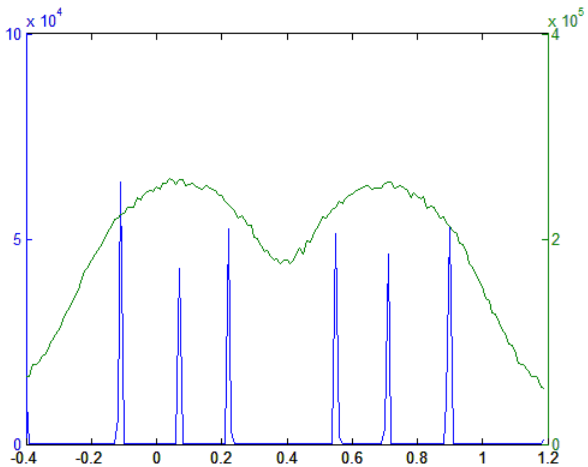
эквивалентна задаче

$$\min_{\vec{g}} \left\{ \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_i} \left| \xi_i - \left(\vec{b}_i, \vec{g}\right) \right| \right\} l_x \le (\vec{a}_x, \vec{g}) \le r_x, x \in (x_1, \dots, x_m) \right\}$$

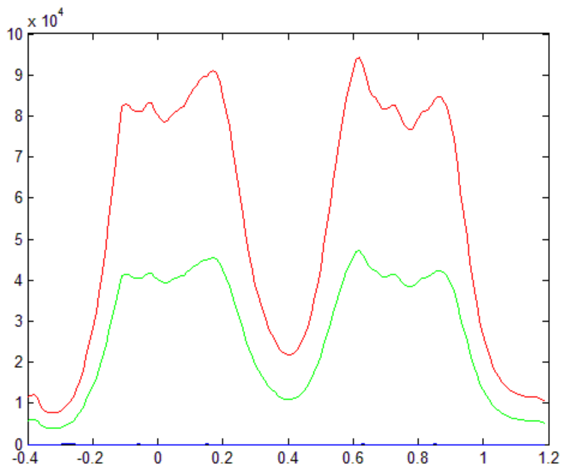
и сводится к задаче линейного программирования

$$\vec{u} = U\vec{g}$$

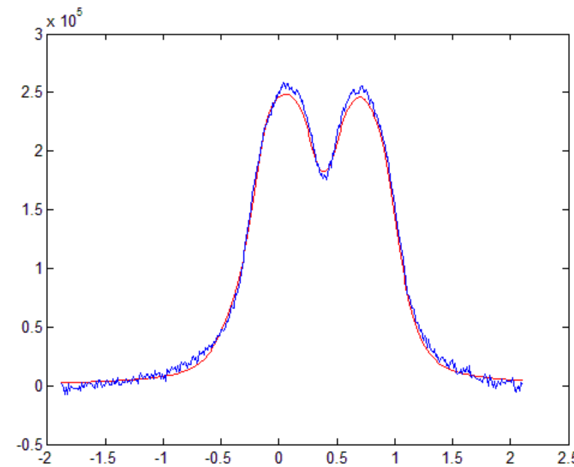
Результат оценивания спектра по данным мессбауэровского спектрометра



Результат измерения (зеленый цвет) и оценка минимальной возможности потерь (синий цвет)

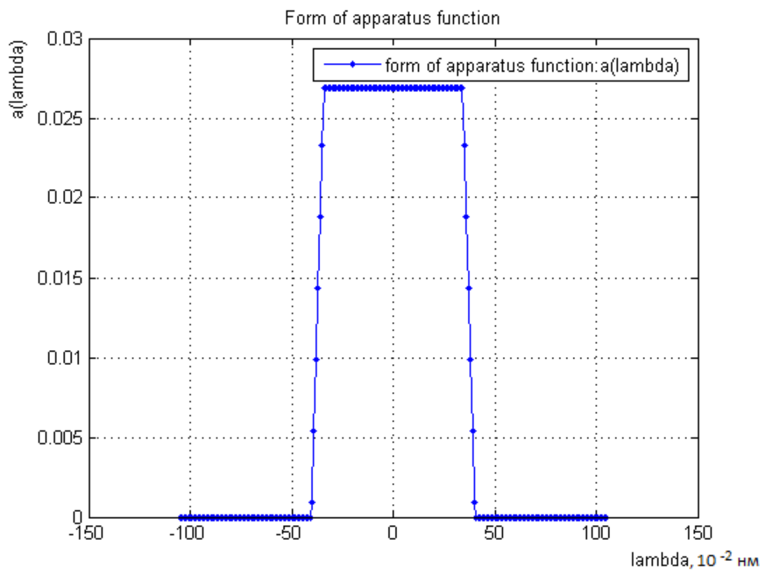


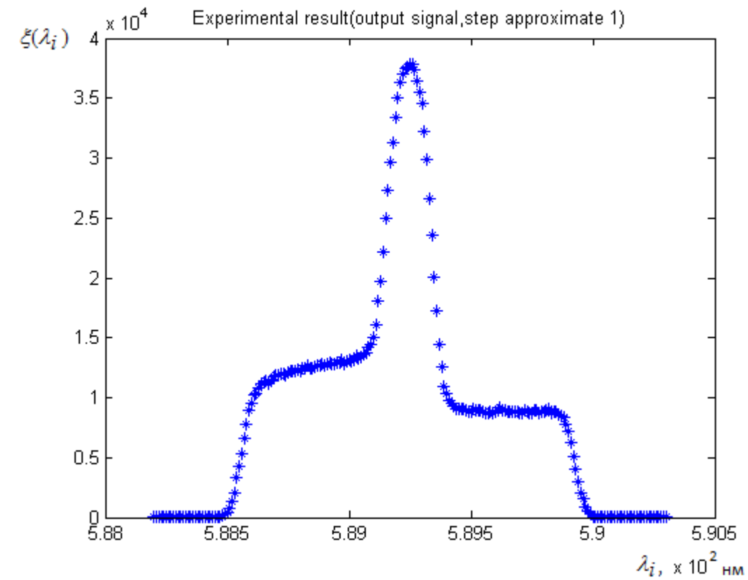
Результат минимаксного оценивания: максимальное (красный), минимальное (синий) значения, и результат оценивания (зеленый цвет)

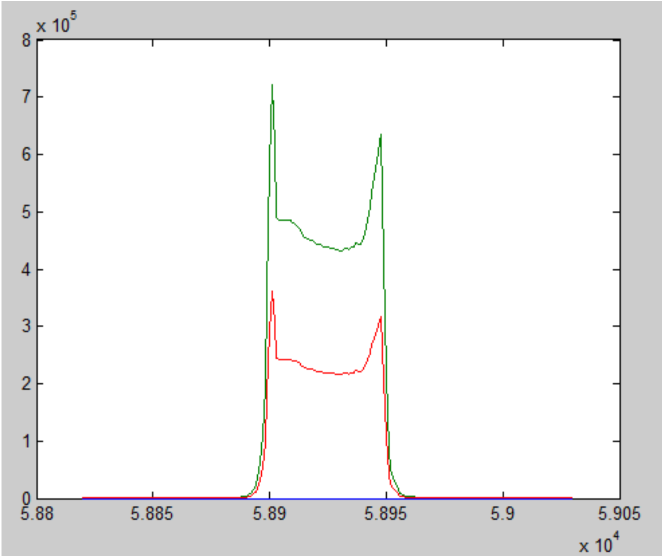


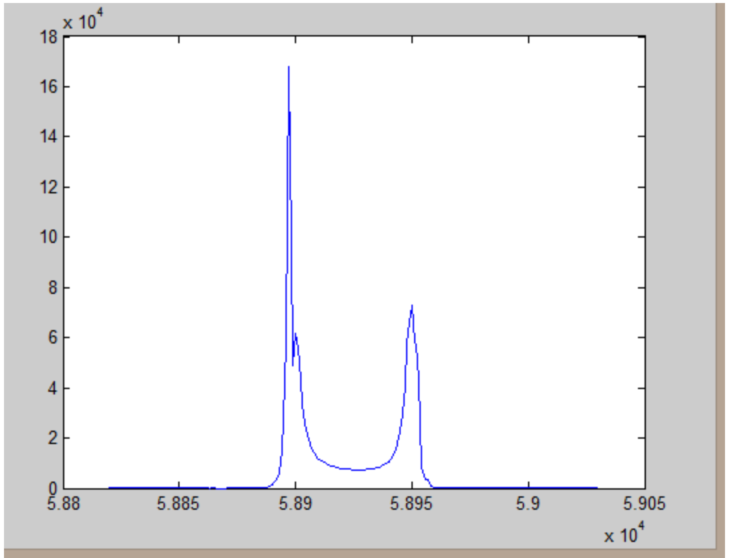
Результат измерения (синий цвет) и модель измеренного спектра при условии, что входной спектр заменен на оценку минимальной возможности потерь (красный цвет)

Результат оценивания спектра излучения дублета Na

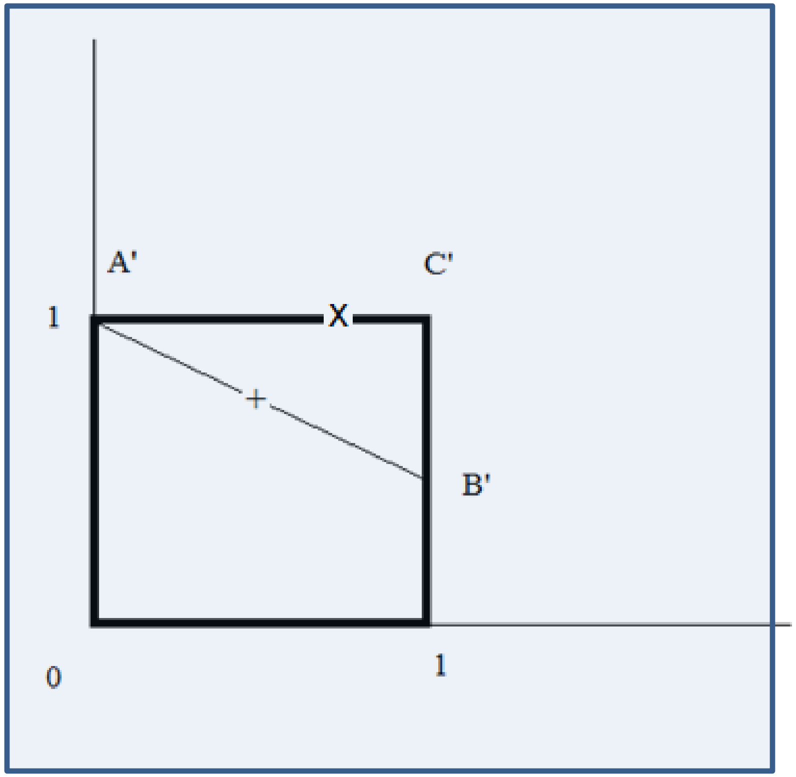


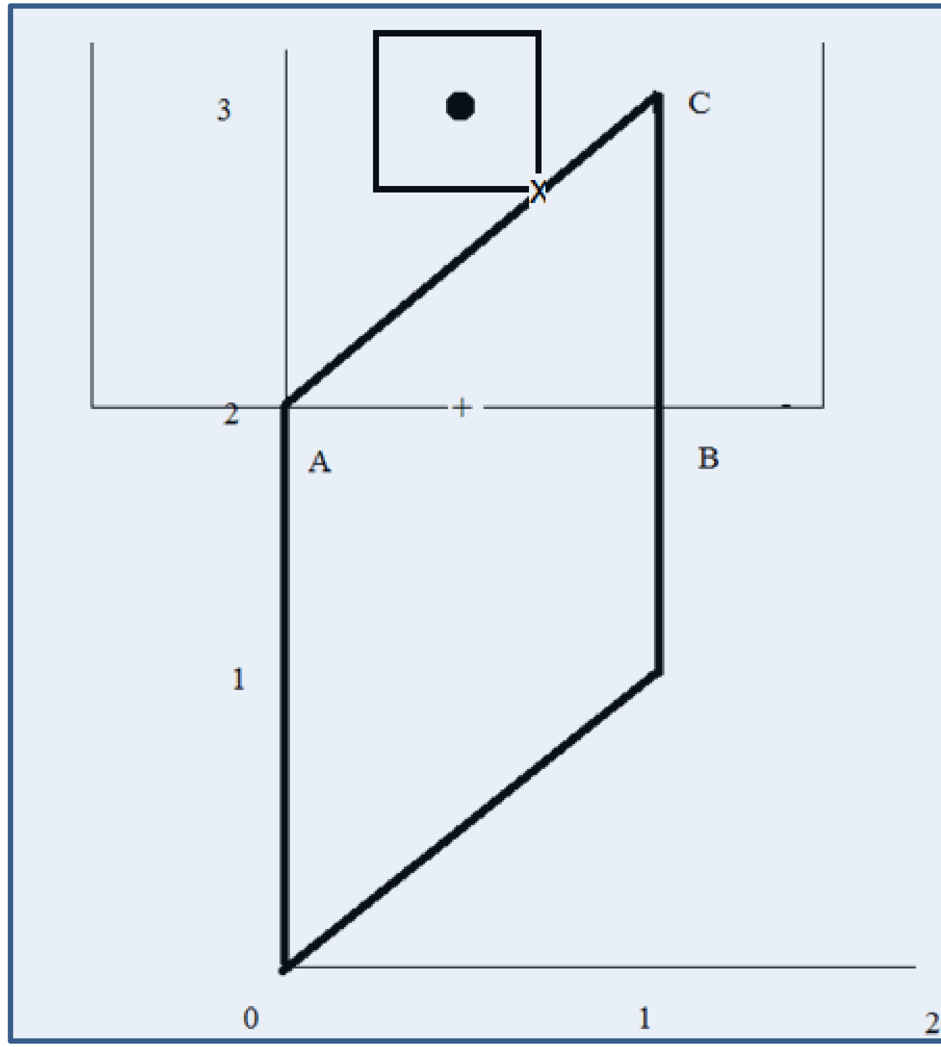






Пояснения





$$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \left| v_i \right| \le 1, \quad 0 \le g_i \le 1.$$

u=g

achulichkov@gmail.com

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!