Методы оптимизации, ВМК, осень 2018

Дополнительный материал 2: Матрично-векторные скалярные произведения и нормы

1 Матрично-векторные скалярные произведения

В дальнейшем мы регулярно будем пользоваться различными матрично-векторными скалярными произведениями и нормами. В связи с этим, кратко напомним основные понятия и факты из этой области.

Всюду в дальнейшем будут использоваться следующие стандартные обозначения:

(a) $\mathbb{R}$ обозначает множество вещественных чисел;

(b) $\mathbb{R}^n$ обозначает множество всех n-мерных вещественных вектор-столбцов;

(c) $\mathbb{R}^{m \times n}$ обозначает множество всех вещественных матриц с m строками и n столбцами;

(d) $\mathbb{S}^n$ обозначает множество всех $n \times n$ вещественных симметричных матриц.

(e) $\mathbb{S}^n_+$ и $\mathbb{S}^n_{++}$ обозначают множество всех $n \times n$ вещественных симметричных положительно полуопределенных и положительно определенных матриц соответственно;

(f) I_n обозначает единичную матрицу размера n.

Заметим, что под векторами из $\mathbb{R}^n$ всюду будут подразумеваться именно вектор-столбцы (а не, например, вектор-строки); таким образом, $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$, но $\mathbb{R}^n \neq \mathbb{R}^{1 \times n}$. Напомним, что $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{m \times n}$ и $\mathbb{S}^n$ являются вещественными векторными пространствами (со стандартными операциями сложения и умножения на число).

Для матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ символ $\mathrm{Tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ обозначает ее след.

Упражнение 1.1 (Циклическое свойство следа)**.** Покажите, что для любых матриц $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ выполнено

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

Прежде, чем переходить к конкретным примерам, напомним общее определение скалярного произведения.

Определение 1.2 (Скалярное произведение)**.** Пусть V — вещественное векторное пространство. Функция $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$, которая каждой паре x, y векторов в V ставит в соответствие вещественное число $\langle x, y \rangle$, называется вещественным *скалярным произведением*, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

(a) (Положительность) Для любого $x \in V$ выполнено $\langle x, x \rangle \geq 0$. Более того, $\langle x, x \rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

(b) (Симметричность) Для любых $x, y \in V$ выполнено $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.

(c) (Линейность) Для любых $x, y, z \in V$ выполнено $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$. Для любых $x, y \in V$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.

Векторное пространство с заданным на нем скалярным произведением называется *пространством со скалярным произведением* или *предгильбертовым пространством*. Конечномерное вещественное пространство со скалярным произведением также называют *евклидовым пространством*.

Пример 1.3 (Стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}$)**.** В пространстве $\mathbb{R}$ скалярное произведение можно ввести как обычное произведение чисел: $\langle x, y \rangle := xy$. Это скалярное произведение называется *стандартным скалярным произведением в* $\mathbb{R}$.

Пример 1.4. Стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}$ не является единственно возможным. Например, в $\mathbb{R}$ также можно ввести нестандартное скалярное произведение $\langle x, y\rangle' := 5xy$, которое отличается от стандартного скалярного произведения лишь постоянным множителем. Оказывается, что таким образом устроено любое скалярное произведение в $\mathbb{R}$ (см. упражнение 1.5).

Упражнение 1.5. Пусть $\langle\cdot,\cdot\rangle'$ — произвольное скалярное произведение в $\mathbb{R}$. Покажите, что для некоторого $a > 0$ выполнено $\langle x, y\rangle' = axy$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$. Таким образом, с точностью до постоянного множителя стандартное скалярное произведение является единственно возможным в $\mathbb{R}$. (*Подсказка*: положите $a := \langle 1, 1\rangle'$.)

Пример 1.6 (Стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$)**.** В пространстве $\mathbb{R}^n$ вещественных n-мерных вектор-столбцов *стандартное скалярное произведение* задается формулой

$$\langle x, y\rangle := \mathrm{Tr}(x^T x) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Упражнение 1.7 (Общий вид скалярного произведения в $\mathbb{R}^n$)**.** Снова рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

(a) Пусть $A \in \mathbb{S}^n_{++}$ — симметричная положительно определенная матрица. Покажите, что функция $\langle\cdot,\cdot\rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенная по формуле

$$\langle x, y\rangle_A := \langle Ax, y\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i y_j,$$

задает скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$.

(b) Покажите, что любое скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ обязательно имеет указанный выше вид для некоторой матрицы $A \in \mathbb{S}^n_{++}$. (*Подсказка*: рассмотрите произвольный базис $e_1, \ldots, e_n$ в $\mathbb{R}^n$ и разложите векторы x, y по этому базису.)

Пример 1.8 (Стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^{m\times n}$)**.** В пространстве $\mathbb{R}^{m\times n}$ матриц можно ввести *фробениусово скалярное произведение*

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{Tr}(A^T B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij}.$$

Это скалярное произведение называется *стандартным скалярным произведением в* $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Замечание 1.9. Напомним, что, согласно договоренности, сделанной в самом начале, $\mathbb{R}^{n\times 1} = \mathbb{R}^n$. Таким образом, в примере 1.8 было переопределено стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$, введенное в примере 1.6. Однако нетрудно видеть, что никакой проблемы в этом нет, поскольку оба определения дают одинаковый результат.

Пример 1.10. Пусть V — вещественное векторное пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle : V \times V$, и пусть U — подпространство V. Тогда сужение $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{U\times U}$ скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$ задает скалярное произведение в U. Таким образом, скалярное произведение можно наследовать на подпространство.

Пример 1.11 (Стандартное скалярное произведение в $\mathbb{S}^n$)**.** Наследуя фробениусово скалярное произведение из пространства $\mathbb{R}^{n\times n}$ на подпространство симметричных матриц $\mathbb{S}^n$, получаем *фробениусово скалярное произведение в* $\mathbb{S}^n$:

$$\langle A, B\rangle := \mathrm{Tr}(AB).$$

(В отличие от примера 1.8, знак транспонирования можно опустить в силу симметричности.) Это скалярное произведение называется *стандартным скалярным произведением в* $\mathbb{S}^n$.

В дальнейшем, используя обозначение $\langle x, y\rangle$, где x, y являются объектами одного из пространств $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{S}^n$, если не оговорено иное, будем иметь в виду именно соответствующее стандартное скалярное произведение из примеров 1.3, 1.6, 1.8, 1.11.

При работе со стандартными матрично-векторными скалярными произведениями часто оказываются полезными следующие свойства сопряженности, которые связывают между собой скалярные произведения в различных пространствах:

Утверждение 1.12 (Тождества сопряженности)**.** *Для любых матриц* $A \in \mathbb{R}^{m\times k}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *имеет место*

$$\langle AB, C\rangle = \langle B, A^T C\rangle = \langle A, CB^T\rangle.$$

Доказательство. Согласно определению, $\langle AB, C\rangle = \mathrm{Tr}((AB)^T C)$. Поскольку $(AB)^T = B^T A^T$, то $\mathrm{Tr}((AB)^T C) = \mathrm{Tr}(B^T A^T C)$. Но, опять же, по определению, $\mathrm{Tr}(B^T A^T C) = \langle B, A^T C\rangle$, что доказывает первое равенство. Для доказательства второго равенства остается воспользоваться циклическим свойством следа (см. упражнение 1.1), чтобы получить $\mathrm{Tr}(B^T A^T C) = \mathrm{Tr}(A^T C B^T)$. □

Упражнение 1.13. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$. Покажите, что $\langle xx^T, yy^T\rangle = \langle x, y\rangle^2$.

В заключение отметим крайне важное неравенство Коши–Буняковского, которое в общем случае справедливо для произвольного скалярного произведения в произвольном векторном пространстве.

Утверждение 1.14 (Неравенство Коши–Буняковского)**.** *Пусть V — вещественное векторное пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Тогда для любых $x, y \in V$ справедливо*

$$|\langle x, y\rangle| \le \langle x, x\rangle^{1/2}\langle y, y\rangle^{1/2}, \tag{1.1}$$

причем неравенство переходит в равенство тогда и только тогда, когда либо $y = 0$, либо $x = \alpha y$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для $y = 0$ утверждение, очевидно, верное. Поэтому далее будем считать, что $y \neq 0$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ — произвольное число (которое будет выбрано позже). Согласно аксиомам скалярного произведения, имеем

$$0 \le \langle x - \alpha y, x - \alpha y\rangle = \langle x, x\rangle - 2\alpha\langle x, y\rangle + \alpha^2\langle y, y\rangle. \tag{1.2}$$

Отсюда

$$2\alpha\langle x, y\rangle \le \langle x, x\rangle + \alpha^2\langle y, y\rangle.$$

Поскольку $y \neq 0$, то $\langle y, y\rangle \neq 0$. Полагая $\alpha := \langle x, y\rangle/\langle y, y\rangle$, получаем

$$\langle x, y\rangle^2 \le \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle,$$

что дает (1.1) после извлечения корня.

Нетрудно видеть, что неравенство (1.1) переходит в равенство тогда и только тогда, когда неравенство (1.2) переходит в равенство. Согласно аксиомам скалярного произведения, последнее возможно, если и только если $x = \alpha y$ (где $\alpha = \langle x, y\rangle/\langle y, y\rangle$). □

В частности, рассматривая пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, получаем классическое неравенство Коши–Буняковского для конечных сумм:

Следствие 1.15 (Неравенство Коши–Буняковского для конечных сумм)**.** *Пусть $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ и $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \le \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)^{1/2},$$

причем неравенство переходит в равенство, если и только если $y_1 = \cdots = y_n = 0$ или $x_1 = \alpha y_1, \ldots, x_n = \alpha y_n$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$.

2 Матрично-векторные нормы

Теперь перейдем к рассмотрению матрично-векторных норм. Как и раньше, начнем с общего определения.

Определение 2.1 (Норма)**.** Пусть V — вещественное векторное пространство. Функция $\|\cdot\| : V \to [0, +\infty)$, которая каждому вектору $x \in V$ ставит в соответствие неотрицательное вещественное число $\|x\|$, называется *нормой*, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

(a) (Положительность) Для любого $x \in V$ выполнено $\|x\| \geq 0$. Более того, $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$.

(b) (Абсолютная однородность) Для любого $x \in V$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ выполнено $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

(c) (Неравенство треугольника) Для любых $x, y \in V$ выполнено $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Векторное пространство с заданной на нем нормой называется *нормированным пространством.*

Пример 2.2 (Стандартная норма в $\mathbb{R}$)**.** В пространстве $\mathbb{R}$ норму можно ввести как модуль числа: $\|x\| := |x|$. Эта норма называется *стандартной нормой в* $\mathbb{R}$. Как показывает упражнение 2.3, с точностью до постоянного множителя стандартная норма является единственно возможной нормой в пространстве $\mathbb{R}$.

Упражнение 2.3. Покажите, что любая норма $\|\cdot\|'$ в пространстве $\mathbb{R}$ обязательно имеет вид $\|x\|' = a|x|$ для некоторого $a > 0$. (*Подсказка*: положите $a := |1|$.)

Пример 2.4 (Евклидова норма)**.** Если V — вещественное векторное пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$, то в V можно ввести *евклидову норму* $\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$. Таким образом, любое пространство со скалярным произведением может быть превращено в нормированное пространство с помощью введения евклидовой нормы.

Пример 2.5 (Стандартная евклидова норма в $\mathbb{R}^n$)**.** Рассматривая в примере 2.4 в качестве V пространство $\mathbb{R}^n$ со стандартным скалярным произведением, получаем *стандартную евклидову норму*

$$\|x\|_2 := \langle x, x \rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Эта норма также известна как l^2*-норма.* В дальнейшем для краткости стандартную евклидову норму на $\mathbb{R}^n$ будем обозначать символом $|\cdot|$ (таким образом, $|x| := \|x\|_2$ для $x \in \mathbb{R}^n$).

Евклидова норма в $\mathbb{R}^n$ соответствует геометрическому представлению о *длине* вектора. В частности, при повороте (ортогональном преобразовании) вектора его евклидова норма не изменяется:

Упражнение 2.6. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, и пусть $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — ортогональная матрица (т. е. $Q^T Q = Q Q^T = I_n$). Покажите, что $|Qx| = |x|$.

Пример 2.7 (Общий вид евклидовой нормы в $\mathbb{R}^n$)**.** Снова вернемся к примеру 2.4 и рассмотрим в качестве V пространство $\mathbb{R}^n$, но на этот раз рассмотрим нестандартное скалярное произведение $\langle x, y \rangle_A := \langle Ax, y \rangle$, где $A \in \mathbb{S}^n_{++}$ — симметричная положительно определенная матрица (см. упражнение 1.7). Тогда функция $\|\cdot\|_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенная по формуле

$$\|x\|_A := \langle Ax, x \rangle^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j \right)^{1/2},$$

задает нестандартную евклидову норму в пространстве $\mathbb{R}^n$ (которая переходит в стандартную евклидову норму, если $A = I_n$). Согласно упражнению 1.7, любая евклидова норма в пространстве $\mathbb{R}^n$ обязательно имеет указанный вид.

Пример 2.8 (l^1-норма)**.** Помимо евклидовой нормы в пространстве $\mathbb{R}^n$ также можно задать и неевклидову норму. Например, функция $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, определенная по формуле

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

задает норму, которая называется *l^1-нормой.*

Пример 2.9 (l^∞-норма)**.** Еще одной популярной нормой в пространстве $\mathbb{R}^n$ является *l^∞-норма*

$$\|x\|_\infty := \max_{1 \le i \le n} |x_i|.$$

Эта норма также известна как *равномерная норма* или *норма Чебышева.*

Следующее упражнение показывает, как связаны между собой нормы l^2, l^1 и l^∞:

Упражнение 2.10. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Докажите следующие неравенства:

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty \qquad \text{и} \qquad \frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \|x\|_1.$$

(*Подсказка*: для первой части второго неравенства используйте неравенство Коши–Буняковского.)

Замечание 2.11. Нормы l^2, l^1 и l^∞, рассмотренные в примерах 2.5, 2.8 и 2.9, являются частными случаями более общего семейства *l^p-норм*

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p},$$

где $p \in [1, +\infty]$ (при $p = +\infty$ правая часть полагается равной соответствующему пределу при $p \to +\infty$).

Пример 2.12 (Фробениусова норма в $\mathbb{R}^{m\times n}$)**.** Снова вернемся к примеру 2.4 и рассмотрим теперь в качестве V пространство матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$ со стандартным скалярным произведением. Соответствующая евклидова норма в данном случае называется *фробениусовой нормой* и задается формулой

$$\|A\|_F := \langle A, A\rangle^{1/2} = [\mathrm{Tr}(A^T A)]^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Эта норма также известна как *норма Гильберта–Шмидта.*

Упражнение 2.13. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, и пусть $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — ортогональные матрицы (т. е. $Q_1^T Q_1 = Q_1 Q_1^T = I_m$ и $Q_2^T Q_2 = Q_2 Q_2^T = I_n$). Покажите, что

$$\|Q_1 A\|_F = \|A Q_2\|_F = \|A\|_F.$$

Таким образом, фробениусова норма инвариантна к ортогональным преобразованиям.

Упражнение 2.14. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, и пусть $q := \min\{m, n\}$. Покажите, что

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{q} \sigma_i^2(A) \right)^{1/2},$$

где $\sigma_1(A) \ge \cdots \ge \sigma_q(A) \ge 0$ — сингулярные числа матрицы A. (*Подсказка*: воспользуйтесь сингулярным разложением и упражнением 2.13.)

Пример 2.15. Пусть V — вещественное векторное пространство с определенной на нем нормой $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$, и пусть U — подпространство V. Тогда сужение $\|\cdot\||_U$ нормы $\|\cdot\|$ на подпространство U задает норму в этом подпространстве. Таким образом, норму можно наследовать на подпространство.

Пример 2.16 (Фробениусова норма в $\mathbb{S}^n$)**.** Наследуя фробениусову норму из пространства $\mathbb{R}^{n\times n}$ на подпространство симметричных матриц $\mathbb{S}^n$, получаем *фробениусову норму в пространстве* $\mathbb{S}^n$:

$$\|A\|_F := \langle A, A\rangle^{1/2} = [\mathrm{Tr}(A^2)]^{1/2}.$$

Упражнение 2.17. Пусть $A \in \mathbb{S}^n$. Покажите, что

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(A)\right)^{1/2},$$

где $\lambda_1(A) \geq \cdots \geq \lambda_n(A)$ — собственные значения матрицы A. (См. также упражнение 2.14.)

Пример 2.18 (Операторная норма в $\mathbb{R}^{m\times n}$)**.** Помимо фробениусовой нормы важным примером матричной нормы в пространстве $\mathbb{R}^{m\times n}$ является *операторная норма*:

$$\|A\|_{\mathrm{op}} := \max_{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1} |Ax|.$$

Эта норма также известна как *спектральная норма*.

Упражнение 2.19. Пусть $v \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n\times 1}$. Покажите, что $\|v\|_{\mathrm{op}} = |v|$.

Упражнение 2.20. Пусть D — диагональная матрица с элементами $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{R}$ на диагонали. Покажите, что $\|D\|_{\mathrm{op}} = \max_{1\leq i\leq n} |d_i|$.

Упражнение 2.21. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, и пусть $Q_1 \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $Q_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — ортогональные матрицы. Покажите, что

$$\|Q_1 A\|_{\mathrm{op}} = \|AQ_2\|_{\mathrm{op}} = \|A\|_{\mathrm{op}}.$$

Таким образом, операторная норма инвариантна к ортогональным преобразованиям. (*Подсказка*: используйте результат упражнения 2.6.)

Упражнение 2.22. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Покажите, что $\|A\|_{\mathrm{op}} = \sigma_{\max}(A)$, где $\sigma_{\max}(A)$ — максимальное сингулярное число матрицы A. (*Подсказка*: используйте сингулярное разложение и упражнения 2.21 и 2.20.)

Следующее упражнение показывает, как связаны операторная норма и фробениусова норма, рассмотренная ранее:

Упражнение 2.23. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Покажите, что

$$\|A\|_{\mathrm{op}} \leq \|A\|_F \leq \sqrt{\min\{m,n\}}\|A\|_{\mathrm{op}}. \tag{2.1}$$

(*Подсказка*: воспользуйтесь результатами упражнений 2.14 и 2.22.)

Пример 2.24 (Операторная норма в $\mathbb{S}^n$)**.** Наследуя операторную норму из пространства $\mathbb{R}^{n\times n}$ на подпространство $\mathbb{S}^n$, получаем *операторную норму в пространстве* $\mathbb{S}^n$:

$$\|A\|_{\mathrm{op}} := \max_{x\in\mathbb{R}^n:|x|=1} |Ax|.$$

Упражнение 2.25. Пусть $A \in \mathbb{S}^n$. Покажите, что

$$\|A\|_{\mathrm{op}} = \max\{\lambda_{\max}(A), -\lambda_{\min}(A)\},$$

где $\lambda_{\min}(A)$ и $\lambda_{\max}(A)$ — минимальное и максимальное собственное значения матрицы A. (См. также упражнение 2.22.)

Как показывает упражнение 2.10, каждая из норм l^2, l^1 и l^∞ в пространстве $\mathbb{R}^n$ может быть ограничена снизу и сверху любой другой с точностью до постоянного множителя; упражнение 2.23 показывает, что аналогичная связь существует также между операторной и фробениусовой нормой в пространстве матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$. Оказывается, это не случайно, и подобное утверждение справедливо не только для рассмотренных выше норм, но и вообще для любых двух норм в *конечномерном* пространстве.

Утверждение 2.26 (Эквивалентность норм в конечномерном пространстве)**.** *Пусть V — конечномерное вещественное векторное пространство, и пусть $\|\cdot\|_{(1)}$ и $\|\cdot\|_{(2)}$ — нормы в пространстве V. Тогда найдутся $c_1, c_2 > 0$, такие, что*

$$c_1\|x\|_{(2)} \leq \|x\|_{(1)} \leq c_2\|x\|_{(2)}.$$

Доказательство. Нам особо не понадобится это утверждение, поэтому примем его без доказательства. Ограничимся лишь упоминанием, что доказательство опирается на (a) теорему Вейерштрасса о достижении непрерывной функции, заданной на компакте, своих точных нижней и верхней грани; (b) непрерывность нормы; (c) компактность единичной сферы в конечномерном пространстве (в силу ограниченности и замкнутости). □

Замечание 2.27. Как показывают неравенства 2.10 и 2.1, константы c_1 и c_2, вообще говоря, зависят от размерности пространства V. Неформально говоря, именно по этой причине утверждение 2.26 перестает быть верным в случае бесконечномерного пространства V.

При взаимодействии матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и вектора $x \in \mathbb{R}^n$ получается новый вектор $Ax \in \mathbb{R}^m$. Если $A = 0$ или $x = 0$, то $Ax = 0$. Но что если матрица A не в точности равна нулю, но при этом близка к нулю (т. е. $\|A\|$ близка к нулю) можно ли утверждать, что норма $\|Ax\|$ также будет близка к нулю? Аналогично, если норма $\|x\|$ близка к нулю, можно ли утверждать, что норма $\|Ax\|$ также будет близка к нулю? Формализуя это рассуждение, хотелось бы иметь неравенство $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$. Оказывается, что подобное неравенство выполнено не для любых норм, что мотивирует следующее определение:

Определение 2.28 (Согласованность норм)**.** Пусть $\|\cdot\|_{(m\times n)}$, $\|\cdot\|_{(m)}$, $\|\cdot\|_{(n)}$ — нормы в пространствах $\mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно. Говорят, что матричная норма $\|\cdot\|_{(m\times n)}$ *согласована с векторными нормами* $\|\cdot\|_{(m)}$ и $\|\cdot\|_{(n)}$, если для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$\|Ax\|_{(m)} \leq \|A\|_{(m\times n)}\|x\|_{(n)}.$$

Упражнение 2.29. Покажите, что операторная и фробениусова нормы в $\mathbb{R}^{n\times n}$ согласованы с векторной евклидовой нормой в $\mathbb{R}^n$. (*Подсказка*: сперва покажите это для операторной нормы, а затем воспользуйтесь (2.1).) Согласованы ли эти нормы, например, с l^1 нормой в $\mathbb{R}^n$?

Аналогичным образом, для двух матриц A, B справедливость неравенства $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ зависит от используемой нормы:

Упражнение 2.30. (a) Покажите, что операторная и фробениусова матричные нормы *субмультипликативны*, т. е. $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ для всех $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$. (*Подсказка*: для фробениусовой нормы примените неравенство Коши–Буняковского.)

(b) Покажите, что $\|A\|_{\max} := \max_{1\leq i\leq m; 1\leq j\leq n} |a_{ij}|$ задает норму в пространстве $\mathbb{R}^{m\times n}$, но эта норма не является субмультипликативной.