

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова Факультет
Вычислительной Математики и Кибернетики
Кафедра Математических Методов Прогнозирования

Выпускная квалификационная работа бакалавра 417 группы

**«Морфинг изображений на основе дробно-линейных
преобразований»**

Выполнил:

студент 4 курса 417 группы

Тюрин Александр Игоревич

Научный руководитель:

д.т.н., профессор

Местецкий Леонид Моисеевич

Содержание

1	Введение	2
2	Определения и обозначения	2
3	Постановка задачи	4
4	Билинейные преобразования	4
5	Дробно-билинейные преобразования	5
6	Обобщенные барицентрические координаты	6
7	Алгоритм преобразования выпуклой четырехугольной сетки	7
7.1	Пример использования алгоритма для преобразования флагов	8
7.2	Пример использования алгоритма для преобразования змеи	11
8	Вычислительные эксперименты	11
9	Выделение признаков у пальцев ладони	16
10	Заключение	17
10.1	Выводы	17
10.2	Что выносится на защиту	18

1 Введение

Преобразование точек в пространстве является одной из важнейших задач в вычислительной математике. В компьютерной графике все объекты состоят из вершин и ребер, каждая грань представляет собой треугольник или четырехугольник. Хотелось бы придумать удобное средство для описания каждой точки внутри грани так, чтобы после преобразования объекта была ясна новая координата этой точки. Аналогичную задачу можно представить в анализе изображений, где преобразование изображений из одного вида в другой используется очень часто.

Пусть у нас есть некоторая область на плоскости, которую мы аппроксимируем сеткой из четырехугольников или треугольников. Мы хотим перевести эту сетку в некоторую другую сетку с такой же структурой. В случае треугольников можно для каждой точки найти барицентрические координаты в начальной сетке, с помощью этих барицентрических координат можно найти координаты точки в новой сетке. Но часто приходится работать с четырехугольниками, чаще всего в них используются обобщенные барицентрические координаты, основанные на билинейном преобразовании. Для поиска обобщенных барицентрических координат нам нужно вычислить обратное преобразование к билинейному. Данная процедура приводит к решению системы из уравнений с полиномами второй степени. В конце 2014 года Sederberg T. W., Zheng J. [1] предложили новый подход к решению этой задачи на основе дробно-линейных преобразований, который на практике оказывается более удобным.

В данной работе была задача: сравнение билинейного преобразования с новым методом, применение дробно-билинейного преобразования для преобразования изображений.

2 Определения и обозначения

Рассмотрим выпуклый четырехугольник с вершинами $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$, $i = 0, 1$; $j = 0, 1$, введем следующие понятия:

Определение 2.1. *Билинейным преобразованием будем называть $P(s, t) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$*

$$P(s, t) = P_{00}(1-s)(1-t) + P_{10}s(1-t) + P_{01}(1-s)t + P_{11}st \quad (1)$$

Определение 2.2. Дробно-билинейным преобразованием будем называть $Q(s, t) : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $w_{ij} \geq 0$:

$$Q(s, t) = \frac{w_{00}P_{00}(1-s)(1-t) + w_{10}P_{10}s(1-t) + w_{01}P_{01}(1-s)t + w_{11}P_{11}st}{w_{00}(1-s)(1-t) + w_{10}s(1-t) + w_{01}(1-s)t + w_{11}st} \quad (2)$$

Дробно-билинейное преобразование является обобщением билинейного преобразования, они совпадают при $w_{ij} = 1 \ \forall i, j$. w_{ij} называется весом вершины P_{ij} .

Определение 2.3. Выпуклой четырехугольной сеткой $S(N, M)$ будем называть множество вершин $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$, $i = 1, N$; $j = 1, M$ и множество ребер V таких, что $V = \{(a, b) : (a = P_{ij} \text{ and } b = P_{i,j+1}, i = 1..N, j = 1..M - 1) \text{ or } (a = P_{ij} \text{ and } b = P_{i+1,j}, i = 1..N - 1, j = 1..M)\}$, причем каждый четырехугольник с вершинами $P_{ij} - P_{i,j+1} - P_{i+1,j+1} - P_{i+1,j}$ является выпуклым. (Пример Рис.4)

Определение 2.4. Будем говорить, что точка принадлежит выпуклой четырехугольной сетке $S(N, M)$, если эта точка содержится в некотором четырехугольнике этой сетки.

Определение 2.5. Пусть $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Дробно-линейной функцией будем называть $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$f(x, y) = \frac{a_1x + a_2y + a_3}{b_1x + b_2y + b_3}$$

Обозначение 2.1. Пусть $A, B, C \in \mathbb{R}^3$, тогда $|ABC| = A \times B \cdot C$ - смешанное произведение. \times - векторное произведение, \cdot - скалярное произведение.

Обозначение 2.2. Пусть $Q = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $Point(Q) = (a/c, b/c) \in \mathbb{R}^2$

Рассмотрим произвольный выпуклый четырехугольник с вершинами $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$, $i = 0, 1$; $j = 0, 1$, каждой точке $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$ поставим в соответствие $Q_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, 1)$. Пусть $\tilde{Q}_{ij} = w_{ij}Q_{ij}$. Далее мы будем часто отождествлять $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}) \iff Q_{ij} = (x_{ij}, y_{ij}, 1)$

Определение дробно-билинейного преобразования (2) можно записать в эквивалентном виде:

$$Q(s, t) = Point(\tilde{Q}_{00}(1-s)(1-t) + \tilde{Q}_{10}s(1-t) + \tilde{Q}_{01}(1-s)t + \tilde{Q}_{11}st) \quad (3)$$

3 Постановка задачи

Дана выпуклая четырехугольная сетка $S(N, M)$, фиксируем четырехугольник P_{ij} в $S(N, M)$. В P_{ij} надо найти обратное преобразование к билинейному. Аналогично, специальным образом разметив веса, найти обратное преобразование к дробно-билинейному. Сравнить обратные преобразования и провести эксперименты с ними. Предложить алгоритм преобразования выпуклой четырехугольной сетки $S(N, M)$ на основе дробно-билинейного преобразования и обратного к нему.

4 Билинейные преобразования

Билинейное преобразование (1) задается на четырех вершинах четырехугольника Рис.1а. Это преобразование позволяет любую точку, находящуюся внутри четырехугольника параметризовать с помощью s и t , то есть для любой точки P' найдется пара такая $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$, что $P' = P(s, t)$, где $P(s, t)$ - билинейное преобразование (1). Параметры s и t находятся следующим образом:

$$P' = P_{00}(1-s)(1-t) + P_{10}s(1-t) + P_{01}(1-s)t + P_{11}st \quad (4)$$

Это система эквивалента системе следующего вида:

$$\begin{cases} a_1ts + a_2t + a_3s + a_4 = 0 \\ b_1ts + b_2t + b_3s + b_4 = 0 \end{cases}$$

В данной системе выражаем t через s или наоборот и решаем квадратное уравнение (Возможно, a_1 или b_1 равны нулю, это надо учитывать). Затем подставляем решения в одно из уравнений и находим второй параметр. В результате чего мы получим две пары решений в общем случае, но из двух пар только одна пара будет удовлетворять $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Рассмотрим на примере Рис. 1а. Если там решить систему, то можно получить следующие решения:

$$f(x, y) = x^2 - 8xy + 16y^2 - 72x - 96y + 1296 \quad (5)$$

$$s = \frac{x - 4y + 36 \pm \sqrt{f(x, y)}}{24} \quad (6)$$

$$t = \frac{-x + 4y + 36 \pm \sqrt{f(x, y)}}{32} \quad (7)$$

Для точки $E = (8, 4)$ получим $(s, t) = (\frac{1}{3}, \frac{3}{4})$ и $(s, t) = (2, 2)$. Нас устраивает только $(s, t) = (\frac{1}{3}, \frac{3}{4})$, так как $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Таким образом, для билинейного преобразования (1) существует обратное преобразование, которое вычисляется через решение системы двух уравнений второй степени. Для точек внутри выпуклого четырехугольника P_{ij} решение существует и единственно.

5 Дробно-билинейные преобразования

Рассмотрим теперь дробно-билинейное преобразование (2), как говорилось раньше, оно является обобщением билинейного преобразования. В работе Thomas W.Sederberg [1] показан следующий факт. Если в четырехугольнике веса w_{ij} удовлетворяют следующему равенству:

$$\rho \equiv \frac{w_{00}w_{11}}{w_{01}w_{10}} = \frac{|Q_{01}Q_{00}Q_{10}||Q_{10}Q_{11}Q_{01}|}{|Q_{11}Q_{01}Q_{00}||Q_{00}Q_{10}Q_{11}|} \quad (8)$$

То оказывается, что для каждой точки $P' = (x, y)$ четырехугольника существует единственная пара (s, t) такая, что $P' = Q(s, t)$, где $Q(s, t)$ - дробно-билинейное преобразование (2). Пусть $P = (x, y, 1)$, тогда $P' = Point(P)$. s и t будут иметь дробно-линейную зависимость от (x, y) :

$$A_s = (\tilde{Q}_{00} \times \tilde{Q}_{01}) \times (\tilde{Q}_{10} \times \tilde{Q}_{11})$$

$$A_t = (\tilde{Q}_{00} \times \tilde{Q}_{10}) \times (\tilde{Q}_{01} \times \tilde{Q}_{11})$$

$$s = \frac{|A_s \tilde{Q}_{01} P|}{|A_s \tilde{Q}_{01} P| - |A_s \tilde{Q}_{11} P|} \quad (9)$$

$$t = \frac{|A_t \tilde{Q}_{10} P|}{|A_t \tilde{Q}_{10} P| - |A_t \tilde{Q}_{11} P|} \quad (10)$$

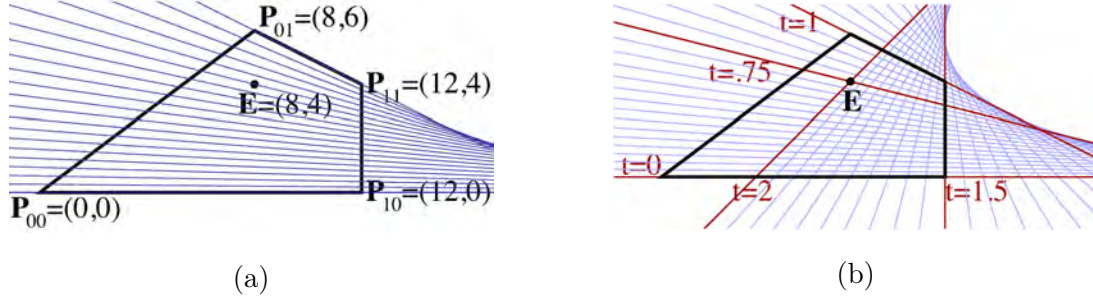


Рис. 1

Дробно-билинейное преобразование (2) при выполнении условия (8) имеет обратное преобразование, которое может быть описано в явном виде с помощью дробно-линейных функций (9) и (10). Вычисление этого преобразования существенно более удобно, чем вычисление обратного билинейного преобразования. Однако для выполнения этих вычислений необходимо обеспечить выбор весовых коэффициентов w_{ij} , для которых будет выполнено условие (8).

В работе [1] говорится, да и это несложно показать, для трапеции $\rho = 1$, в более общем случае это неверно, но, в частности, это верно для прямоугольников.

6 Обобщенные барицентрические координаты

Пусть:

$$W = w_{00}(1-s)(1-t) + w_{10}s(1-t) + w_{01}(1-s)t + w_{11}st$$

$$\phi_{00} = \frac{w_{00}(1-s)(1-t)}{W}$$

$$\phi_{10} = \frac{w_{10}s(1-t)}{W}$$

$$\phi_{01} = \frac{w_{01}(1-s)t}{W}$$

$$\phi_{11} = \frac{w_{11}st}{W}$$

Формулу (2) можно переписать:

$$Q(s, t) = \phi_{00}P_{00} + \phi_{10}P_{10} + \phi_{01}P_{01} + \phi_{11}P_{11} \quad (11)$$

То есть числа $\phi_{00}, \phi_{10}, \phi_{01}, \phi_{11}$ являются обобщенными барицентрическими координатами точки $Q(s, t)$. Пусть $\rho \equiv \frac{w_{00}w_{11}}{w_{01}w_{10}}$. В работе [3] показано, что ϕ_{ij} в точности

зависит от ρ , это говорит о том, что как бы не разметили w_{ij} , чтобы выполнялось равенство (8), барицентрические координаты не поменяются.

7 Алгоритм преобразования выпуклой четырехугольной сетки

Пусть у нас имеются две выпуклые четырехугольные сетки с одинаковым количеством вершин $S1(N,M)$ и $S2(N,M)$. Напишем алгоритм преобразования точек, принадлежащих $S1(N,M)$, в точки $S2(N,M)$ с помощью дробно-билинейного преобразования.

Алгоритм:

1. Сначала нам надо разметить веса при вершинах в $S1(N, M)$ так, чтобы для любого четырехугольника выполнялось равенство (8). Будем считать, что каждый четырехугольник индексируется (i, j) в $S1(N, M)$, если четырехугольник состоит из вершин $P_{ij} - P_{ij+1} - P_{i+1j+1} - P_{i+1j}$, $i = 1..N - 1$, $j = 1..M - 1$. На этом шаге обозначим w_{ij} - вес вершины P_{ij} , $i = 1..N$, $j = 1..M$. Пройдем в цикле по $i = 1..N - 1$. При каждом фиксированном i будем проходить в цикле $j = 1..M - 1$.

При $i = 1$ и $j = 1$: веса $w_{11} = 1$, $w_{12} = 1$, $w_{21} = 1$, а w_{22} выберем так, чтобы выполнялось (8).

При $i = 1$ и $j = 2$: w_{12} , w_{22} не будем менять, чтобы не нарушалось (8) для четырехугольника с индексом $(1, 1)$, возьмем $w_{13} = 1$, а w_{23} выберем так, чтобы выполнялось (8) для прямоугольника $(1, 2)$.

При $i = 1$ и произвольном j - аналогично.

При произвольном $i \geq 2$ и j : w_{ij} , w_{i+1j} не будем менять, чтобы не нарушалось (8) для четырехугольника с индексом $(i, j - 1)$. w_{ij+1} не будем менять, чтобы не нарушалось (8) для четырехугольника с индексом $(i - 1, j)$, а w_{i+1j+1} выберем так, чтобы выполнялось (8) для прямоугольника (i, j) .

При этой процедуре, как видно, не возникают коллизии, при этом для каждого четырехугольника выполнено (8).

2. Фиксируем некоторый четырехугольник $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$, $i = 0, 1$; $j = 0, 1$ в $S1(N, M)$ и фиксируем некоторую точку $P = (x, y, 1)$ ($Point(P)$ принадлежит фиксированному четырехугольнику). Если для четырехугольника выполнено условие (8), то прообраз (s, t) точки $Point(P)$ дробно-билинейного преобразования можем посчитать по формулам (9) и (10), при этом s и t будут иметь дробно-линейную зависимость от (x, y) .
3. Возьмем четырехугольник $P'_{ij} = (x'_{ij}, y'_{ij})$, $i = 0, 1$; $j = 0, 1$ в $S2(N, M)$, который соответствует фиксированному четырехугольнику $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$ в $S1(N, M)$. Мы вычислили s и t , причем $s, t \in [0, 1]$. Тогда образ P' точки $Point(P)$ нашего преобразования можно посчитать так:

$$P'(s, t) = Point(Q'_{00}w_{00}(1-s)(1-t) + Q'_{10}w_{10}s(1-t) + Q'_{01}w_{01}(1-s)t + Q'_{11}w_{11}st)$$

Заметим, что веса w_{ij} берутся из четырехугольника $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$ в $S1(N, M)$. Данный алгоритм каждой точке $S1(N, M)$ ставит в соответствие единственную точку из $S2(N, M)$. Назовем его **дробно-линейным преобразованием сетки**.

7.1 Пример использования алгоритма для преобразования флагов

Пусть у нас есть некоторое растровое изображение I (Рис.2), которое полностью покрывает выпуклая четырехугольная сетка $MOrig(N, M)$, состоящая из прямоугольников (Рис.3), и есть некоторая произвольная выпуклая четырехугольная сетка $MTrans(N, M)$ (Рис.4). Будем считать, что $MTrans(N, M)$ покрывает часть некоторого растрового изображения I' , значения пикселей которого нам пока неизвестны. Попробуем выяснить значения пикселей, используя предложенный алгоритм. Для этого надо пройти в цикле по пикселям i' и j' , если (i', j') не принадлежит $MTrans(N, M)$, то $I'(i', j') = (255, 255, 255)$, иначе находим образ (i, j) в $MOrig(N, M)$ с помощью предложенного алгоритма, пусть он равняется (i, j) , тогда $I'(i', j') = I(round(i), round(j))$ (Рис. 5). $round(\cdot)$ - округление до ближайшего целого. Можно было вместо $I'(i', j') = I(round(i), round(j))$ взять другой вид интерполяции. Данный пример визуализирует дробно-линейное преобразование сетки.

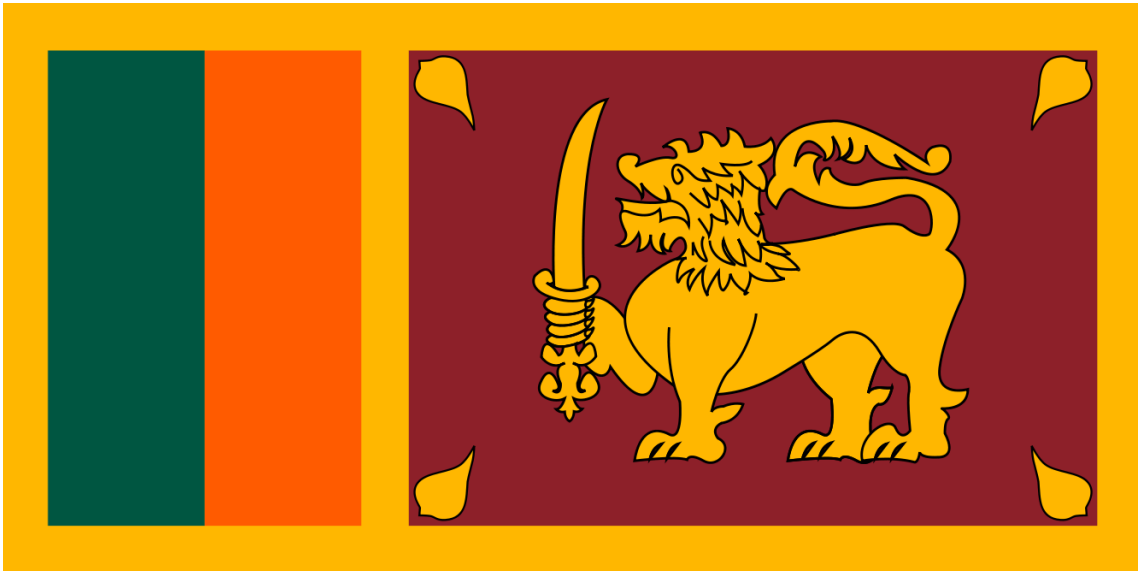


Рис. 2: Исходное изображение

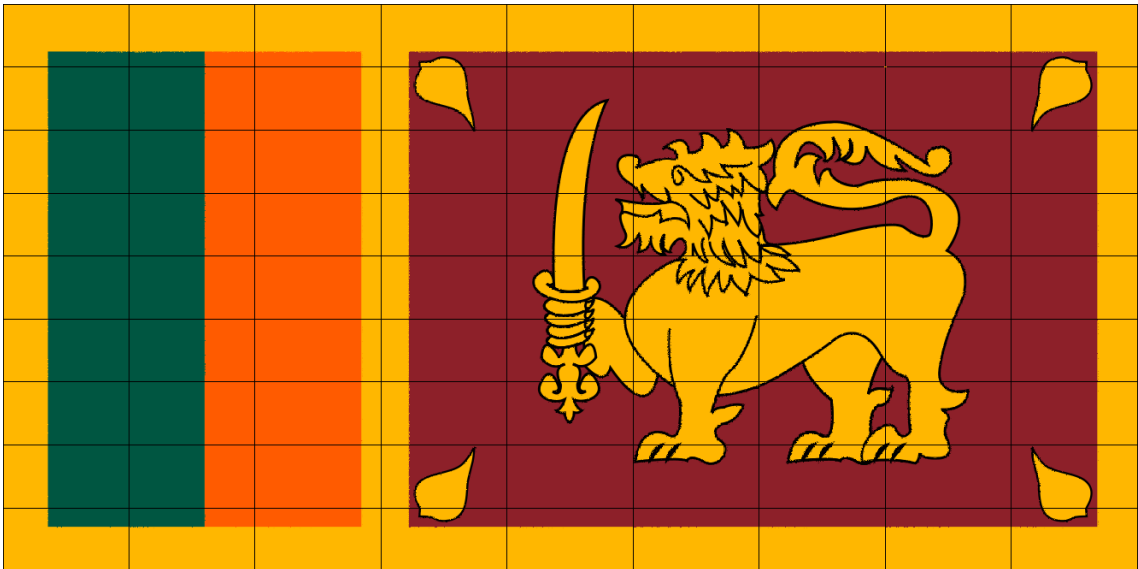


Рис. 3: Изображение с прямоугольной сеткой

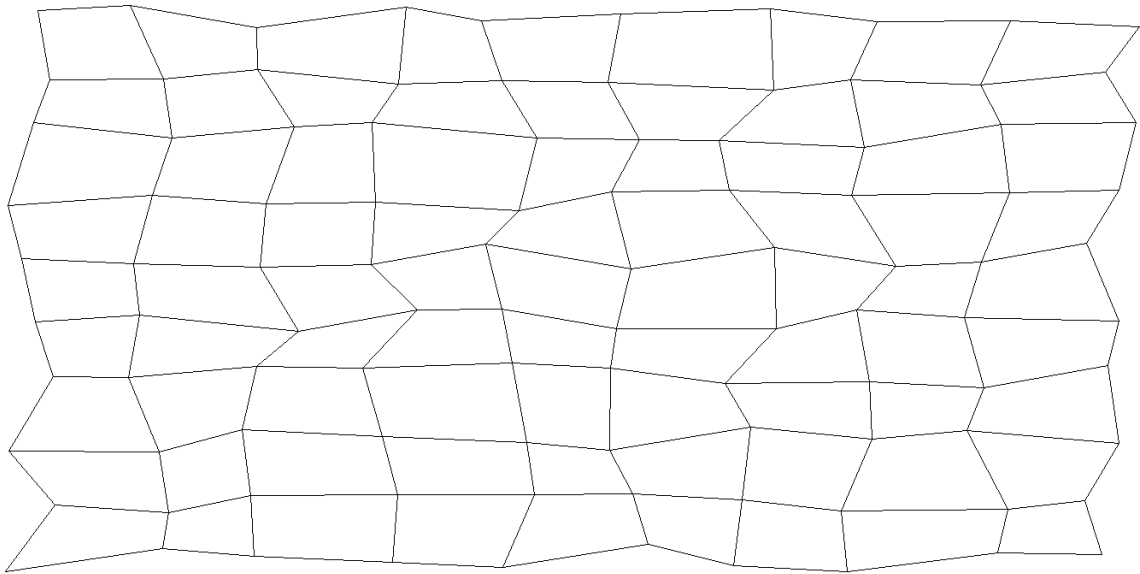


Рис. 4

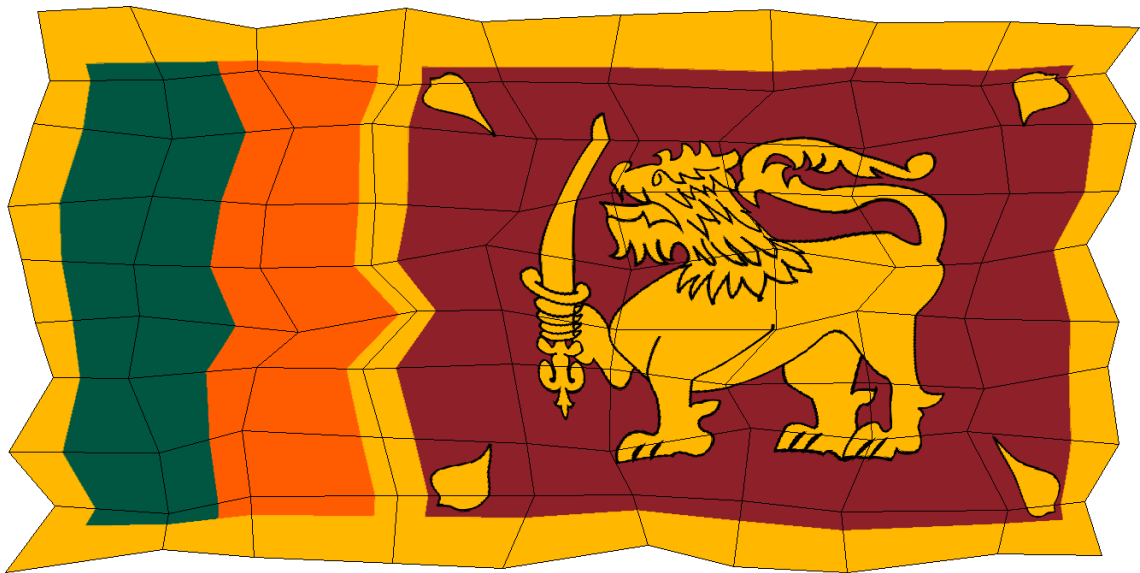


Рис. 5



Рис. 6

7.2 Пример использования алгоритма для преобразования змеи

Рассмотрим применение алгоритма для преобразования формы змеи (6) и (7), которое осуществлялось аналогичным образом. Некоторым образом на изображении (6) была построена четырехугольная сетка, которая покрывает змею. На другом изображении была построена другая сетка (7). Данные сетки были построены вручную (в дальнейших исследованиях, возможно, будет этот процесс автоматизирован), поэтому не удастся сделать большое количество прямоугольников, чтобы получить гладкие контуры, но даже так видно, что преобразование визуально прошло успешно.

8 Вычислительные эксперименты

В данном разделе рассмотрим отличие преобразований и вычислительные затраты на практике.

Разберем подробнее пример с флагом, во-первых, надо рассказать, как генерируется выпуклая четырехугольная сетка вида Рис.4. Для этого берется обычная выпуклая четырехугольная сетка с прямоугольниками рис.9, у которых горизонтальные



Рис. 7

стороны равны a , по вертикали - b и к координате x прибавляется число, сгенерированное из равномерного распределения $[-\frac{a}{4}, \frac{a}{4}]$, для координаты y - $[-\frac{b}{4}, \frac{b}{4}]$. При этом гарантируется, что все полученные четырехугольники будут выпуклыми.

Воспользуемся старыми обозначениями, пусть:

$MOrig(N, M)$ - выпуклая четырехугольная сетка, состоящая из прямоугольников.

$MTrans(N, M)$ - произвольная выпуклая четырехугольная сетка, сгенерированная из $MOrig(N, M)$ по процедуре, которая описана выше (Рис. 10).

Возьмем произвольную точку P из $MTrans(N, M)$, пусть она лежит в некотором четырехугольнике $P_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$, $i = 0, 1$; $j = 0, 1$. Найдем ее образ P' , используя дробно-линейное преобразование сетки, в $MOrig(N, M)$ с барицентрическими координатами $\phi_{00}, \phi_{10}, \phi_{01}, \phi_{11}$:

$$W = w_{00}(1-s)(1-t) + w_{10}s(1-t) + w_{01}(1-s)t + w_{11}st$$

$$\phi'_{00} = \frac{w_{00}(1-s)(1-t)}{W} \quad \phi'_{10} = \frac{w_{10}s(1-t)}{W} \quad \phi'_{01} = \frac{w_{01}(1-s)t}{W} \quad \phi'_{11} = \frac{w_{11}st}{W}$$

Ясно, так как P может лежать в произвольном выпуклом четырехугольнике, то в общем случае ее барицентрические координаты могут не содержать все веса равные 1. Точка P' будет лежать в некотором прямоугольнике в $MOrig(N, M)$. Аналогично, найдем для P обобщенные барицентрические координаты, используя билинейное

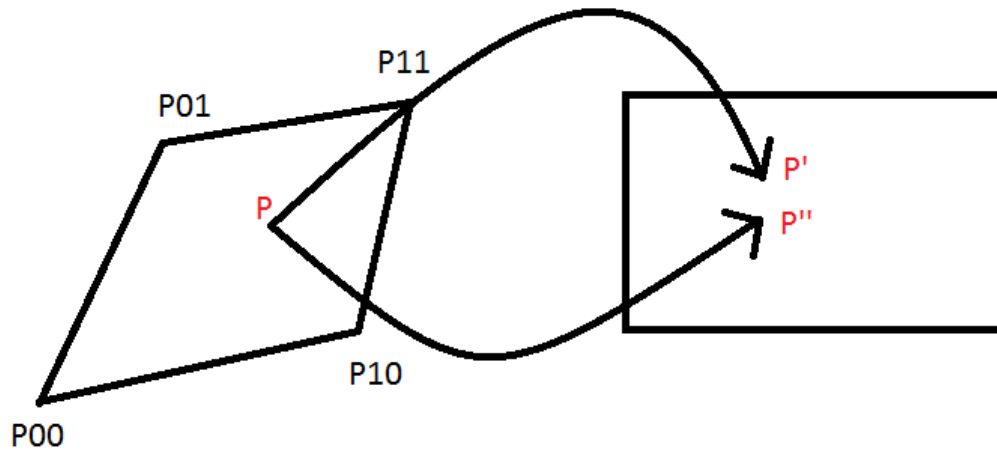


Рис. 8

преобразование, и найдем другой образ P'' .

$$\phi''_{00} = (1 - s')(1 - t') \quad \phi''_{10} = s'(1 - t') \quad \phi''_{01} = (1 - s')t' \quad \phi''_{11} = s't'$$

Попробуем проделать эту процедуру для конечного множества точек из $MTrans(N, M)$, в качестве конечного множества возьмем равномерную сетку. Зафиксируем P из $MTrans(N, M)$, и припишем к P число $\|P' - P''\|_2$, которое назовем ошибкой, таким образом мы сможем оценить, как сильно билинейное преобразование отличается от дробно-билинейного преобразования с весами, удовлетворяющими (8). Рассмотрим на примере Рис. 10. На Рис. 11 изображено значение $\|P' - P''\|_2$ в точке P , причем пикселю со значением 255 отвечает наибольшая ошибка. В примере Рис.10 и Рис.11 наибольшая ошибка равна 2.48 (1 - расстояние между двумя точками), а средняя - 0.18, причем четырехугольники имели длины сторон порядка 100 пикселей. Рассмотрим значения ρ (8) для каждого четырехугольника:

Обратим внимание на рис.11 и таблицу (1). Можно увидеть два факта: чем больше ρ отклоняется от 1, тем больше ошибка $\|P' - P''\|_2$, и чем меньше четырехугольник похож на трапецию, тем больше отклонение ρ от 1.

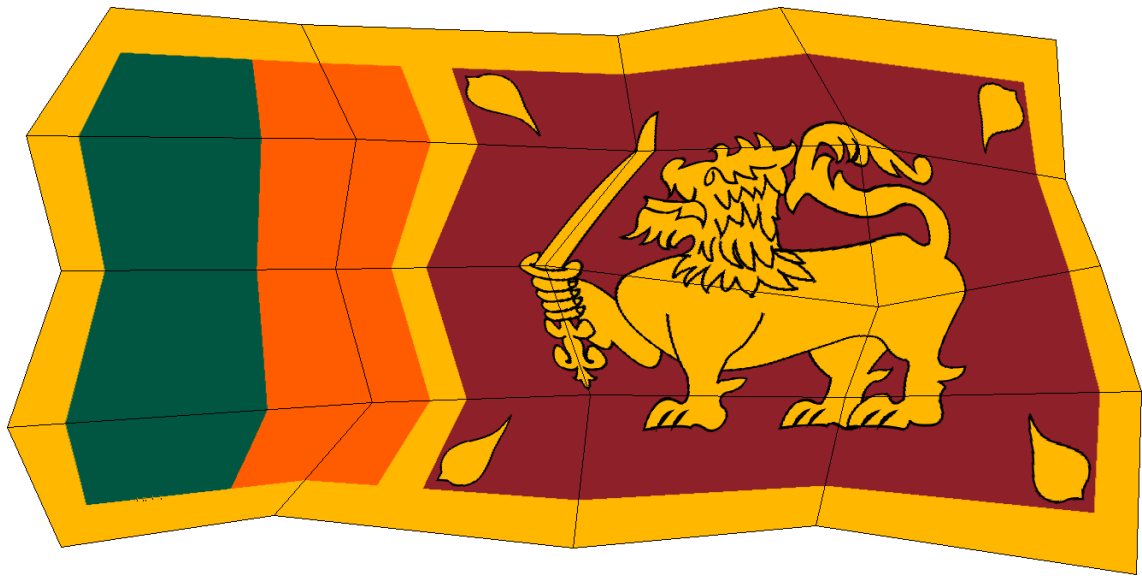


Рис. 9

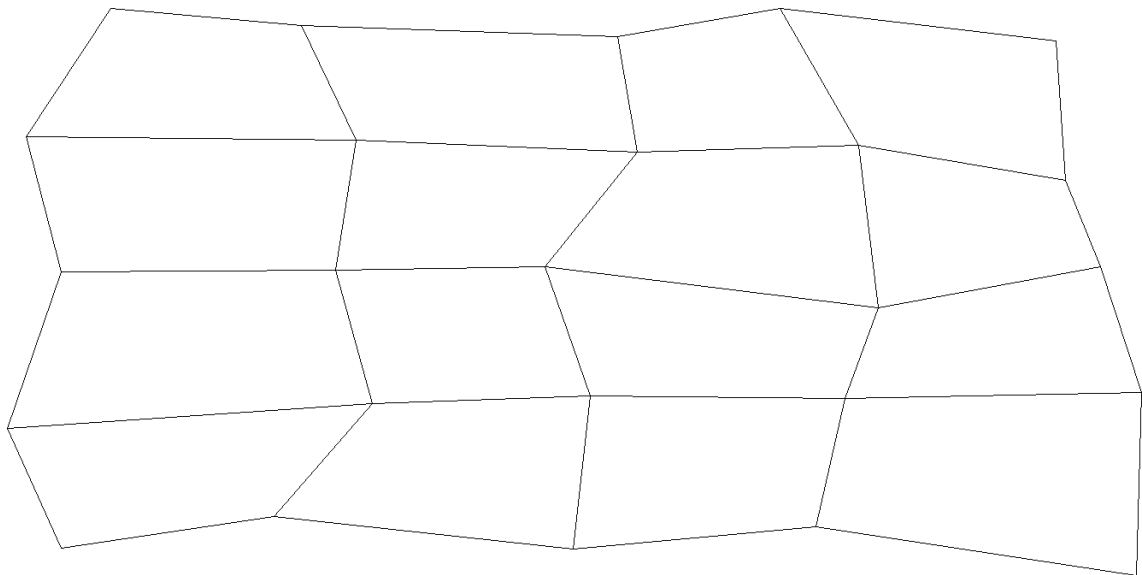


Рис. 10

Таблица 1: ρ

0.91	0.99	1.05	0.97
1	1.03	1.14	0.9
0.96	0.99	1.08	1.12
1.11	1.11	1.01	1.03

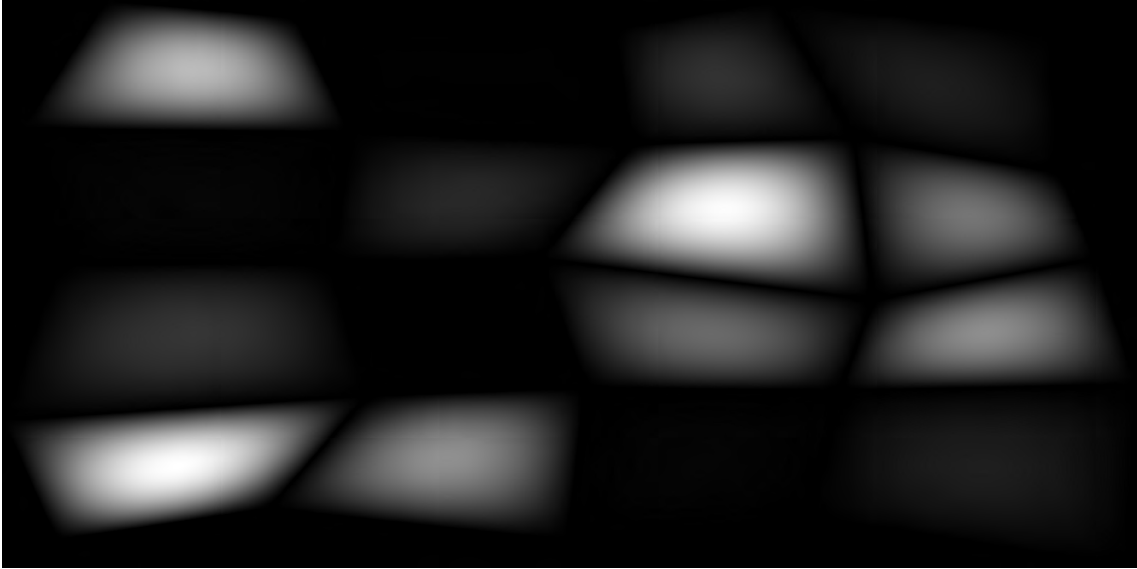


Рис. 11: Иллюстрация ошибки

В рамках данной работы были реализованы функции, которые подсчитывали обратные преобразования к билинейному и дробно-билинейному преобразованию. В случае билинейного преобразования нужно решить систему (4), которая приводит к квадратному уравнению. А в случае дробно-билинейного преобразования с весами (8) имеются явные формулы (9) и (10). Был проведен эксперимент, была взята большая выпуклая четырехугольная сетка, в котором было взято большое количество точек, для каждой точки считались s и t , используя обратное преобразование к билинейному или дробно-билинейному. Оказалось, что расчет обратного к билинейному занимает примерно в 2 раза больше времени, чем обратного преобразования к дробно-билинейному.



Рис. 12

9 Выделение признаков у пальцев ладони

Рассмотрим задачу идентификации человека по ладони. У нас имеется изображение тыльной части ладони, по этому изображению надо идентифицировать человека. Для решения данной задачи очень важно выделить хорошие признаки. Много признаков хранят в себе пальцы (как правило, морщины пальцев у разных людей разные). Пусть каждому пальцу соответствует выпуклая четырехугольная сетка $S(1,N)$, которая аппроксимирует этот палец Рис. 12. Рассмотрим два подхода выделения признаков.

Первый подход заключается в том, что мы будем каждый палец приводить к нормализованному виду, для этого возьмем эталонное изображение размера $N \times M$, покроем это изображение выпуклой четырехугольной сеткой $SN(1,N)$ с прямоугольниками. Зафиксируем некоторый палец. Для каждого пикселя P из эталонного изображения, используя билинейное преобразование (для прямоугольников это просто), будем находить соответствующий пиксель P' в выпуклой четырехугольной сетке, которая соответствует фиксированному пальцу, затем пикселю P присвоим значение P' (Рис. 13). После того, как мы каждое изображение привели к нормализованному виду, мы можем некоторыми стандартными методами обработки изображений



Рис. 13: Нормализованный палец с Рис. 12

выделить признаки. Этот подход очень прост в использовании. Но проблема этого подхода в том, что мы должны задать размер некоторого эталонного изображения, в результате мы получим, что часть пикселей будет повторяться, то есть получим избыточность, или некоторые пиксели пропадут.

Второй подход следующий, теперь мы начинаем проходить по всем пикселям P пальца, которые принадлежат выпуклой четырехугольной сетке $S(1,N)$, используя дробно-линейное преобразование сетки, мы можем найти параметры s (9) и t (10) для P . Далее мы будем работать в пространстве $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$, где в некоторых точках определена функция $f(s, t)$, равная цвету пикселя P . При таком подходе вся информация о изображении будет сохранена без избыточности. Далее выделять признаки из функции $f(s, t)$.

10 Заключение

10.1 Выводы

В данной работе был изучен новый метод нахождения обобщенных барицентрических координат, основанный на дробно-билинейном преобразовании. Было показано, что на практике нахождение обратного преобразования к дробно-билинейному происходит немного быстрее. Еще в вычислительных экспериментах было показано, что обобщенные барицентрические координаты для двух методов отличаются на практике несильно. Был предложен метод преобразования выпуклой четырехугольной

сетки, который может быть использован для преобразования изображений или областей внутри них.

10.2 Что выносится на защиту

На защиту выносятся:

1. Алгоритм преобразования изображений с помощью выпуклой четырехугольной сетки на основе дробно-билинейного преобразования
2. Вычислительные эксперименты с разными вариантами преобразования: сравнение по критерию точности, по вычислительной эффективности
3. Оценка возможности применения для нормализации изображений при биометрической идентификации по структуре ладони

Список литературы

- [1] Sederberg T. W., Zheng J. Birational quadrilateral maps //Computer Aided Geometric Design. – 2015. – Т. 32. – С. 1-4.
- [2] Wolberg G. Digital image warping. – Los Alamitos : IEEE computer society press, 1990. – Т. 10662. – С. 90720-1264.
- [3] Floater M. S. The inverse of a rational bilinear mapping //Computer Aided Geometric Design. – 2015.
- [4] Lidberg P. Barycentric and Wachspress coordinates in two dimensions: theory and implementation for shape transformations. – 2011.