Метрический критерий k-сингулярности (для метрики Хэмминга и l_1-метрики)

Фигурнов М. В.

Рассматривается система попарно различных точек $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q$ пространства $\mathbb{R}^m$. В [1] даны определения матриц $T_S = [T^1 \dots T^m]$ (столбцы этой матрицы — характеристические векторы классов эквивалентности по координатам), P_S (матрица попарных расстояний метрики Хэмминга), P'_S (матрица попарных расстояний l_1-метрики), пространств $U^k[S] \equiv U^k(T_S)$, $U^k(P_S)$, $U^k(P'_S)$, а также доказана лемма 1. Ниже исследуется понятие *k-сингулярности* и его связь с метрикой Хэмминга и l_1-метрикой.

Определение 1. *Система точек S называется k-сингулярной, если размерность пространства $U^k[S]$ меньше q.*

Лемма 1. $U^k[S] = U^k(P_S) = U^k(P'_S)$

Лемма 2. *При $k \le m$ верно*

$$U^k[S] = L(\{\tilde{t}_1 \circ \dots \circ \tilde{t}_k | \tilde{t}_i \in T^{z(i)}, z(i) \neq z(j) \text{ при } i \neq j\}) \tag{1}$$

Доказательство. По определению, $U^k[S] \equiv L(\{\tilde{t}_1 \circ \dots \circ \tilde{t}_n | \tilde{t}_i \in T_S, n \le k\})$, поэтому вложение $\supseteq$ в (1) очевидно.

Докажем вложение $\subseteq$. Пусть $\tilde{0} \neq \tilde{t} \in U^k[S]$, то есть $\tilde{t} = \tilde{t}_1 \circ \dots \circ \tilde{t}_n, \tilde{t}_i \in T^{z(i)}, n \le k$. Если $z(i) = z(j), i \neq j$, то $\tilde{t}_i = \tilde{t}_j$, поскольку $\tilde{t} \neq \tilde{0}$ по предположению, а различные столбцы $T^{z(i)}$ соответствуют различным классам эквивалентности, то есть их произведение равно нулевому вектору. Таким образом можно потребовать, чтобы $z(i) \neq z(j)$ при $i \neq j$.

Пусть $n < k$. Поскольку сумма столбцов любой подматрицы T^i равна $\tilde{1}$, $\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ $\tilde{x} = \sum_{\tilde{t}' \in T^i} \tilde{x} \circ \tilde{t}'$. Обозначим элементы множества $\{\{1, 2, \dots, k\} \setminus \{z(1), \dots, z(n)\}\}$, занумерованные в любом порядке, через $z'(1), \dots, z'(k-n)$. Получим:

$$\tilde{t} = \sum_{\tilde{t}'_1 \in T^{z'(1)}} \sum_{\tilde{t}'_2 \in T^{z'(2)}} \cdots \sum_{\tilde{t}'_{k-n} \in T^{z'(k-n)}} \tilde{t}'_1 \circ \tilde{t}'_2 \circ \dots \circ \tilde{t}'_{k-n} \circ \tilde{t}_1 \circ \dots \circ \tilde{t}_n$$

Эта сумма принадлежит линейному замыканию из правой части (1).

□

Определение 2. *Функция $f(\tilde{x})$ называется полиномом степени $n = 0, 1, 2, \dots$, если она представима в виде $f(\tilde{x}) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot \tilde{x}^i$, причём $a_n \neq 0$.*

Лемма 3. *Пусть $f(\tilde{x})$ — полином степени $n \ge 1$, $\tilde{y} \neq \tilde{0}$ — бинарный вектор. Тогда $f(\tilde{x} - \tilde{y}) - f(\tilde{x}) = \tilde{y} \circ g(\tilde{x})$, где $g(\tilde{x})$ есть полином степени $(n-1)$.*

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
&f(\tilde{x}-\tilde{y})-f(\tilde{x})=\sum_{i=0}^{n} a_i\cdot((\tilde{x}-\tilde{y})^i-\tilde{x}^i)= \\
&=\sum_{i=0}^{n} a_i\cdot\Big(\sum_{j=0}^{i}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\cdot\tilde{x}^j\circ\tilde{y}^{i-j}-\tilde{x}^i\Big)= \\
&=a_0\cdot(\tilde{1}-\tilde{1})+\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\Big(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\cdot\tilde{x}^j\circ\tilde{y}^{i-j}+\tilde{x}^i-\tilde{x}^i\Big)= \\
&=\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\Big(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\cdot\tilde{x}^j\circ\tilde{y}^{i-j}\Big)=\{\tilde{y}\text{ бинарный вектор}\}= \\
&=\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\Big(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\cdot\tilde{x}^j\circ\tilde{y}\Big)=\tilde{y}\circ\sum_{i=1}^{n} a_i\cdot\Big(\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^{i-j}\binom{i}{j}\cdot\tilde{x}^j\Big)= \\
&=\tilde{y}\circ g(\tilde{x}).
\end{aligned}
$$

$g(\tilde{x})$ — полином степени $(n-1)$, поскольку коэффициент при $\tilde{x}^{n-1}$ равен

$$a_n(-1)^{n-(n-1)}\binom{n}{n-1}=-na_n\neq 0.$$

□

Теорема 1. *Система точек $S=\{\tilde{s}_i\}_{i=1}^{q}$ пространства $\mathbb{R}^m$ является k-сингулярной тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор $(c_1,\ldots,c_q)$ такой, что для всех $\tilde{s}\in\mathbb{R}^m$ справедливо равенство*

$$\sum_{i=1}^{q} c_i\rho^k(\tilde{s},\tilde{s}_i)=0, \tag{2}$$

где ρ — метрика Хэмминга или l_1-метрика.

Доказательство. Введём вспомогательные обозначения:

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\rho}^k(\tilde{s},S)=(\rho^k(\tilde{s},\tilde{s}_1),\ldots,\rho^k(\tilde{s},\tilde{s}_q))^T,\\
&R^k[S]=L(\{\rho^k(\tilde{s},S)|\tilde{s}\in\mathbb{R}^m\}).
\end{aligned}
$$

Необходимость. Метрика Хэмминга. Пусть S k-сингулярна, т.е. $\exists\tilde{c}=(c_1,\ldots,c_q)\neq\tilde{0}$: $\tilde{c}\in L^{\perp}(U^k[S])$. Рассмотрим $\tilde{s}\in S$. $\tilde{\rho}(\tilde{s},S)$ есть столбец P_S, поэтому $\tilde{\rho}^k(\tilde{s},S)\in U^k(P_S)$. В силу леммы 1, $L^{\perp}(U^k[S])=L^{\perp}(U^k(P_S))$. Таким образом, выполнено (2).

Пусть теперь $\tilde{s}\notin S$. Очевидно, что $(c_1,\ldots,c_q,0)\in L^{\perp}(U^k[S\cup\{\tilde{s}\}])=L^{\perp}(U^k(P_{S\cup\{\tilde{s}\}}))$. Следовательно, выполнено равенство $(c_1,\ldots,c_q,0)P^k_{S\cup\{\tilde{s}\}}=\tilde{0}$. Рассматривая умножение строки на столбец, соответствующий $\tilde{s}$, получаем требуемое утверждение.

l_1-метрика. Доказывается аналогично случаю метрики Хэмминга при замене матрицы P_S на P'_S.

Достаточность. Нужно доказать, что $L^{\perp}(R^k[S])\subseteq L^{\perp}(U^k[S])$. Докажем эквивалентное утверждение: $U^k[S]\subseteq R^k[S]$. Пусть $k\leq m$ и $\tilde{0}\neq\tilde{w}=\tilde{w}_1\circ\cdots\circ\tilde{w}_k\in U^k[S]$, где $\tilde{w}_i\in T^{z(i)}$, $z(i)\neq z(j)$ при $i\neq j$. В силу леммы 2 достаточно показать, что $\tilde{w}\in R^k[S]$.

Поскольку $\tilde{w} \neq \tilde{0}$, выполнено $\tilde{w}_i \neq \tilde{0}, i = 1, \dots, k$ и $\exists\alpha\colon (\tilde{w}_1)_\alpha \neq 0, \dots, (\tilde{w}_k)_\alpha \neq 0$. Это означает, что вектор $\tilde{w}$ представим в виде произведения столбцов T_S, соответствующих k координатам точки $\tilde{s}_\alpha$.

Метрика Хэмминга. Пусть $\tilde{s} = \tilde{s}_\alpha, \tilde{s}' = \tilde{s} + \varepsilon\tilde{e}_{z(1)}$, причём ε возьмём таким, что $(\tilde{s}')_{z(1)} \notin \{(\tilde{s}_i)_{z(1)} | i \in \{1, \dots, m\}\}$.

Заметим, что

$$\forall \tilde{u} \in \mathbb{R}^m \ \tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S) = \left(\sum_{i=1}^{m} (\tilde{1} - \tilde{t}_i)\right)^k = \left(m \cdot \tilde{1} - \sum_{i=1}^{m} \tilde{t}_i\right)^k,$$

где $\tilde{t}_i$ — соответствующий столбец матрицы T^i, если координата $(\tilde{u})_i$ встречается среди i-х координат точек S, иначе $\tilde{0}$. Это выражение есть полином степени k от $\sum_{i=1}^{m} \tilde{t}_i$.

Ясно, что в введённых обозначениях у $\tilde{s}$ и $\tilde{s}'$ будут совпадать все векторы $\tilde{t}_i$, кроме $z(1)$-ого, который у $\tilde{s}'$ будет нулевым. Применим лемму 3 при $\tilde{x} = \sum_{i=1}^{m} \tilde{t}_i, \tilde{y} = \tilde{t}_{z(1)} \equiv \tilde{w}_1, f(\tilde{x}) = (m - \tilde{x})^k$. Получим, что $\tilde{\rho}^k(\tilde{s}, S) - \tilde{\rho}^k(\tilde{s}', S) = \tilde{w}_1 \circ h(\tilde{x}) \in R^k[S]$, где $h(\tilde{x})$ — полином степени $(k-1)$.

На следующем шаге возьмём $\tilde{s} = \tilde{w}_1 \circ h(\tilde{x}), \tilde{s}' = \tilde{s} + \varepsilon\tilde{e}_{z(2)}$, ε выберем аналогично. Применяя лемму 3, получим, что $\tilde{w}_1 \circ \tilde{w}_2 \circ h(\tilde{x}) \in R^k[S]$, где $h(\tilde{x})$ есть полином степени $(k-2)$.

Повторим процедуру $(k-2)$ раз для $\tilde{w}_3, \dots, \tilde{w}_k$. Получим, что $\tilde{w}_1 \circ \dots \circ \tilde{w}_k \circ h(\tilde{x}) \in R^k[S]$, где $h(\tilde{x})$ — полином 0 степени, то есть ненулевая константа (см. определение 2). Значит, $\tilde{w} \in R^k[S]$.

l_1-метрика. Очевидно, что

$$\forall \tilde{u} \in \mathbb{R}^m \ \tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\tilde{t} \in T^i} |(\tilde{u})_i - coord(\tilde{t})| \cdot \tilde{t},$$

где $coord(\tilde{t})$ — значение координаты, которой соответствует столбец $\tilde{t}$ матрицы T^i. Таким образом, $\tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S)$ имеет производную любого порядка везде, кроме конечного числа точек, где выражение под одним из модулей меняет знак.

Распишем производную k порядка по координатам $z(1), \dots, z(k)$ в точке дифференцируемости:

$$\frac{\partial^k}{\partial u_{z(1)} \partial u_{z(2)} \dots \partial u_{z(k)}} \tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S) = k! \prod_{i=1}^{k} \sum_{\tilde{t} \in T^{z(i)}} \operatorname{sgn}((\tilde{u})_{z(i)} - coord(\tilde{t})) \cdot \tilde{t}$$

Рассмотрим k-мерный булев куб и сопоставим каждой его точке $x_1 x_2 \dots x_k$ точку пространства $\mathbb{R}^m$

$$\tilde{s}_{x_1 x_2 \dots x_k} = \tilde{s}_\alpha + (-1)^{x_1} \varepsilon\tilde{e}_{z(1)} + (-1)^{x_2} \varepsilon\tilde{e}_{z(2)} + \dots + (-1)^{x_k} \varepsilon\tilde{e}_{z(k)},$$

где $\varepsilon > 0$ — малое число, такое, что внутри «куба» находится лишь точка $\tilde{s}_\alpha$ и во всех точках $\tilde{s}_{x_1 x_2 \dots x_k}$ функция $\tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S)$ дифференцируема. Обозначим производную $\tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S)$ в точке $x_1 x_2 \dots x_k$ через $p(x_1 x_2 \dots x_k)$.

Докажем, что $p(x_1 x_2 \dots x_k) \in R^k[S]$. Для этого возьмём шар, содержащий все точки $s_{x_1 x_2 \dots x_k}$. Образ шара при воздействии непрерывным отображением $\tilde{\rho}^k(\tilde{u}, S)$ есть компакт в конечномерном евклидовом пространстве, то есть замкнутое (и ограниченное) множество. Производная является предельной точкой множества, поэтому она тоже будет принадлежать этому компакту.

Заметим теперь, что $\forall x_2 \dots x_k \in B^{k-1}$:

$$p(0\,x_2 \dots x_k) - p(1\,x_2 \dots x_k) =$$
$$= k! \sum_{\tilde{t} \in T^{z(1)}} \Big(\operatorname{sgn}\big((\tilde{s}_\alpha)_{z(1)} + \varepsilon \tilde{e}_{z(1)} - coord(\tilde{t})\big) - \operatorname{sgn}\big((\tilde{s}_\alpha)_{z(1)} - \varepsilon \tilde{e}_{z(1)} - coord(\tilde{t}))\big)\Big) \cdot \tilde{t} \circ$$
$$\circ \prod_{i=2}^{k} \sum_{\tilde{t} \in T^{z(i)}} \operatorname{sgn}\big((\tilde{s}_\alpha)_{z(i)} + (-1)^{x_i} \varepsilon \tilde{e}_{z(i)} - coord(\tilde{t})\big) \cdot \tilde{t} =$$
$$= k! \cdot 2\tilde{w}_1 \circ \prod_{i=2}^{k} \sum_{\tilde{t} \in T^{z(i)}} \operatorname{sgn}\big((\tilde{s}_\alpha)_{z(i)} + (-1)^{x_i} \varepsilon \tilde{e}_{z(i)} - coord(\tilde{t})\big) \cdot \tilde{t} =$$
$$= p_1(x_2 \dots x_k)$$

Итак, $p_1(x_2 \dots x_k)$ задана на B^{k-1}, причём её значения представимы в виде $\tilde{w}_1 \circ \hat{p}_1(x_2 \dots x_k)$. Легко убедиться, что $p_1(0\,x_3 \dots x_k) - p_1(1\,x_3 \dots x_k) = p_2(x_3 \dots x_k) = \tilde{w}_1 \circ \tilde{w}_2 \circ \hat{p}_2(x_3 \dots x_k)$. Продолжая, получим, что $\tilde{w}_1 \circ \dots \circ \tilde{w}_k = \tilde{w} \in R^k[S]$.

Опишем теперь построение, позволяющее доказать теорему при $k > m$ для обеих метрик. Пусть $k > m, i \in \{1, \dots, m\}$. Покажем, что $\tilde{e}_i \in R^k[S]$. Для этого возьмём $\tilde{s}_\alpha = \tilde{s}_i$. Из свойств матрицы T_S и того, что в системе точек S нет двух точек с одинаковыми координатами, вектор $\tilde{e}_i$ равен произведению m столбцов матрицы T_S, соответствующих этой точке. Используя вышеописанную процедуру, убеждаемся, что $\tilde{e}_i \in R^k[S]$. Итак, $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_m \in R^k[S]$, следовательно, $R^k[S] = \mathbb{R}^m$. Отсюда $\tilde{w} \in R^k[S]$.

□

Список литературы

[1] А.Г. Дьяконов. Критерии вырожденности матрицы попарных l_1-расстояний и их обобщения.