МОМО-16. Домашняя работа 2

Срок сдачи: 31 октября 2016, 10:30

Примечание: Решение каждой задачи должно быть в достаточной степени математически строго обоснованным. В частности, если Вы решаете задачу оптимизации с помощью системы уравнений (например, приравниваете градиент нулю или используете условия Каруша-Куна-Таккера), то Ваше решение должно содержать комментарии о корректности этого перехода. Если в Вашем решении отсутствуют подобные комментарии, то такое решение засчитано не будет.

1 Для каждой из следующих задач найдите оптимальное значение P^* и множество оптимальных решений X^*:

(a) (Линейная функция с энтропийным регуляризатором)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ c^\top x + \sum_{i=1}^n x_i \ln x_i : \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\},$$

где $c \in \mathbb{R}^n$.

(b) (Линейное программирование с одним ограничением)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{ c^\top x : a^\top x \leq \beta \},$$

где $a, c \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

(c) (Линейная функция на вероятностном симплексе)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ c^\top x : x \succeq 0 \wedge \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\},$$

где $c \in \mathbb{R}^n$.

2 Для каждой из следующих задач оптимизации: 1) Построить двойственную задачу. 2) Выписать явные формулы, позволяющие по решению двойственной задачи восстановить (вычислить) решение прямой.

(a) (Гребневая регрессия)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n,\, s \in \mathbb{R}^m} \left\{ \frac{1}{2} \|s - b\|_2^2 + \frac{\rho}{2} \|x\|_2^2 : s = Ax \right\},$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\rho \in \mathbb{R}_{++}$.

(b) (SVM)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n,\, t \in \mathbb{R}^m} \left\{ \sum_{i=1}^m t_i + \frac{\rho}{2} \|x\|_2^2 : (Ax \succeq \vec{1} - t) \wedge (t \succeq 0) \right\},$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{1} := (1, \ldots, 1)$.

3 (Эквивалентная формулировка задачи через надграфик) Пусть $f : Q \to \mathbb{R}$ — некоторая функция. Рассмотрим следующие две задачи оптимизации:

$$(P_1) \quad \min_{x \in Q} f(x) \qquad\qquad (P_2) \quad \min_{x \in Q,\, t \in \mathbb{R}} \{t : t \geq f(x)\}$$

Докажите, что задачи (P_1) и (P_2) являются эквивалентными, в том смысле, что

(a) Оптимальные значения этих задач совпадают: $P_1^* = P_2^*$, где $P_1^* := \inf_{x \in Q} f(x)$ и $P_2^* := \inf_{x \in Q,\, t \in \mathbb{R}} \{t : t \geq f(x)\}$ (при этом допускается случай, что $P_1^* = -\infty$ или $P_2^* = -\infty$).

(b) Множества оптимальных решений этих задач совпадают с точностью до проекции: $\mathrm{Opt}(P_1) = \pi_1 (\mathrm{Opt}(P_2))$, где $\mathrm{Opt}(P_1) := \{x \in Q : f(x) = P_1^*\}$, $\mathrm{Opt}(P_2) := \{(x, t) \in Q \times \mathbb{R} : (t \geq f(x)) \wedge (t = P_2^*)\}$ и π_1 — оператор проектирования множества пар (x, t) в множество соответствующих первых элементов x (например, $\pi_1(\{(1, 1), (2, 1), (3, 2)\}) = \{1, 2, 3\}$).

4 Используя прием из предыдущей задачи (или аналогичный ему), свести эквивалентным образом следующие негладкие безусловные задачи к гладким условным:

(a) (Максимум из конечного числа гладких функций)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max\{f_1(x), \dots, f_m(x)\},$$

где $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — заданные гладкие функции.

(b) (Наилучшее решение линейной системы в L_∞-норме)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_\infty,$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\|z\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq m} |z_i|$.

(c) (Задача LASSO)

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \rho \|x\|_1 \right\},$$

где $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\rho \in \mathbb{R}_{++}$, $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$.

Указание: Воспользуйтесь тем, что $|x_i| = \max\{x_i, -x_i\}$ и введите по одной новой переменной t_i для каждого максимума.