

# Оценивание сложности изображений двумерными вариациями

Чочиа П.А.

Институт проблем передачи информации РАН

[chochia@iitp.ru](mailto:chochia@iitp.ru)

В теоретических исследованиях и практическом применении методов обработки видеoinформации требуются оценки результата.

Для задач восстановления, сжатия или фильтрации сигнала часто используются разные варианты отклонений (MSE, PSNR, SSIM и др.), которые удобны, если исходный сигнал известен.

В реальных ситуациях неискаженный сигнал недоступен. Нужна численная оценка результата, не использующая оригинальный сигнал, и которая была бы адекватна изображению как двумерной функции.

Хотелось бы выбрать метрическую оценку, характеризующую пространственную изменчивость (сложность) изображения как двумерного сигнала .

*Сложность изображения*, которое представляет собой образ некой пространственной сцены, будем интерпретировать как характеристику, отражающая число, размеры и заметность (контраст) деталей на изображении. Разумно полагать, что сложность должна возрастать при увеличении числа и контраста деталей, а также при уменьшении размеров деталей.

# О сложности сигналов и функций

Понятие сложности трактуется по-разному для сигналов, функций и потока сообщений.

Для одномерных сигналов в качестве оценки часто используют значение базы, т.е. произведения  $\Delta f \Delta t$ . При  $\Delta f \Delta t \gg 1$  сигнал считают сложным.

Сложность аналитической функции характеризуется числом ее переменных  $n$ , а для  $s$  раз дифференцируемых функций — отношением  $n/s$ .

Сложность потока сообщений, представимого в дискретном виде, часто оценивают значением энтропии  $H = -\sum_b p(z) \log(p(z))$ , где  $p(z)$  — вероятность элемента со значением  $z$ .

Для оценки сложности дискретного сигнала иногда используют коэффициент сокращения объема данных (количества бит), необходимых для его восстановления.

Указанные способы оценки сложности по тем или иным причинам не применимы к изображению как двумерной функции яркости, отражающей некоторую физическую характеристику сцены. В частности, общий недостаток перечисленных вариантов оценок в том, что они не являются метрическими характеристиками и не зависят от амплитуды сигнала.

# Двумерные вариации и их дискретные аналоги

Распространенной метрической характеристикой изменчивости и сложности одномерной функции на  $[a, b]$  является полная вариация:

$$V_a^b(f(x)) \square \sup_P \sum_{k=0}^{K-1} \|f(x_{k+1}) - f(x_k)\|$$

Предложено много ее обобщений на функции многих переменных (вариации Витали, Арцела, Фреше, Тонелли и др.). Все они в той или иной степени являются вариантом интеграла модуля градиента функции по области носителя  $D$ , и по сути для реальных функций их значения близки.

Для дискретного случая возможны лишь их приближенные аналоги.

*Арцела вариация:*

$$A(\mathbf{F}, D) = \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} (|f(i+1, j) - f(i, j)| + |f(i, j+1) - f(i, j)|)$$

*Витали вариация:*

$$V(\mathbf{F}, D) = \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} |f(i+1, j+1) + f(i, j) - f(i, j+1) - f(i+1, j)|$$

*Пьерпонта вариация* предполагает равномерное разбиение носителя.

В каждом элементарном параллелепипеде  $\delta(i,j)$  измеряется колебание  $\omega(F, \delta(i,j) = \max\{|f(i+1,j) - f(i,j)|, |f(i,j+1) - f(i,j)|\})$ , а вариация находится как:

$$P(\mathbf{F}, D) = \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} \omega(\mathbf{F}, \delta(i,j))$$

*Тонелли вариация* определяется как сумма одномерных вариаций по всем  $i$  и  $j$  при постоянном значении второй координаты:

$$T(\mathbf{F}, D) = \sum_{i=1}^I \psi_1(i) + \sum_{j=1}^J \psi_2(j)$$

*Фреше вариация* для двумерной дискретной функции совпадает с *Харди вариацией* и вычисляется следующим образом:

$$\Delta_1(f; (i,j)) = f(i+1,j) - f(i,j),$$

$$\Delta_2(f; (i,j)) = \Delta_2(\Delta_1(f; (i,j))) = (f(i+1,j+1) - f(i,j+1)) - (f(i+1,j) - f(i,j)),$$

$$F(\mathbf{F}, D) = H(\mathbf{F}, D) = \sum_{i=1}^{I-1} \sum_{j=1}^{J-1} |\Delta_2(\Delta_1(f; (i,j)))|$$

Для дискретного случая вариации Арцела и Тонелли совпадают, также между собой будут равны вариации Витали, Фреше и Харди.

Каждая из рассмотренных вариаций дает в результате одно значение, в основе которого лежит величина, аналогичная модулю градиента функции в точке, поэтому их поведения близки.

# Двумерная вариация Кронрода

Обобщения выводов и теорем, которые удавалось формулировать используя вышеперечисленные вариации (для непрерывных функций), привели А.С.Кронрода к выводу, что функция многих переменных должна характеризоваться не одним, а несколькими функционалами, которые в определенном смысле независимы. Используя понятие множеств уровня для функции двух переменных он предложил два функционала, задаваемые следующим образом:

$$w_1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v_0(e_t) dt \quad w_2(f) = \int_{-\infty}^{\infty} v_1(e_t) dt$$

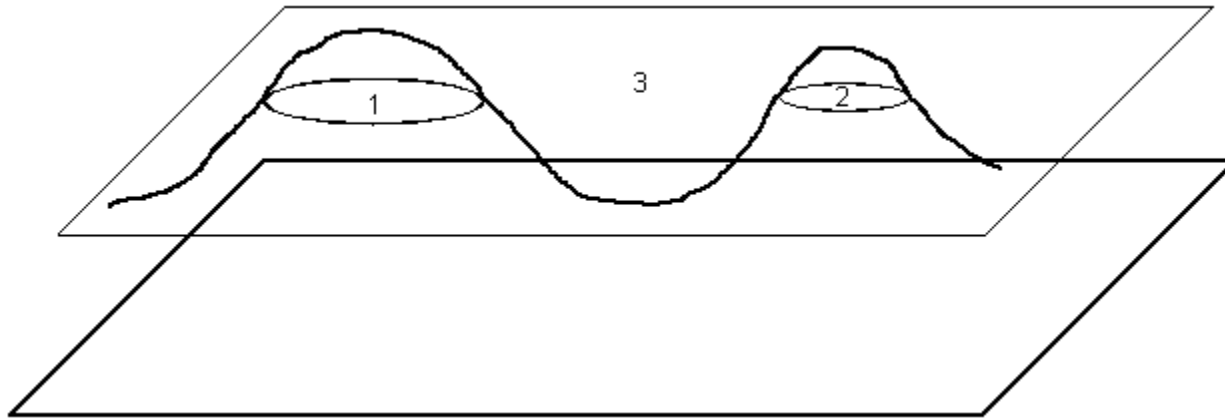
Множество  $e_t$  — это  $t$ -уровень функции  $f(x,y)$ ;  $v_0(e_t)$  — число компонент  $e_t$ ;  $v_1(e_t)$  — длина границ компонент  $e_t$ .  $w_1$  характеризует число и выраженность локальных экстремумов  $f(x,y)$ .

А.Г.Витушкиным было найдено удачное определение вариации множества; данный подход был расширен для функций многих переменных. Для плоского множества  $E=e_t$ , которое является  $t$  уровнем функции  $f(x,y)$ , вариация задается тремя значениями:  $v_0$ ,  $v_1$  и  $v_2$ , где  $v_0(E)$  есть число компонент  $E$ ,  $v_1(E)$  — длина границ компонент (предлагается оригинальный способ определения), а  $v_2(E)$  — площадь компонент  $E$ , которая не представляет интереса для оценки сложности.

Для дискретной функции  $f(i,j)$ , двумерные вариации запишутся в виде:

$$w_1(f) = \left( \sum_{x=0}^{T-1} v_0(e_t) / T \right) - 1 \quad w_2(f) = \left( \sum_{x=0}^{T-1} v_1(e_t) / T \right) - P(D)$$

где  $T$  — число возможных значений  $f(i,j)$ , а  $P(D)$  — периметр области  $D$ .  
Значение  $w_1(f)$  является характеристикой числа и амплитуды объектов изображения, образующих в сечениях отдельные компоненты. Удобно назвать  $w_1$  *показателем числа объектов изображения*. Значение  $w_2(f)$  отражает сумму периметров деталей и совпадает со значением дискретной вариации Тонелли.



Важным оказывается соотношение вариаций  $q_w(f) = w_2(f)/w_1(f)$ , которое отражает средний периметр деталей на изображении.

Периметр минимальной компоненты из одного элемента равен 4 (аналог числа  $\pi$  в метрике  $L_1$ ), в связи с чем удобно ввести характеристику

$$d(f) = q_w(f)/4,$$

которую по аналогии с  $w_1$  естественно назвать *показатель размеров объектов изображения*.

Характеристика  $d(f)$  отражает средние размеры объектов и не зависит от количества и контраста объектов — эту информацию несет вариация  $w_1(f)$ .



## Свойства $w_1(f)$ и $d(f)$ при преобразованиях функции $f(x,y)$

1. Значения  $w_1$  и  $d$  (в непрерывном случае) не зависят от выбора системы координат или ее поворота ( $d$  зависит от точности дискретизации).
2. При амплитудных преобразованиях вида  $Cf(x,y)$ ,  $w_1$  увеличивается пропорционально  $C$ , а значение  $d$  не изменяется.
3. При линейном пространственном растяжении носителя  $D$  в  $K$  раз, значение  $w_1$  не изменяется, а значение  $d$  увеличивается также в  $K$  раз.
4. Расширение  $D$  добавлением области  $U$ , где  $f(x,y)=\text{const}$  (без добавления участков разрыва), не изменяет значений  $w_1$  и  $d$ .
5. При увеличении количества объектов на изображении (при сохранении их вероятностных характеристик) значение  $w_1$  пропорционально увеличивается, а значение  $d$  не изменяется.
6. При увеличении площади изображения (при условии однородности сцены) значение  $w_1$  пропорционально увеличивается, а значение  $d$  не изменяется.

Таким образом, при указанных изменениях двумерной функции  $f(x,y)$ , как минимум одно из значений  $w_1$  и  $d$  оказывается инвариантом, второе же значение является предсказуемой функцией преобразования.

## О сравнении и интерпретации оценок

При одинаковых значениях  $d(f)$ , сложность изображения будет возрастать с увеличением  $w_1(f)$ ; при одинаковых  $w_1(f)$  сложность возрастает с уменьшением  $d(f)$ . Если для  $f_1$  и  $f_2$  выполняется  $w_1(f_1) < w_1(f_2)$  и  $d(f_1) > d(f_2)$ , то изображение  $f_2$  является более сложным, чем  $f_1$ . В других случаях сравнение сложности зависит от задачи. В некоторых случаях можно использовать их комбинацию  $w(f) = F(w_1(f), d(f))$ , которая может, например, использоваться в задачах восстановления в качестве стабилизирующего функционала  $\Omega(f)$ .

# Применение оценки сложности в задачах восстановления

Формулировка задачи восстановления искаженного сигнала методом регуляризации.

Исходный сигнал  $z$  искажен оператором  $A$  и шумом  $\xi$ ; наблюдается сигнал  $u = A(z) + \xi$ . Полагая оператор  $A$  с определенной точностью известным, строится восстанавливающий оператор  $\hat{A}$  (алгоритм)  $\hat{A}(u) \rightarrow \{z_\alpha\}$ , отображающий  $u$  на множество допустимых результатов  $z_\alpha \in Z$ . Вычисляется функционал  $\varphi_\alpha(u, \lambda) = \|Az_\alpha - u\| + \lambda\Omega(z_\alpha)$ , где  $\Omega(z_\alpha)$  — стабилизирующий функционал, а  $\lambda$  — регуляризирующий параметр. Оптимальный на  $Z$  результат  $z^*$  находится минимизацией функционала  $\varphi_\alpha(u, \lambda)$  при выбранном значении  $\lambda$ :

$$\varphi_{z^*}(u, \lambda) = \inf_{z^\alpha \in Z} \varphi_\alpha(u, \lambda)$$

Восстанавливающий оператор  $\hat{A}$  строится на основе свойств искажающего оператора  $A$  и зависит от конкретных условий. В задаче линейного восстановления, он может быть обратным оператором  $\hat{A} = A^{-1}$ , в других, как, например, в задаче фильтрации шума на основе полной вариации — единичным оператором  $\hat{A} = E$ , или каким-то другим.

В отличие от оператора  $\hat{A}$ , функционал  $\Omega(z)$  не зависит от искажающего преобразования и выбирается на основе модели сигнала. Таковой характеристикой может являться оценка сложности сигнала  $w(f)$ .



а



б



в



г



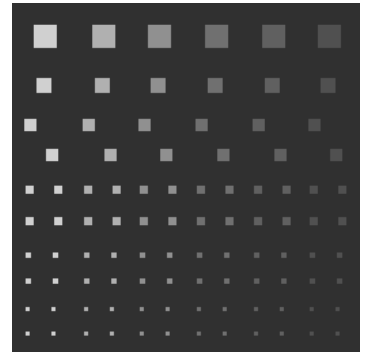
д



е



ж

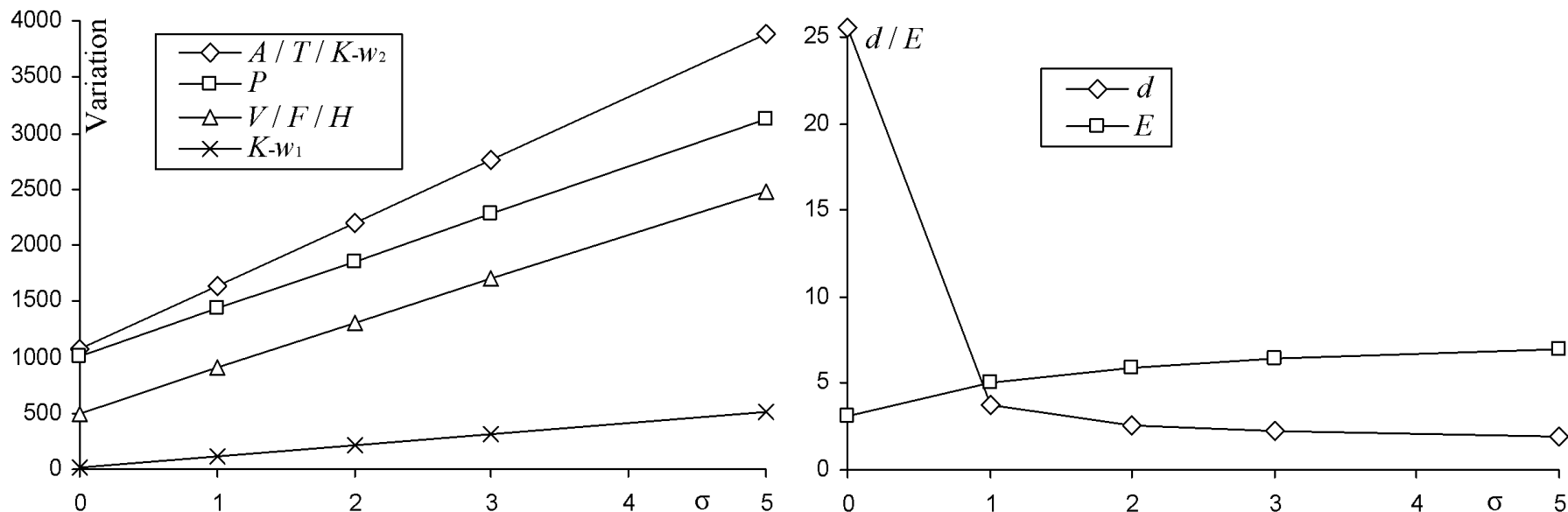


з

Изображение	$A/T$	$P$	$V/F/H$	$K-w_1$	$K-w_2$	$d$	$E$
а	5242,72	3715,70	2859,43	469,85	5260,25	2,80	7,59
б	2583,56	1825,14	1038,43	129,23	2589,58	5,01	7,60
в	7928,75	6072,46	3497,91	618,79	7947,70	3,21	7,59
г	4178,20	2954,15	1981,67	332,67	4184,39	3,16	7,19
д	3256,29	2389,90	1562,20	256,84	3260,76	3,18	7,34
е	5107,64	3642,48	2499,84	419,62	5118,65	3,05	6,76
ж	1160,50	1021,17	528,25	11,34	1160,48	25,58	3,11
з	811,67	778,54	132,52	33,13	811,67	6,12	0,58
з+шум ( $\sigma=2$ град.)	1944,96	1539,15	945,04	233,96	1944,93	2,08	3,63

Влияние шума на оценку сложности изображения:  
зависимости двумерных вариаций, показателя размеров объектов ( $d$ ),  
энтропии ( $E$ ) от уровня шума для изображения на Рис. 1,ж.

Шум, %%	$A/T$	$P$	$V/F/H$	$K-w_1$	$K-w_2$	$d$	$E$
$\sigma = 0$	1160,50	1021,17	528,25	11,34	1160,48	25,58	3,11
$\sigma = 1$	1641,15	1327,58	909,12	110,27	1644,71	3,73	5,06
$\sigma = 2$	2198,37	1696,72	1303,17	210,29	2204,56	2,62	5,94
$\sigma = 3$	2758,17	2072,65	1697,21	309,89	2766,76	2,23	6,43
$\sigma = 5$	3867,95	2816,74	2487,14	511,75	3892,58	1,90	7,01



Зависимости значений вариаций ( $Variation$ ), показателя размеров объектов ( $d$ ) и энтропии ( $E$ ) от величины гауссова шума ( $\sigma$ , град.) для изображения на Рис.1,ж.

## Изменение оценки сложности при сглаживании изображения

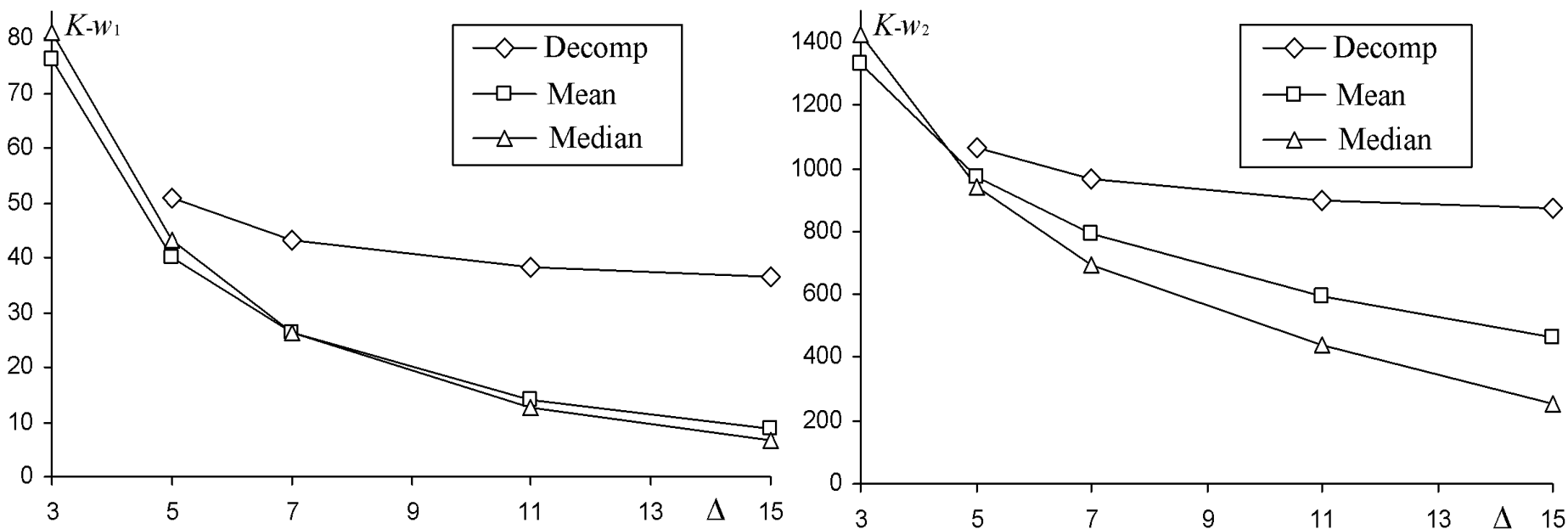
Согласно двухмасштабной многокомпонентной модели изображение представляется смесью компонент: кусочно-гладкой  $S(i,j)$ , текстурно-детальной  $t(i,j)$  и шумовой  $\xi(i,j)$ :

$$f(i,j) = S(i,j) + t(i,j) + \xi(i,j).$$

Изменения СКО, двумерных вариаций  $K-w_1$  и  $K-w_2$ , показателя размеров объектов ( $d$ ) и энтропии ( $E$ ) при сглаживании изображения на Рис. 1,3.

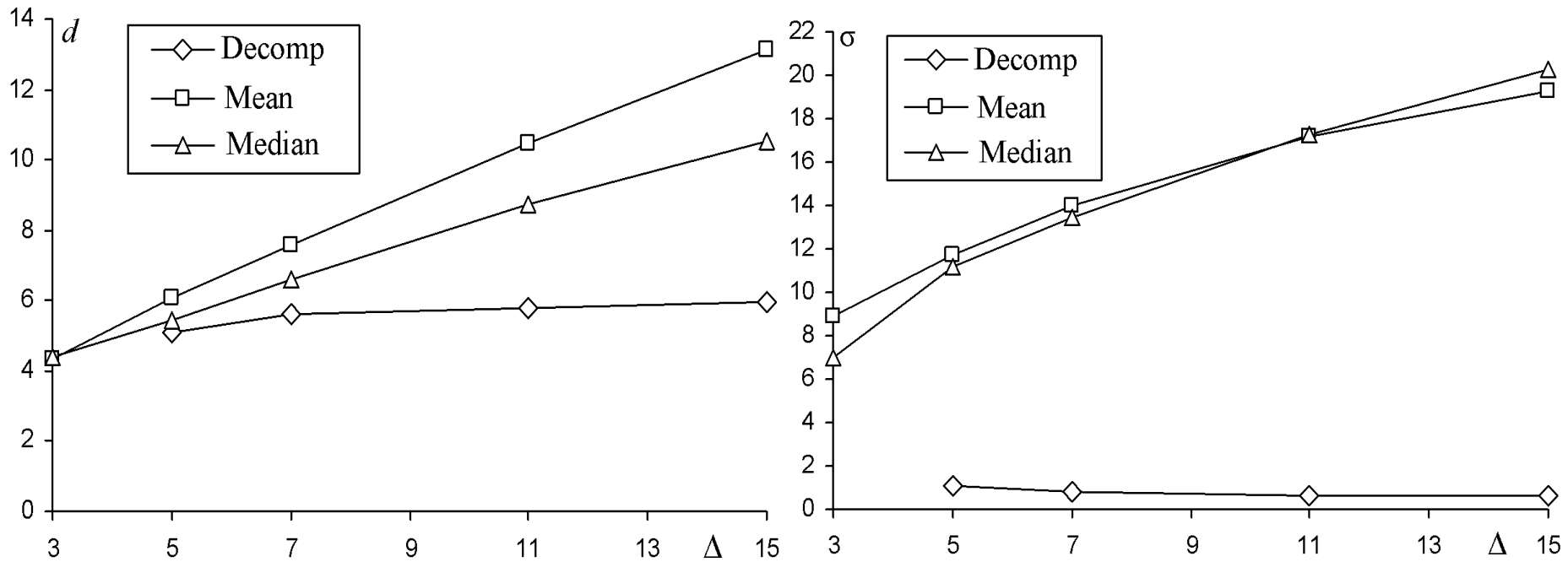
	Вид изображения	СКО	$K-w_1$	$K-w_2$	$d$	$E$
1	Исходное	0,00	33,13	811,87	6,13	0,58
2	С шумом, $\sigma=5$ град.	5,00	533,71	3644,04	1,71	4,93
3	Локальное среднее	19,30	8,83	463,95	13,13	4,08
4	Локальная медиана	20,26	6,80	253,46	10,51	2,09
5	Декомпозиция (1 итер.)	0,64	36,55	872,95	5,97	1,68
6	Декомпозиция (3 итер.)	0,63	32,89	822,22	6,25	1,62

# Изменение оценки сложности при сглаживании изображения



Зависимости первой ( $K-w_1$ ) и второй ( $K-w_2$ ) вариаций Кронрода от размеров фрагмента сглаживания ( $\Delta$ ).

# Изменение оценки сложности при сглаживании изображения



(а) Показатель размеров объектов ( $d$ ) (б) Среднеквадратическое отклонение ( $\sigma$ )  
Показатель размеров объектов ( $d$ ) и СКО ( $\sigma$ ) результата фильтрации от оригинала в зависимости от размеров фрагмента сглаживания ( $\Delta$ )



## Выводы о двумерных вариациях и алгоритме декомпозиции

1. С увеличением размеров фрагмента сглаживания значения первой ( $w_1$ ) и второй ( $w_2$ ) вариаций Кронрода, а также показателя размеров объектов ( $d$ ) для алгоритма декомпозиции стремятся к постоянным значениям, тогда как для алгоритмов локального среднего и медианы они либо стремятся к нулю, либо возрастают почти линейно.
2. Стремление для обычного сглаживания значений  $w_1$  и  $w_2$  к нулю, а значений  $d$  к возрастанию означает уменьшение сложности изображения, что говорит о разрушении сигнала изображения. Выход тех же значений на плато в случае декомпозиции означает, что структура деталей изображения сохраняется.
3. Точность восстановления зашумленного изображения при использовании декомпозиции возрастает с увеличением размера фрагмента сглаживания и числа итераций, а алгоритмы локального среднего или локальной медианы при этом дают все более отличающиеся от оригинала результаты.
4. Значения вариаций ( $w_1$  и  $w_2$ ) и показателя размеров объектов ( $d$ ) в результате декомпозиции возвращаются к значениям, близким исходному неискаженному изображению. Значения выходят на плато одновременно с асимптотическим приближением к нулю величины отклонения от оригинала, что говорит о стабилизации результата вблизи исходного неискаженного изображения.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что совокупность значений  $w_1$  и  $d$  достаточно хорошо отражает морфологическую структуру изображения, в частности, такие важные параметры, как число, размеры и заметность деталей, и может являться оценкой сложности изображения.

**КОНЕЦ**

**Благодарю за внимание**

Чочиа П.А. Двумерные вариации как средство оценивания сложности изображений. // Машинное обучение и анализ данных, 2015, Т. 1, № 12. С. 1660–1676.

Кронрод А.С. О функциях двух переменных. УМН, 1950, т. 5, № 1, с. 24-134.

Витушкин А.Г. О многомерных вариациях. М.: Гостехиздат, 1955.

Иванов Л.Д. Вариации множеств и функций. М.: Наука, 1975.

## Декомпозиция изображения

Согласно двухмасштабной многокомпонентной модели изображение представляется смесью компонент: кусочно-гладкой  $S(i,j)$ , текстурно-детальной  $t(i,j)$  и шумовой  $\xi(i,j)$ :

$$f(i,j) = S(i,j) + t(i,j) + \xi(i,j).$$

$f(i,j)$



$S(i,j)$

