Метрические критерии представления функции двух переменных в виде суммы функций одной переменной

Дмитрий Кондрашкин

Введение

В данной работе рассматривается задача о представлении функции двух переменных в виде суммы функций одной переменной на заданном множестве точек. Приведены метрические критерии возможности такого представления. Данная задача эквивалентна задаче о вырожденности матрицы попарных расстояний (l_1 или Хэмминга). Такая постановка, в свою очередь, возникает в теории интерполяции, например, с помощью жёстких функций[1](ridge functions) ([1], [2]), а также в алгебраическом подходе к решению задач распознавания ([3]).

Приведем пример одной из подобных задач на плоскости, которая называется интерполяцией по точечным данным (scattered data interpolation). На множестве точек $G = \{g_1, \ldots, g_q\} \subset \mathbb{R}^2$ задана функция $y\colon G \to \mathbb{R}$. Нужно найти функцию f, такую что $f|G = y$, т.е. $f(g_i) = y_i$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$. Такая функция f интерполирует функцию y.

В работе рассмотрен случай двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$. Множества точек, для которых возможно искомое представление в дальнейшем называются "хорошими", а остальные — "плохими". Для "плохих" множеств точек можно предоставить набор чисел $z_1, \ldots, z_q$, такой что представление $f(g_i) = f_x(x_i) + f_y(y_i) = z_i$ невозможно. Такие множества можно полностью описать и придать решению наглядную геометрическую интерпретацию. В [2] было показано, что множество точек является "плохим" тогда и только тогда, когда оно содержит подмножества специального вида, которые были названы замкнутыми путями. В работе будет рассмотрено понятие суммы прямоугольников[2], которое эквивалентно понятию замкнутого пути.

Интересно, что невозможность представления функции в искомом виде эквивалентна вырожденности матрицы попарных расстояний (l_1 или Хэмминга) данной системы точек. Это и есть метрический критерий "хорошей" системы точек.

В работе приведено авторское доказательство достаточных условий метрического критерия "хорошей" системы точек, а также необходимых условий метрического критерия при некотором дополнительном предположении. Получена новая форма представления матрицы попарных l_1-расстояний через характеристическую матрицу.

Основные определения

Определение 1. Множество точек $G = \{g_1, \ldots, g_q\} \subset \mathbb{R}^n$ называется *"хорошим"*, если для любых $y_1, \ldots, y_q \in \mathbb{R}$ функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная в точках $g_1, \ldots, g_q : f(g_1) = y_1, \ldots, f(g_q) = y_q$, представима в виде суммы $f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n)$.

Определение 2. Матрица $\|\rho(g_i, g_j)\|_{i,j=1}^q$, где $\rho(\cdot, \cdot)$ — метрика, называется *матрицей попарных расстояний* системы точек $G = \{g_1, \ldots, g_q\}$.

В данной работе рассматривается случай метрики Хэмминга и двумерного пространства $\mathbb{R}^2$.

Основная Теорема. *Множество точек $G = \{g_1, \ldots, g_q\} \subset \mathbb{R}^2$ — "хорошее" тогда и только тогда, когда* $\det \|\rho(g_i, g_j)\| \neq 0$.

Подготовим несколько вспомогательных утверждений для доказательства этой теоремы.

Пусть для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ среди i-х координат точек $g_1, \ldots, g_q \in \mathbb{R}^n$ m_i различных. Обозначим их через $\mathrm{x}_i^1, \ldots, \mathrm{x}_i^{m_i}$. Пусть $M = \sum_{i=1}^n m_i$. Каждой точке $(x_1, \ldots, x_n) \in G$ можно поставить в соответствие *характеристический вектор* $h = (h_1^1, \ldots, h_1^{m_1}, \ldots, h_n^1, \ldots, h_n^{m_n}) \in \mathbb{R}^M$:

$$h_i^j = \begin{cases} 1, x_i = \mathrm{x}_i^j, \\ 0, x_i \neq \mathrm{x}_i^j. \end{cases}$$

Определим *характеристическую матрицу* [3] $\mathcal{H}$ размера $q \times M$, строки которой являются такими характеристическими векторами точек из множества G.

[1]Жёсткая функция — функция вида $f(\langle a, x \rangle)$, где $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ — фиксированный вектор, $x \in \mathbb{R}^n$ — переменная.

[2]Частный случай суммы размеченных прямоугольников (signed rectangles) рассмотренных в [1].

[3]В [1] характеристической матрицей называется матрица $\mathcal{H}\mathcal{H}^T$.

Пример 1. Множество G состоит из точек с координатами $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$. Тогда матрица $\mathcal{H}$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Существенную роль играют определенные конфигурации точек. Рассмотрим их подробнее.

Определение 3. *Суммой* двух множеств точек G_1 и G_2 назовем их симметрическую разность $G_1 \triangle G_2$.

Определение 4. *Прямоугольник* — множество точек $\Pi = \{(a,b), (a,c), (d,b), (d,c)\}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Определение 5. Множество точек G, представимое в виде суммы прямоугольников, называется *тупиковой суммой прямоугольников*, если для любого непустого подмножества $G' \subset G$ множество $G \backslash G'$ нельзя представить в виде суммы прямоугольников.

Именно *тупиковые суммы прямоугольников* представляют наибольший интерес. Примеры приведены на рис. 1.

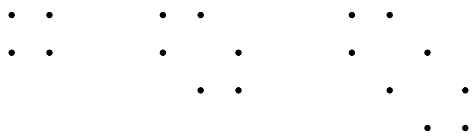

Рис. 1: Примеры тупиковых сумм прямоугольников для двумерного случая.

Определение 6. *Соседними* будем называть точки, у которых различается одна координата. Определим *множество соседних точек* точки $g \in G$:

$$N_G(g) = \{g' \in G \colon \rho(g, g') = 1\},$$

где $\rho(\cdot, \cdot)$ — метрика Хэмминга.

Вспомогательные утверждения

Утверждение 1. *Если K — тупиковая сумма прямоугольников, то:*

$$\forall g \in K \ |N_K(g)| = 2.$$

Доказательство. Докажем по индукции. Для $|K| = 4$ — очевидно. Пусть утверждение верно для $K_l \colon |K_l| = l$, где l чётно. Добавим к K_l прямоугольник K_4. Возможны следующие четыре варианта их взаимного расположения:

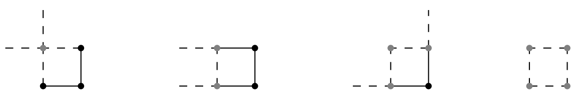

Рис. 2: Возможные варианты расположения K_l и K_4.

1. $|K_l \cap K_4| = 1 \Rightarrow |K_l \triangle K_4| = l + 2$.
2. $|K_l \cap K_4| = 2 \Rightarrow |K_l \triangle K_4| = l$.
3. $|K_l \cap K_4| = 3 \Rightarrow |K_l \triangle K_4| = l - 2$.
4. $|K_l \cap K_4| = 4 \Rightarrow |K_l \triangle K_4| = l - 4$.

Шаг индукции реализуется в первом случае. При этом получается сумма прямоугольников K_{l+2} , и доказываемое свойство при переходе, очевидно, не меняется. И, так как множество K_l — любая сумма прямоугольников из l точек, то прибавлением прямоугольника K_4 можно получить любую сумму из $l + 2$ точек. $\square$

Следствие 1. *Пусть K — тупиковая сумма прямоугольников, $|K| = s$, тогда:*

$$m_1 \leqslant \frac{s}{2},$$
$$m_2 \leqslant \frac{s}{2},$$

где m_i — число различных i-х координат точек (см. определение характеристической матрицы).

Утверждение 2. *Тупиковая сумма прямоугольников K не является "хорошим" множеством.*

Доказательство. На точках из K построим граф $\Gamma = \langle K, E\rangle$, где множество рёбер $E = \{(u,v) \mid u, v \in K, \rho(u,v) = 1\}$, $\rho(\cdot,\cdot)$ — метрика Хэмминга. Так как K — тупиковая сумма, то $|N_K(g)| = 2$ для любой точки $g \in K$, и на любой прямой параллельной осям координат либо нет точек из K, либо их ровно две. Заметим, что граф Γ является чётным циклом. Пусть $K = \{g_1, \ldots, g_q\} \subset \mathbb{R}^2$, $f(g_i) = y_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$. Тогда если множество K "хорошее", то:

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, q\}\ \exists f_1, \ldots, f_q \in \mathbb{R}\colon f_i + f_{i+1 (\mathrm{mod}\ q)} = y_i.$$

Т.е. на E задаются числа $f_1, \ldots, f_q \in \mathbb{R}$, а значение функции f в вершине $g \in K$ равно сумме таких чисел на рёбрах исходящих из g. Как уже было сказано, таких рёбер ровно два. Рассмотрим следующую сумму, и расставим скобки двумя разными способами, сначала группируем 1 и 2, 3 и 4,$\ldots$, $q-1$ и q слагаемые, а затем 2 и 3,$\ldots$, q и 1:

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_{q-1} + f_q = y_1 + y_3 + \ldots + y_{q-1} = y_2 + y_4 + \cdots + y_q.$$

Получили ограничение на y_i, из которого следует, что K не является "хорошим" множеством. □

Построим на G граф $\hat{G}$ аналогично тому, как делали это при доказательстве утверждения 2. Имеет место следующее

Утверждение 3. *Если в $\hat{G}$ есть цикл, то существует $K \subseteq G$: K — сумма прямоугольников.*

Доказательство. Выделим в $\hat{G}$ подграф, являющийся простым циклом, пусть ему соответствует множество точек $K \subseteq G$. Заметим, что

$$\forall g = (x, y) \in K\ \exists g_x = (x_x, y_x) \in K, g_y = (x_y, y_y) \in K\colon x = x_x, y = y_y.$$

Следовательно $|N_K(g)| \geqslant 2$ для любой точки $g \in K$ и, так как цикл простой, $|N_K(g)| = 2$. Приведем алгоритм построения K в виде суммы прямоугольников. Через K_i обозначим множество точек, полученное на i-й итерации.

0-й шаг: Выберем произвольную точку $g \in K$, $N_K(g) = \{g_x, g_y\}$, $K_1 = \varnothing$.

1-й шаг: Построим прямоугольник Π на вершинах g, g_x, g_y. Обозначим четвёртую вершину через $g' = (x', y')$. Рассмотрим следующие два случая:

1. $g' \in K$: тогда, если $g \in K$, то g, g_x, g_y, g' образуют прямоугольник и утверждение доказано. Если $g \notin K$, то $\Pi \triangle K_{i-1} \subseteq K$ является суммой прямоугольников, и утверждение доказано.
2. $g' \notin K$: тогда $K_i = \Pi \triangle K_{i-1}$. Пусть $N_K(g_x) = \{g, g'_y\}, N_K(g_y) = \{g, g'_x\}$, при этом $x' = x'_x, y' = y'_y$. Тогда $N_K(g') = \{g'_x, g'_y\}$. Повторим 1-й шаг для точки g'.

Так как $|N_K(g)| = 2$ для любой точки $g \in K$ и на шаге 1 мы просматриваем обоих соседей, на каждой итерации алгоритма точки g_x, g_y, g'_x, g'_y будут "новыми" (не просмотренными на предыдущих итерациях). □

Приведем ещё одно интересное утверждение. Рассмотрим множество $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2\colon x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + n, y_0 \leqslant y \leqslant y_0 + m\}$, где $n, m \in \mathbb{N}$, $x_0, y_0 \in \mathbb{Z}$.

Утверждение 4. *Пусть $G \subseteq \Pi$. Если $|G| = q \geqslant m + n$, то $\operatorname{rank} \mathcal{H} < q$.*

Доказательство. Матрица $\mathcal{H}$ — это матрица размера $q \times (m+n)$. Рассмотрим два случая:

1. $q > m + n$, тогда $\operatorname{rank} \mathcal{H} \leqslant (m+n) < q$.

2. $q = m + n$. Через H_i обозначим i-й столбец матрицы $\mathcal{H}$. В силу свойств характеристической матрицы:

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = (1, \ldots, 1)^T = \sum_{i=n+1}^{n+m} H_i.$$

Следовательно $\operatorname{rank} \mathcal{H} < m + n = q$.

□

Доказательство Основной Теоремы

Теперь можно привести схему доказательства Основной Теоремы. Оно будет состоять из трех лемм, доказывающих эквивалентность следующих утверждений:

1. Множество точек $G = \{g_1, \dots, g_q\} \subset \mathbb{R}^2$ “хорошее” в смысле определения 1.
2. В множестве G нет подмножеств, состоящих из сумм прямоугольников(а следовательно, и из тупиковых сумм прямоугольников).
3. $\operatorname{rank} \mathcal{H} = q$.
4. $\det \|\rho(g_i, g_j)\| \neq 0$.

Лемма 1. *Множество точек $G = \{g_1, \dots, g_q\} \subset \mathbb{R}^2$ “хорошее” тогда и только тогда, когда в множестве G нет подмножеств, состоящих из сумм прямоугольников.*

Доказательство. Допустим множество G содержит в себе подмножество, являющееся суммой прямоугольников, в котором мы выделим подмножество K, являющееся тупиковой суммой прямоугольников. Как уже известно, K не является “хорошим”. Следовательно в “хорошем” множестве нет подмножеств, состоящих из сумм прямоугольников.

Пусть в множестве G нет подмножеств, являющихся суммами квадратов. Покажем, что тогда можно построить функцию f в виде суммы: $f(x, y) = f_x(x) + f_y(y)$, такую что $f(g_i) = z_i$ для любой точки $g_i \in G$, где $z_i \in \mathbb{R}$. Начнём построение с произвольной точки $g_i = (x_i, y_i) \in G$. Пусть $f_x(x_i) = z_i$ а $f_y(y_i) = 0$. Далее:

$$\forall g = (x, y) \in G \colon x = x_i \text{ определим } f_y(y) = z - z_i,$$

где z — заданное значение f в точке g. Затем для всех этих точек, рассматриваем соседние по y, и в них уже задаём f_x. Согласно утверждению 3 в графе $\hat{G}$, построенном на точках из G, нет циклов. Следовательно мы на каждом шаге сможем задать f_x или f_y. Так как точек конечное число, данный процесс завершится. □

Лемма 2. *В множестве G нет подмножеств, состоящих из сумм прямоугольников тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rank} \mathcal{H} = q$.

Доказательство. Для удобства сделаем следующее переобозначение:

$$m_x = m_1, m_y = m_2,$$
$$h = (h_1^1, \dots, h_1^{m_1}, h_2^1, \dots, h_2^{m_2}) = (x_1, \dots, x_{m_x}, y_1, \dots, y_{m_y}).$$

Докажем, что если в G есть подмножество состоящее из суммы прямоугольников, то $\operatorname{rank} \mathcal{H} < q$. Рассмотрим подмножество $K \subseteq G$, являющееся тупиковой суммой прямоугольников. Пусть $|K| = s \leqslant q$. Заметим, что s чётно. У каждой точки из K есть две соседних: по x и по y. Выделим в $\mathcal{H}$ подматрицу $\mathcal{H}'$ соответствующую множеству K. Разобьем векторы-строки матрицы $\mathcal{H}'$ на пары. Векторы

$$h' = (x'_1, \dots, x'_{m_x}, y'_1, \dots, y'_{m_y}),$$
$$h'' = (x''_1, \dots, x''_{m_x}, y''_1, \dots, y''_{m_y})$$

в одной паре, если $x'_i = x''_i$ для всех $i \in \{1, 2, \dots, m_x\}$. Далее в каждой паре возьмем разность

$$h = h' - h'' = (0, \dots, 0, y'_1 - y''_1, \dots, y'_{m_y} - y''_{m_y}).$$

Таким образом получили $\frac{s}{2}$ векторов следующего вида:

$$h_k = (0, \dots, 0, y_1^k, \dots, y_{m_y}^k),$$

причем

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, \frac{s}{2}\}$$
$$\exists i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, m_y\} \colon y_{i_1}^k = 1,\, y_{i_2}^k = -1,$$
$$\forall i \in \{1, 2, \dots, m_y\} \backslash \{i_1, i_2\}\; y_i^k = 0.$$

Составим матрицу:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} y_1^1 & y_2^1 & \dots & y_{m_y}^1 \\ y_1^2 & y_2^2 & \dots & y_{m_y}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{\frac{s}{2}} & y_2^{\frac{s}{2}} & \dots & y_{m_y}^{\frac{s}{2}} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $\operatorname{rank}\tilde{\mathcal{H}} < m_y$, так как $\sum_{i=1}^{m_y}(y_i^1, y_i^2, \ldots, y_i^{\frac{s}{2}})^T = 0$. По следствию 1 $m_y \leqslant \frac{s}{2}$, тогда $\operatorname{rank}\tilde{\mathcal{H}} < \frac{s}{2}$. Это означает, что строки матрицы $\mathcal{H}$ линейно зависимы и $\operatorname{rank}\mathcal{H} < q$.

Пусть $\operatorname{rank}\mathcal{H} < q$, докажем что в G есть подмножество K, являющееся тупиковой суммой прямоугольников. Через $\operatorname{row}(\mathcal{H})$ обозначим множество строк матрицы $\mathcal{H}$.

$$\sum_{i=1}^{q}\alpha_i h_i = 0 \Rightarrow \exists h', h'' \in \operatorname{row}(\mathcal{H})\colon h' \neq h'',\ \tilde{h} = h' - h'' = (0, \ldots, 0, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{m_y}).$$

Если это не так, то подматрица матрицы $\mathcal{H}$, соответствующая x-координате, имеет диагональный вид, но тогда $\operatorname{rank}\mathcal{H} = q$. Далее

$$\begin{gathered}\exists i_1, i_2 \in \{1, 2, \ldots, m_y\}\colon \tilde{y}_{i_1} = 1, \tilde{y}_{i_2} = -1 \Rightarrow\\ \exists h_i = (x_1^i, \ldots, x_{m_x}^i, y_1^i, \ldots, y_{m_y}^i) \in \operatorname{row}(\mathcal{H})\colon y_{i_1}^i = 1,\\ \exists h_j = (x_1^j, \ldots, x_{m_x}^j, y_1^j, \ldots, y_{m_y}^j) \in \operatorname{row}(\mathcal{H})\colon y_{i_2}^j = 1,\end{gathered}$$

при этом $h_i \notin \{h', h'', h_j\}$, $h_j \notin \{h', h'', h_i\}$. Если $h_i - h_j = (0, \ldots, 0, y_1^i - y_1^j, \ldots, y_{m_y}^i - y_{m_y}^j)$, то точки соответствующие характеристическим векторам h', h'', h_i, h_j образуют прямоугольник, и утверждение доказано. Иначе для h_i, h_j проводим рассуждения как для h', h''. Так как точек конечное число, а $\operatorname{rank}\mathcal{H} < q$ этот процесс завершится, и полученное множество точек будет образовывать (тупиковую) сумму прямоугольников. $\square$

Следствие 2. *Если* $\operatorname{rank}\mathcal{H} < q$, *то:*

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \{+1, -1, 0\}\colon \sum_{i=1}^{q}\alpha_i^2 \neq 0,\ \sum_{i=1}^{q}\alpha_i h_i = 0.$$

Следствие 3. *Если* $\operatorname{rank}\mathcal{H} < q$, *и* $\mathcal{H}$ *— характеристическая матрица тупиковой суммы прямоугольников, то:*

$$\sum_{i=1}^{q}\alpha_i h_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{q}\alpha_i = 0.$$

Пусть точкам $g, g' \in \mathbb{R}^n$ соответствуют характеристические векторы h, h'. Заметим, что $\rho(g, g') = \frac{1}{2}\rho(h, h')$ в случае метрики Хэмминга. Т.е. вместо точек можно рассматривать их характеристические векторы. Рассмотрим скалярное произведение векторов h, h':

$$\langle h, h' \rangle = \sum_{i=1}^{n} h_i h_i'.$$

Расстояние Хэмминга можно выразить через скалярное произведение:

$$\frac{1}{2}\rho(h, h') = n - \langle h, h' \rangle.$$

Предположение. *Пусть существует набор* $\beta_1, \ldots, \beta_q$ *такой, что* $\sum_{i=1}^{q}\beta_i\langle h_i, h_j\rangle = 2$ *для всех* $j \in \{1, \ldots, q\}$. *Тогда* $\beta_i \geqslant 0$ *для всех* $i \in \{1, \ldots, q\}$.

Используя обозначения из данного предположения, приведем следующее

Утверждение 5. $\sum_{i=1}^{q}\beta_i - 1 > 0$.

Доказательство. Так как $\langle h_i, h_j\rangle \in \{0, 1, 2\}$, из равенства $\sum_{i=1}^{q}\beta_i\langle h_i, h_j\rangle = 2$ получаем неравенство

$$\sum_{i=1}^{q} 2\beta_i > 2,$$

из которого и следует утверждение. $\square$

Лемма 3. $\operatorname{rank}\mathcal{H} = q \Leftrightarrow \det\|\rho(g_i, g_j)\| \neq 0$.

Доказательство. Сначала докажем $\operatorname{rank}\mathcal{H} < q \Rightarrow \det\|\rho(g_i, g_j)\| = 0$, что эквивалентно $\det\|\rho(g_i, g_j)\| \neq 0 \Rightarrow \operatorname{rank}\mathcal{H} = q$. Так как $\operatorname{rank}\mathcal{H} < q$, то:

$$\exists \alpha_1, \ldots, \alpha_q\colon \sum_{i=1}^{q}\alpha_i^2 \neq 0,\ \sum_{i=1}^{q}\alpha_i h_i = 0.$$

Рассмотрим подмножество точек $K \subseteq G$, $|K| = s$, являющееся тупиковой суммой прямоугольников, и выразим вектор h_1, соответствующий точке $g_1 \in K$:

$$h_1 = \sum_{i=2}^{s} \alpha_i h_i \Rightarrow$$
$$\forall j \in \{1, 2, \dots, s\} \; \frac{1}{2}\rho(h_1, h_j) = 2 - \langle h_1, h_j \rangle =$$
$$= 2 - \sum_{i=2}^{s} \alpha_i \langle h_i, h_j \rangle = 2\sum_{i=2}^{s} \alpha_i - \sum_{i=2}^{s} \alpha_i \langle h_i, h_j \rangle =$$
$$= \sum_{i=2}^{s} \alpha_i (2 - \langle h_i, h_j \rangle) = \sum_{i=2}^{s} \alpha_i \frac{1}{2}\rho(h_i, h_j).$$

Следовательно строка матрицы $\|\rho(g_i, g_j)\|$, соответствующая точке g_1, линейно выражается через строки соответствующие точкам $g_i, i \in \{2, \dots, s\}$. А это означает, что $\det \|\rho(g_i, g_j)\| = 0$. Заметим, что мы использовали соотношение $\sum_{i=2}^{s} \alpha_i = 1$, которое следует из леммы 2.

Теперь докажем обратное. Используя выражение

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, q\} \; \sum_{i=1}^{q} \beta_i \langle h_i, h_j \rangle = 2,$$

которое возможно в силу того, что $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{L}(\mathcal{H}\mathcal{H}^T)$ [4], получим

$$\forall j \in \{1, 2, \dots, q\} \; \sum_{i=1}^{q} \beta_i (2 - \langle h_i, h_j \rangle) = 2\sum_{i=1}^{q} \beta_i - 2.$$

Таким образом вектор $\tilde{2}$ может быть представлен в виде линейной комбинации строк матрицы $\|\rho(g_i, g_j)\|$:

$$\tilde{2} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{q} \beta_i - 1} \sum_{i=1}^{q} \beta_i \left(\tilde{2} - H_i\right),$$

где $H_i = (\langle h_i, h_1 \rangle, \dots, \langle h_i, h_q \rangle)$. Именно здесь мы используем предположение о неотрицательности коэффициентов β_i.

Мы получили, что $\tilde{2} \in \mathcal{L}\left(\|\rho(g_i, g_j)\|\right)$, следовательно $\mathcal{L}\left(\|\rho(g_i, g_j)\|\right) = \mathcal{L}(\mathcal{H}\mathcal{H}^T)$ и лемма доказана.

$\square$

Случай l_1 метрики

Теперь рассмотрим l_1 метрику:

$$\rho(g_1, g_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$$

где $g_1 = (x_1, y_1), g_2 = (x_2, y_2)$. Далее будет доказан неполный аналог леммы 3 для l_1 метрики.

Вначале приведем простое утверждение про ранг матрицы специального вида. Рассмотрим такую матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 - a_1 & \dots & a_{n-1} - a_1 & a_n - a_1 \\ a_2 & a_2 - a_1 & 0 & \dots & a_{n-1} - a_2 & a_n - a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-1} - a_1 & a_{n-1} - a_2 & \dots & 0 & a_n - a_{n-1} \\ a_n & a_n - a_1 & a_n - a_2 & \dots & a_n - a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (*)$$

что $A_{ij} \neq 0$ для любых $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, $i \neq j$. Справедливо следующее

Утверждение 6. $\operatorname{rank} A = n$.

Доказательство. Для доказательства выразим базис $\mathbb{R}^n$ через столбцы матрицы A. Пусть $A_1, A_2, \dots, A_n$ — столбцы матрицы A, $E = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^n$ — вектор из одних единиц, $e_i \in \mathbb{R}^n$ — единичный вектор, i-я

[4]Через $\mathcal{L}(A)$ обозначена линейная оболочка векторов строк матрицы A.

координата которого равна 1. Процесс построения в пояснениях не нуждается:

$$\begin{gathered}
E = (A_1 + A_n)/a_n, \\
e_1 = (A_1 - a_1E - A_2)/(-2a_1), \\
e_2 = (A_1 - a_2E - +a_2e_1 - A_3)/2(a_1 - a_2), \\
\dots \\
e_k = (A_1 - a_kE + a_ke_1 - (a_1 - a_k)e_2 - \dots - (a_{k-2} - a_k)e_{k-1} - A_k)/2(a_{k-1} - a_k), \\
\dots \\
e_{n-1} = (A_1 - a_{n-1}E + a_{n-1}e_1 - (a_1 - a_{n-1})e_2 - \dots - (a_{n-3} - a_{n-1})e_{n-2} - A_{n-1})/2(a_{n-2} - a_{n-1}), \\
e_n = E - e_1 - e_2 - \dots - e_{n-1}.
\end{gathered}$$

□

Теперь приведем лемму о достаточном условии на “хорошую” систему точек.

Лемма 4. $\operatorname{rank}\mathcal{H} < q \Rightarrow \det\|\rho(g_i, g_j)\| = 0.$

Доказательство. Покажем, что $\|\rho(g_i, g_j)\| = \mathcal{H}R^T$, где R — некоторая матрица. Пусть $h_1, \dots, h_q$ — строки матрицы $\mathcal{H}$, $r_1, \dots, r_q$ — строки матрицы R. Построим матрицу R. Будем последовательно помещать начало координат в точки $g_1, \dots, g_q$. Пусть начало координат помещено в точку g_i, тогда $\mathrm{x}_1^i, \dots, \mathrm{x}_{m_x}^i, \mathrm{y}_1^i, \dots, \mathrm{y}_{m_y}^i$ — различные x, y-координаты точек соответственно. Пусть $r_i = \left(\mathrm{x}_1^i, \dots, \mathrm{x}_{m_x}^i, \mathrm{y}_1^i, \dots, \mathrm{y}_{m_y}^i\right)$. Зафиксируем характеристическую матрицу $\mathcal{H}$ при $i = 1$. Для $i \in \{2, \dots, q\}$ переставим [5] элементы векторов r_i так, чтобы характеристическая матрица $\mathcal{H}_i$, соответствующая r_i, совпадала [6] с $\mathcal{H}$. Тогда

$$R = \begin{pmatrix} |r_1| \\ |r_2| \\ \vdots \\ |r_q| \end{pmatrix},$$

где операция $|\cdot|$ берется покоординатно. Пусть $g_i = (x_i, y_i)$, заметим, что $h_jr_i^T = |x_j| + |y_j| = \rho(g_i, g_j)$, так как $g_i = (0, 0)$ при построении r_i. Следовательно $\mathcal{H}R^T = \|\rho(g_i, g_j)\|$.

Теперь построим такую матрицу P, что $\mathcal{H}P = R$. Рассмотрим блочную матрицу

$$P = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0^T & Y \end{pmatrix},$$

где X — матрица размера $m_x \times m_x$, с элементами $x_{ij} = |\mathrm{x}_i^1 - \mathrm{x}_j^1|$, Y — матрица размера $m_y \times m_y$, с элементами $y_{ij} = |\mathrm{y}_i^1 - \mathrm{y}_j^1|$. Заметим, что $X = X^T, Y = Y^T$, следовательно и $P = P^T$. Более того, матрицы X, Y имеют вид (*), следовательно они невырождены. Тогда матрица P невырождена, действительно:

$$\det X \neq 0, \det Y \neq 0 \Rightarrow \det P = \det X \cdot \det Y \neq 0.$$

Случай, когда $m_x = 1$ или $m_y = 1$ мы опускаем, так как тогда все точки лежат на одной прямой. Осталось проверить, что $\mathcal{H}P = R$. Рассмотрим произведение

$$h_ip_j^T = r_{ij},$$

где h_i — строка матрицы $\mathcal{H}$, p_j — строка матрицы P. Возможны следующие случаи:

1. $j \in \{1, 2, \dots, m_x\}$: r_{ij} — модуль x-координаты g_j, когда начало координат в точке g_i.

2. $j \in \{m_x + 1, \dots, m_x + m_y\}$: r_{ij} — модуль y-координаты g_j, когда начало координат в точке g_i.

Таким образом, получили

$$\|\rho(g_i, g_j)\| = \mathcal{H}R^T = \mathcal{H}\left(\mathcal{H}P\right)^T = \mathcal{H}P^T\mathcal{H}^T = \mathcal{H}P\mathcal{H}^T,$$

где P — невырожденная матрица размера $M \times M$, где $M = m_x + m_y$.

Если $\operatorname{rank}\mathcal{H} < q$, то $\det\|\rho(g_i, g_j)\| = 0$, так как $\operatorname{rank} AB \leqslant \min(\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B)$. □

[5] При этом получается вектор $\left(\mathrm{x}_{j_1}^i, \dots, \mathrm{x}_{j_{m_x}}^i, \mathrm{y}_{k_1}^i, \dots, \mathrm{y}_{k_{m_y}}^i\right)$, т.е. первые m_x и последние m_y координат переставляются независимо.

[6] См. определение характеристического вектора.

Следствие 4. *Имеет место следующее представление матрицы попарных l_1-расстояний системы точек:*

$$\|\rho(g_i, g_j)\| = \mathcal{H}P\mathcal{H}^T,$$

где P невырожденная матрица.

В леммах 1–3 приведено доказательство Основной Теоремы для метрики Хэмминга, причем от типа метрики зависят только рассуждения, приведенные в лемме 3. В лемме 4 дается частичное обобщение для l_1-метрики (только достаточное условие). Доказательство леммы 4 и следствия 4 дают новое представление матрицы попарных l_1-расстояний. Отметим также, что в утверждении 3 содержится доказательство (точнее нетривиальная его часть) эквивалентности понятий замкнутого пути (цикла) и суммы прямоугольников.

Список литературы

[1] L. Reid and X. Sun. Distance matrices and ridge function interpolation. *Can. J. Math.*, 45(6):1313–1323, 1993.

[2] D. Braess and A. Pinkus. Interpolation by ridge functions. *J. Approx. Theory*, 73(2):218 – 236, 1993.

[3] Ю.И. Журавлев. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации. *Пробл. Кибернетики*, 33:5 – 68, 1978.

[4] Э.Б. Винберг. *Курс алгебры.* М.: МЦНМО, 2011.

[5] А.Г. Дьяконов. Раскраски бинарных матриц. 2011. http://alexanderdyakonov.narod.ru/novmysldjakonov.pdf.