Физический ф-т МГУ имени М. В. Ломоносова
Кафедра математического моделирования и информатики

# Новый подход к специфичности возможностных мер и его роль в теории принятия решений

Зубюк Андрей Владимирович

Конференция ИОИ-2018

# Теория возможностей Ю. П. Пытьева

$\Omega$ — множество элементарных событий, $\mathcal{A}$ — $\sigma$-алгебра подмножеств $\Omega$.

**Теория вероятностей**:

$$\mathrm{P}:\mathcal{A}\to[0,1] \quad \mathrm{P}(A)=\sum_{\omega\in A}\mathrm{p}(\omega) \quad \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A\mid B)\cdot\mathrm{P}(B)$$

$$\nu(A)\triangleq\frac{N_A}{N}\xrightarrow[N\to\infty]{\mathrm{P}}\mathrm{P}(A)$$

**Теория возможностей**:

$$\Pi:\mathcal{A}\to\mathcal{L} \qquad \Pi(A)=\mathop{\dotplus}_{\omega\in A}\pi(\omega) \quad \Pi(A\cap B)=\Pi(A\mid B)\ast\Pi(B)$$

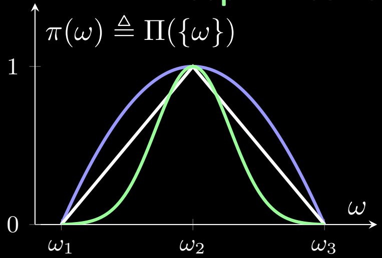
$\mathcal{L}=([0,1],\leqslant,\dotplus,\ast)$ — порядковая шкала значений возможностей: выводы теории не должны изменяться при любом строго монотонно возрастающем полунепрерывном снизу преобразовании $\gamma$ шкалы $\mathcal{L}$, т. е.

$$\gamma(a\dotplus b)=\gamma(a)\dotplus\gamma(b),\quad \gamma(a\ast b)=\gamma(a)\ast\gamma(b) \tag{1}$$

Возможности $\Pi$ и $\Pi'$, $\Pi'(A)=\gamma(\Pi(A))$ называются **эквивалентными**:

$$\Pi'\sim\Pi.$$

## Теория возможностей Ю. П. Пытьева




Три эквивалентных возможности, представленных своими распределениями. Теория возможностей Ю. П. Пытьева даёт одинаковые результаты (к примеру, при принятии решений) для всех этих возможностей.

**Теорема**

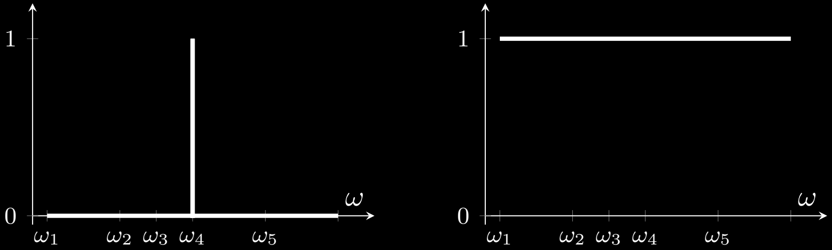
*Пусть бинарные операции “$\dotplus$” и “$\circledast$” суть непрерывные коммутативные функции* $[0,1] \times [0,1] \to [0,1]$, *удовлетворяющие* (1) *для любой строго монотонной полунепрерывной снизу функции* $\gamma$, *такой что* $\gamma(0) = 0$ *и* $\gamma(1) = 1$, *и* $0 \dotplus a = a,\ 0 \circledast a = 0,\ 1 \dotplus a = 1,\ 1 \circledast a = a$ *для любых* $a \in [0,1]$. *Тогда*

$$a \dotplus b = \max\{a, b\}, \quad a \circledast b = \min\{a, b\}, \quad a,\ b \in [0,1].$$

**Пытьев Ю. П.** Возможность. Элементы теории и применения. М.: «Эдиториал УРСС», 2000

# О специфичности возможностных моделей

**Zubyuk A.** A new approach to specificity in possibility theory: Decision-making point of view. // Fuzzy Sets and Systems. 2018



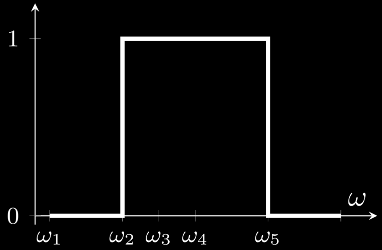

Точное знание

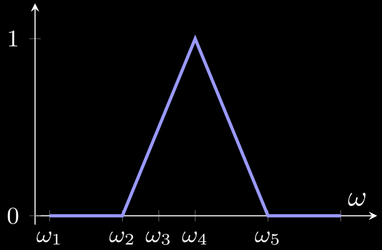
Абсолютное незнание

Другие способы сравнения качественных возможностных моделей по специфичности и информативности: **Benferhat S.**, **Dubois D.**, **Prade H.** Possibilistic and standard probabilistic semantics of conditional knowledge bases. // Journal of Logic and Computation. 1999. Vol. 9, no. 6. Pp. 873–895.

# О специфичности возможностных моделей

**Zubyuk A.** A new approach to specificity in possibility theory: Decision-making point of view. // Fuzzy Sets and Systems. 2018



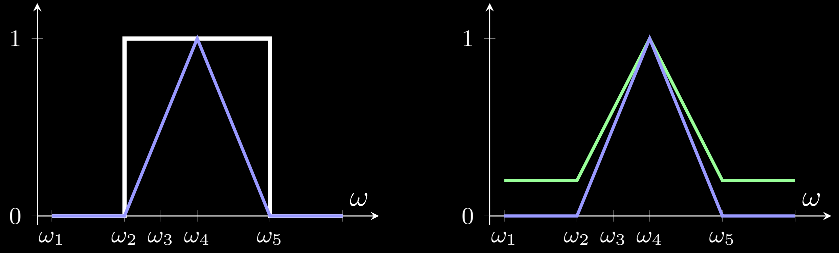




Промежуточные варианты

Другие способы сравнения качественных возможностных моделей по специфичности и информативности: **Benferhat S.**, **Dubois D.**, **Prade H.** Possibilistic and standard probabilistic semantics of conditional knowledge bases. // Journal of Logic and Computation. 1999. Vol. 9, no. 6. Pp. 873–895.

# О специфичности возможностных моделей

**Zubyuk A.** A new approach to specificity in possibility theory: Decision-making point of view. // Fuzzy Sets and Systems. 2018

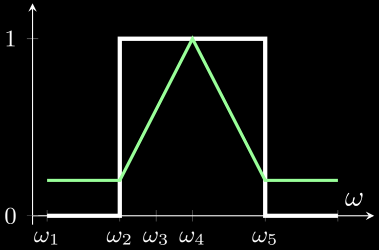


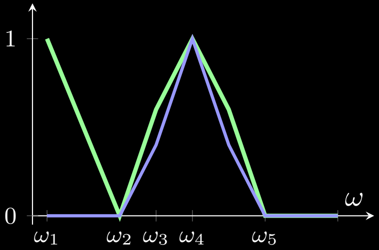

Разная специфичность моделей

Другие способы сравнения качественных возможностных моделей по специфичности и информативности: **Benferhat S.**, **Dubois D.**, **Prade H.** Possibilistic and standard probabilistic semantics of conditional knowledge bases. // Journal of Logic and Computation. 1999. Vol. 9, no. 6. Pp. 873–895.

# О специфичности возможностных моделей

**Zubyuk A.** A new approach to specificity in possibility theory: Decision-making point of view. // Fuzzy Sets and Systems. 2018




Не сравнимы по специфичности

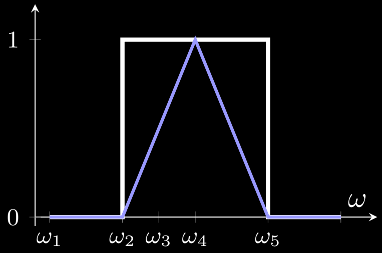
Другие способы сравнения качественных возможностных моделей по специфичности и информативности: **Benferhat S.**, **Dubois D.**, **Prade H.** Possibilistic and standard probabilistic semantics of conditional knowledge bases. // Journal of Logic and Computation. 1999. Vol. 9, no. 6. Pp. 873–895.

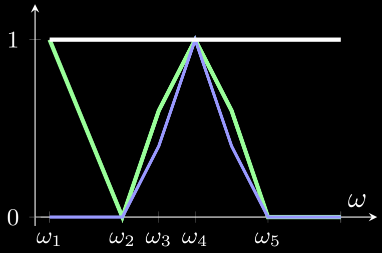
# Отношение специфичности (информативности)

## Определение

*$\pi_1 \preceq \pi_2$ ($\pi_1$ не более специфично, чем $\pi_2$), если выполнены 1, 2 и 3.*

1. $\operatorname{supp} \pi_1 \subset \operatorname{supp} \pi_2$,
2. существует монотонно неубывающая полунепрерывная снизу функция $\varphi : (0,1] \to (0,1]$, такая что $\pi_2(\omega) = \varphi(\pi_1(\omega)), \ \forall \omega \in \operatorname{supp} \pi_1$,
3. $\pi_2(\omega') \geqslant \pi_2(\omega''), \ \forall \omega' \in \operatorname{supp} \pi_1, \forall \omega'' \notin \operatorname{supp} \pi_1$.



# Свойства введённого отношения специфичности

**Теорема**

*Отношение специфичности “$\preceq$” является предпорядком.*

**Теорема**

$\pi_1 \sim \pi_2 \Leftrightarrow \pi_1 \preceq \pi_2$ *and* $\pi_2 \preceq \pi_1$.

В теории возможностей Ю. П. Пытьева эквивалентность $\pi_1 \sim \pi_2$ означает существование такого строго монотонного полунепрерывного снизу преобразования $\gamma : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ шкалы значений возможностей, $\gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = 1$, что $\pi_1(\omega) = \gamma\big(\pi_2(\omega)\big),\ \forall \omega \in \Omega$.

**Определение**

$\pi_1 \prec \pi_2$ *(*$\pi_1$ *строго более специфично, чем* $\pi_2$*), если* $\pi_1 \preceq \pi_2$ *и* $\pi_1 \not\sim \pi_2$.

Отношение «$\preceq$» может быть реализовано алгоритмически посредством эквализации (выравнивания гистограмм).

# Задача принятия решений

$\xi : \Omega \to \{1, \ldots, N\}$ — ненаблюдаемое нечёткое состояние природы,
$\eta : \Omega \to Y$ — наблюдаемый нечёткий элемент.

Известно их **совместное распределение** $\pi$:

$$\pi(x, y) = \Pi\big(\{\xi(\omega) = x,\ \eta(\omega) = y\}\big).$$

Требуется «оценить» значение $\xi(\omega)$, зная значение $\eta(\omega)$.

Для этого из заданного множества $\Delta$ решающих правил, т. е. функций $Y \to \{1, \ldots, N\}$, предлагается выбрать **оптимальное** $\delta_*$, т. е. решение задачи

$$\Pi(\mathcal{E}(\delta)) \sim \min_{\delta \in \Delta},$$

$$\text{где } \mathcal{E}(\delta) = \{\omega \in \Omega :\ \delta(\eta(\omega)) \neq \xi(\omega)\},$$

и считать «оценкой» $\xi(\omega)$ значение $\delta_*(\eta(\omega))$.

# Роль отношения специфичности при принятии решений

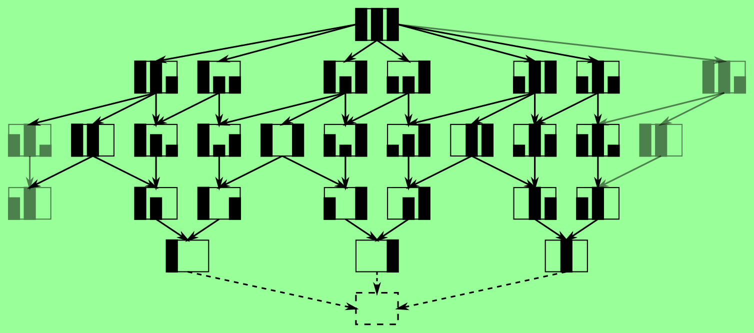
- Обозначим $\Delta_*(\Pi)$ множество **всех** решающих правил, **оптимальных** для модели $(\Omega,\, 2^{\Omega},\, \Pi)$.
- Обозначим $D_y^{\Pi}$ множество всех оптимальный решений при наблюдении $\eta(\omega) = y$:
$$D_y^{\Pi} = \{\delta_*(y) \mid \delta_* \in \Delta_*(\Pi)\} \subset \{1,\, \ldots,\, N\}.$$
- Наряду с возможностью $\Pi_1$ введём необходимость $N_1$ так, чтобы
$$\mathrm{N}_1(A) = 1 \Leftrightarrow \Pi_1(\Omega \setminus A) = 0,\ \forall A \in 2^{\Omega}$$

**Теорема**

*Если* $\Pi_1 \preceq \Pi_2$, *то включение* $D_\eta^{\Pi_1} \subset D_\eta^{\Pi_2}$ *является* $N_1$*-необходимым.*

# Направления дальнейших исследований

- Является ли множество всех распределений возможностей решёткой?



- Алгоритмы построения $\pi_1 \vee \pi_2$ и $\pi_1 \wedge \pi_2$.
- Можно ли обобщить полученные результаты на другие варианты теории возможностей, другие модели принятия решений?

# Спасибо за внимание!