

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. Ломоносова

ФАКУЛЬТЕТ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И КИБЕРНЕТИКИ

Кафедра математических методов прогнозирования

На правах рукописи

УДК 519.72,519.68

Домахина Людмила Григорьевна

**СКЕЛЕТНАЯ СЕГМЕНТАЦИЯ И
ЦИРКУЛЯРНАЯ МОРФОЛОГИЯ
МНОГОУГОЛЬНИКОВ**

01.01.09 - Дискретная математика и математическая кибернетика.

Диссертация на соискание степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор технических наук,
профессор Л.М. Местецкий

Москва 2013 г.

Оглавление

Введение	11
Глава 1. Задача сегментации фигуры и скелета	27
1.1. Фигура	28
1.2. Скелетное и циркулярное представление фигуры	29
1.2.1. Скелет фигуры	29
1.2.2. Скелетное представление фигуры	30
1.3. Сегментация изображения, фигуры и скелета	31
1.3.1. Задача сегментации фигуры	32
1.3.2. Задача сегментации скелета	32
1.3.3. Геометрический граф	33
1.3.4. Скелетный граф	34
1.3.5. Циркулярный граф	35
1.3.6. Циркулярное представление фигуры	36
1.4. Обзор литературы	36
1.4.1. Методы сегментации фигуры	36
1.4.2. Примеры сегментации скелета в литературе	41
1.5. Скелетная сегментация фигуры	43
1.6. Качество скелетной сегментации	45
1.6.1. Некорректность задачи скелетизации	45
1.6.2. Устойчивость сегментации и регуляризация скелета по Тихонову	48
1.6.3. Базовая скелетная сегментация фигуры и ее свойства	52

1.7. Выводы главы	54
Глава 2. Скелетная сегментация многоугольника на основе циркулярной морфологии	57
2.1. Метрические критерии сходства циркуляров	59
2.1.1. Расстояние Хаусдорфа для пары циркуляров	59
2.1.2. Погрешность аппроксимации фигуры циркуляром	59
2.1.3. Срединный циркуляр фигуры	60
2.2. Топологические критерии сходства циркуляров: изоморфизм	60
2.2.1. Изоморфизм скелетов	61
2.2.2. Изоморфизм циркуляров	63
2.3. Оператор проектирования на множестве циркуляров	64
2.3.1. Ветвь циркуляра	64
2.3.2. Подциркуляр	65
2.3.3. Максимальный простой подциркуляр и циркуляр уникальной проекции	66
2.3.4. Проектор максимальной длины	67
2.3.5. Модельное множество проектора максимальной длины	68
2.4. Морфологический анализ циркуляров: критериальные морфологии	69
2.4.1. Критериальные морфологии для множества циркуляров	71
2.4.2. Циркулярная функция штрафа	72
2.5. Базовый подциркуляр с контролируемой точностью	72
2.5.1. Стрижка терминального ребра и ветви циркуляра	72
2.5.2. Алгоритм построения монотонных цепочек подциркуляров на основе стрижки	75
2.5.3. Циркуляры общего положения	77

2.6.	Базовый циркуляр с контролируемой точностью	78
2.6.1.	Рекурсивное определение базового циркуляра с контролируемой точностью	78
2.7.	Циркулярная функция соответствия	80
2.7.1.	Задача поиска циркулярной проекции	81
2.7.2.	Свойства циркулярной функции соответствия	81
2.7.3.	Множество допустимых проекций циркулярной функции штрафа	82
2.7.4.	Монотонность функции соответствия	83
2.8.	Циркулярная функция устойчивости проекции	83
2.9.	Свойства циркулярной функции штрафа	84
2.10.	Выводы главы	86
Глава 3.	Скелетная сегментация и циркулярная морфология пары многоугольников	88
3.1.	Наилучшая скелетная сегментация пар фигур	88
3.2.	Морфологический проектор с априорным условием изоморфизма для пар циркуляров	89
3.2.1.	Априорная информация об изоморфизме	90
3.2.2.	Функция устойчивости на основе априорной информации об изоморфизме	91
3.2.3.	Функция соответствия для пары циркуляров	91
3.2.4.	Функция штрафа для пары циркуляров	92
3.2.5.	Морфологический проектор с априорным условием изоморфизма	92
3.2.6.	Задача поиска проекции с априорным условием изоморфизма	93
3.3.	Свойства функций, введенных на парах циркуляров	93
3.3.1.	Описание множества допустимых проекций для пар циркуляров	93

3.3.2.	Ограниченность множества допустимых проекций	95
3.3.3.	Непрерывность функции соответствия на множестве допустимых проекций	96
3.3.4.	Непрерывность функции устойчивости на множестве допустимых проекций	97
3.3.5.	Непрерывность функции штрафа на множестве допустимых проекций	98
3.3.6.	Замкнутость множества монотонных изоморфных подциркуляров	98
3.4.	Существование проектора с априорным условием изоморфизма	101
3.5.	Единственность решения задачи поиска оптимальной проекции на множестве циркуляров общего положения	102
3.5.1.	Задача поиска проекции на множестве циркуляров общего положения	103
3.5.2.	Теорема о локализации одного решения задачи поиска проекции	103
3.5.3.	Теорема о единственности решения задачи поиска проекции на множестве циркуляров общего положения	105
3.6.	Решение задачи поиска проекции функции с априорным условием изоморфизма	106
3.6.1.	Общая схема решения задачи	106
3.6.2.	Алгоритм проверки изоморфизма циркуляров	106
3.6.3.	Поиск проекции функции с априорным условием изоморфизма в монотонных цепочках	110
3.6.4.	Алгоритм поиска изоморфной пары в монотонных цепочках	110
3.7.	Вычислительная сложность алгоритма решения задачи поиска проекции	111

3.7.1.	Вычислительная сложность алгоритма построения монотонных цепочек циркуляров	111
3.7.2.	Вычислительная сложность алгоритма проверки изоморфизма	112
3.7.3.	Вычислительная сложность алгоритма решения задачи поиска проекции	113
3.7.4.	Оптимизация алгоритма решения задачи поиска проекции	113
3.8.	Выводы главы	115
Глава 4.	Сравнение формы на основе скелетной сегментации	118
4.1.	Сравнение формы с использованием скелетов	119
4.1.1.	Обзор известных методов сравнения формы с использованием скелетов	119
4.1.2.	Проблемы при использовании скелета для сравнения формы	122
4.1.3.	Новый подход к сравнению формы с использованием изоморфизма скелетов	122
4.2.	Метрика на основе проектора — циркулярное расстояние с условием изоморфизма	124
4.2.1.	Определение циркулярного расстояния с условием изоморфизма	124
4.2.2.	Свойства циркулярного расстояния с условием изоморфизма	125
4.3.	Эксперименты с циркулярным расстоянием	128
4.3.1.	Экспериментальное пороговое циркулярное расстояние: определение	128
4.3.2.	Экспериментальное пороговое циркулярное расстояние: свойства	128
4.3.3.	Примеры решения модельных задач	130
4.3.4.	Устойчивость к деформации	131
4.3.5.	Гладкое изменение структуры	132

4.3.6. Примеры решения реальных задач	133
4.4. Задача распознавания на основе скелетной сегментации	137
4.5. Сравнение формы: эксперименты с запросами	140
4.6. Выводы главы	142
Заключение	143
Литература	145

Список основных обозначений:

$B(c, \alpha)$ — функция базового циркуляра c с контролируемой точностью $\alpha > 0$

c_t — круг с центром в точке t ;

$c = \{c_t, t \in T\}$ — семейство кругов с центрами на множестве T — циркулярный граф;

$\#c$ — количество ребер циркуляра c ;

$c^{ma}(F)$ — срединный циркуляр фигуры F ;

$c \in \Theta$ — циркуляр из множества Θ ;

$c_1 \cong c_2$ — изоморфизм циркуляров;

$c^{(\varepsilon)}$ — базовый подциркуляр циркуляра c с контролируемой точностью $\varepsilon \geq 0$;

$c_B^{(\varepsilon)}$ — базовый циркуляр с точностью ε для циркуляра общего положения $c \in \Theta$;

$deg(v_i)$ — степень вершины v_i ;

$D_H(F_1, F_2)$ — расстояние Хаусдорфа между фигурами F_1 и F_2 ;

$D_H(c_1, c_2)$ — расстояние Хаусдорфа между циркулярами c_1 и c_2 ;

e, e_0, e_1 — ребра графа $G = (V, E)$;

F, F_1, F_2 — многоугольные фигуры;

$G = (V, E)$ — граф со множеством вершин V и множеством ребер E ;

$ma(F)$ — непрерывный скелет фигуры F (от английского "medial axis" — срединные оси);

$mg(c)$ — осевой граф циркуляра c (от английского "medial graph");

$ma(F_1) \cong ma(F_2)$ — изоморфизм скелетных графов фигур F_1 и F_2 ;

$O(n)$ — линейная по параметру n вычислительная сложность алгоритма;

$\Pi(c_1, c_2)$ — функция проверки изоморфизма циркуляров c_1 и c_2 ;

Pr — оператор проектирования;

$Pr_1(c)$ — максимальный единичный проектор на множестве плоских циркуляров Θ ;

$Pr_2(c)$ — оператор проекции на максимальный стриженный подциркуль;

$\rho(x, y)$ — евклидово расстояние между точками $x \in R^2$ и $y \in R^2$;

$\rho_c(F_1, F_2)$ — циркулярное расстояние между фигурами F_1 и F_2 с условием изоморфизма;

R^2 — евклидова плоскость;

$Sil(c) = \bigcup c_t$ — силуэт циркулярного графа c ;

Θ — множество всех циркуляров на плоскости;

$\dot{\Theta}$ — множество всех циркуляров уникальной проекции на плоскости;

$\ddot{\Theta}$ — множество всех циркуляров общего положения на плоскости;

$\Theta^2 = \{(c_1, c_2) : c_1 \in \Theta, c_2 \in \Theta\}$ — множество всех пар циркуляров на плоскости;

$\ddot{\Theta}^2 = \{(c_1, c_2) : c_1 \in \Theta, c_2 \in \Theta\}$ — множество всех пар циркуляров общего положения на плоскости;

$\tilde{\Theta}^2 = \{(c_1, c_2) : c_1 \in \Theta, c_2 \in \Theta : mg(c_1) \cong mg(c_2)\}$ — множество всех пар изоморфных циркуляров на плоскости;

$\Theta^S(c^*) = \{c : Pr_2(c^*) \subseteq c \subseteq c^*\}$ — множество монотонных подциркуляров циркуляра c^* ;

$\Theta^B(c^*) = \{c : c = B(c^*, \varepsilon), \varepsilon > 0\}$ — множество всех базовых циркуляров циркуляра c^* ;

$\Theta^S(c_1, c_2) = \{(c'_1, c'_2) : c'_1 \in \Theta^S(c_1), c'_2 \in \Theta^S(c_2)\}$ — все пары монотонных подциркуляров пары (c_1, c_2) на плоскости;

$\tilde{\Theta}^S(c_1, c_2) = \{(c'_1, c'_2) : c'_1 \in \Theta^S(c_1), c'_2 \in \Theta^S(c_2) : mg(c'_1) \cong mg(c'_2)\}$ — множество монотонных изоморфных подциркуляров пары циркуляров (c_1, c_2) на плоскости;

$\tilde{\Theta}^B(c_1, c_2) = \{(c'_1, c'_2) : c'_1 \in \Theta^B(c_1), c'_2 \in \Theta^B(c_2) : mg(c'_1) \cong mg(c'_2)\}$ — множество пар изоморфных базовых циркуляров пары циркуляров (c_1, c_2) на плоскости;

$Term(c^0)$ — множество терминальных ветвей циркуляра c^0 .

v, v_0, v_1 — вершины графа $G = (V, E)$;

Введение

Диссертационная работа посвящена исследованию и разработке математических методов сегментации многоугольников для задачи сравнения формы. Вводится аппарат математической морфологии на множестве циркуляров — так называемая, циркулярная морфология. Для пар многоугольников на основе циркулярной морфологии предлагаются меры для их сравнения.

Предмет исследования

Термин сегментация применительно к изображениям используется в двух смыслах, причём в обоих случаях это разделение целого на составные (пересекающиеся или не пересекающиеся) части в соответствии с содержательными критериями.

В первом значении сегментация изображения понимается как выделение объекта интереса. Это разбиение всего изображения на отдельные фрагменты, соответствующие объектам или фону. Такое выделение осуществляется по цвету, текстуре, краю, низкочастотной или высокочастотной составляющей изображения. Для этого используется большой набор методов обработки изображений: точечные, пространственные, геометрические, алгебраические преобразования, фильтры, методы выделения краёв, спектральные разложения по различным системам базисных функций. Результатом сегментации является определение некоторых подмножеств изображения, которые содержательно соответствуют представленным на изображении объектам. Критерии такой сегментации обычно носят эвристический характер, выбираются в соответствии

с конкретными задачами. Известные подходы, в частности, описаны в работах Ю.В.Визильтера [6, 7, 8], П.П.Кольцова [13]. Известна модель сегментации Мамфорда-Шаха [26]. Такую сегментацию естественно называть сегментацией объектов. В диссертации вопросы сегментации объектов не рассматриваются. Тема диссертации относится к сегментации формы.

В диссертации рассматривается сегментация выделенных в изображении объектов для сравнения и классификации этих объектов по их форме. Поскольку в основе общепринятых "человеческих" способов классификации формы лежит сравнение с некими эталонными объектами, форма которых считается известной (например, сходство с геометрическими фигурами), сегментация в этом случае имеет целью декомпозицию объекта сложной формы на составляющие его элементы, форма которых имеет более простой вид и соответственно более простое описание. Такая декомпозиция объекта на части в интересах анализа и преобразования формы объекта называется в диссертации сегментацией формы.

Содержательно задача сегментации формы ставится следующим образом. Дано описание объекта в виде множества точек на плоскости. Нужно разбить это множество на подмножества (выделить элементы), которые имеют простое описание, позволяющее легко классифицировать форму этих элементов, и далее на основе этого производить анализ и (или) преобразование всего объекта в целом.

Такая постановка задачи сегментации формы существенно зависит от принятого способа описания формы объекта. Известны различные способы такого описания:

- неявный, с помощью неравенства через функцию двух переменных, задающих координаты точки на картинной плоскости;
- бинарным растровым изображением в виде некоторого множества точек на целочисленной решётке;
- непрерывной границей объекта;
- медиальным представлением объекта в виде срединных осей (скелета) и радиальной функции, заданной в точках скелета. Такое описание называется скелетным или медиальным.

Скелетное представление плоской фигуры в виде множества срединных осей, образованных центрами окружностей, вписанных в фигуру, представляет собой мощный инструмент анализа структуры формы объектов.

Для описания формы широко используются многоугольные фигуры. С одной стороны, они имеют достаточно простое и универсальное описание. А с другой - многоугольными фигурами можно приблизить любые, сколь угодно сложные, фигуры, представленные неявными способами, бинарными изображениями, либо описанием границы. Скелетное представление многоугольных фигур имеет простое аналитическое описание в виде геометрических графов с рёбрами, являющимися отрезками прямых линий и квадратичных парабол.

Задача сегментации формы при скелетном описании формы сводится к сегментации соответствующего скелета. Сегментация скелета - это разбиение скелета на составляющие части.

Предметом диссертации являются вопросы сегментации формы, основанные на скелетном представлении фигур: постановка задач, методы и алгоритмы, критерии качества такой сегментации.

Цель работы

Разработка эффективных методов скелетной сегментации формы многоугольных фигур, основанных на математически корректных моделях, имеющих формальные показатели качества сегментации и позволяющих сравнивать и классифицировать объекты по форме.

Подход

Подход к достижению указанных целей основан на понятии срединной оси фигуры. Понятие срединной оси плоской фигуры (или скелета) было впервые введено в конце 1960-х годов Blum [33]. Он показал, что медиальное представление объектов (от англ. *medial representation*), присутствующих на двумерных изображениях, является эффективным способом описания их геометрической структуры. По сравнению с традиционным представлением формы медиальное представление является более информативным, оно отражает как общую структуру объекта, так и более детальную структуру его элементов.

Скелет плоской фигуры представляет собой множество центров максимальных вписанных в фигуру окружностей. Внешне скелет выглядит как плоский граф. Топологические свойства этого графа отражают общую структуру исходного объекта. Поэтому скелетное представление хорошо подходит для интегрального анализа структуры объекта и может служить основой для построения морфологических разбиений фигур.

Актуальность

Скелет является дескриптором формы. Скелетное представление дает полное описание фигуры, то есть по нему можно полностью восстановить фигуру. Такое описание избыточно и не подходит для решения задачи классификации.

Существующие методы сегментации, в том числе методы, использующие скелетное представление, основываются на эвристических правилах. Для оценки качества сегментации используются экспертные критерии на базе визуальных субъективных оценок. Это не позволяет оптимизировать сегментацию формы, а также сравнивать между собой различные методы сегментации.

Таким образом, с одной стороны, скелетное представление формы открывает принципиальную возможность построения и использования скелетной сегментации при сравнении и классификации формы. Разработанные в последнее время методы описания формы дискретных изображений в виде непрерывного скелетного представления многоугольных фигур (Местецкий [15], Рейер [17], Семёнов [18]) позволяют использовать скелетное представление для анализа и распознавания изображений. С другой стороны, известные методы сегментации формы основываются на эвристических правилах, не имеют формальных критериев качества сегментации и не приспособлены для решения задач сравнения формы объектов.

Итак, скелет является избыточным дескриптором формы, содержащим в себе всю информацию об объекте. Необходимо минимизировать размерность скелетного представления, сохраняя при этом достаточную полноту описания — *задача генерации скелетных дескрипторов*. Построить скелетную сегментацию меньшей размерности можно различными способами. Отсюда возникает необходимость математической формализации критерия качества скелетной сегментации. Задача сравнения и классификации формы фигуры порождает другой тип критериев минимизации скелетного описания: скелетная сегментация должна быть достаточно полной для решения задачи сравнения формы. Это критерий отделимости классов, то есть *задача селекции скелетных*

дескрипторов. Неоднозначность выбора скелетной сегментации в данном случае порождает проблему определения качества скелетной сегментации для пар фигур.

Этим обосновывается актуальность темы, направленной на исследование и разработку новых методов сегментации формы, которые позволили бы преодолеть указанные недостатки известных методов.

Научная задача

Разработка новых методов сегментации формы, основанных на скелетном представлении и имеющих формальные показатели качества сегментации.

Сложность этих задач обуславливается несколькими факторами.

Во-первых: *скелетизация — некорректная задача* по Адамару. Использование скелета для представления формы объектов порождает проблему ”шумовых” ветвей. Для нескольких аппроксимирующих фигур, различия которых практически незаметны для глаза, можно получить скелеты с разной топологической структурой. Небольшие нерегулярности в границе фигуры, зачастую следствия шумов, приводят к появлению соответствующих шумовых ветвей скелета. Отсюда возникает проблема выбора скелетного графа, на основе которого следует производить скелетную сегментацию.

Во-вторых: неопределенностью понятия *качество сегментации* и необходимостью формализации данного понятия. Критерий качества сегментации фигуры должен привноситься извне и формироваться исходя из дальнейшего использования результатов. Важным случаем является задача классификации.

В-третьих: необходимостью корректной *работы с парами фигур*. Необходимость совместной сегментации пар фигур возникает при разработке метрик, описывающих сходство и различие формы изображений в задачах классификации. Несмотря на то, что топологические свойства скелетного графа отражают структуру объектов, задачи распознавания требуют определения *функции сходства формы плоских фигур*, что обуславливает дополнительную сложность.

Структура предлагаемого метода решения

Для решения поставленных задач необходимо определить математический аппарат: методы сегментации и критерии качества сегментации.

Предлагаемое решение поставленных задач основывается на следующем подходе:

Во-первых, выделим две задачи скелетной сегментации:

- Задача генерации скелетных дескрипторов формы по критериям полноты описания — задача сегментации фигуры.
- Задача селекции скелетных признаков по критериям отделимости классов — задача сравнения формы фигуры.

Во-вторых, обозначим следующий подход к решению указанных задач:

(1) Задача сегментации фигуры:

- (a) Циркулярное представление фигуры — задание полного описания фигуры. Данное представление содержит в себе ”лишнюю” информацию для описания формы.
- (b) Определение признаков формы — множеств подциркуляров фигуры при помощи морфологических функций и проекций.

- (c) Определение устойчивой проекции фигуры — неинформативное, но устойчивое описание фигуры.
 - (d) Определение функции устойчивости образа.
 - (e) Генерация признаков по критериям соответствия и полноты описания.
- (2) Задача сравнения формы фигур:
- (a) Определение априорной информации об изоморфизме циркуляров — топологическая функция устойчивости.
 - (b) Определение функции устойчивости пары образов — метрическая функция устойчивости.
 - (c) Селекция признаков по критериям делимости классов — оптимизация по топологической и метрической функциям устойчивости.
 - (d) Определение меры сходства на паре образов.

Научные результаты, выносимые на защиту

- (1) Критерий качества скелетной сегментации фигуры, основанный на определении функции штрафа при помощи противоположных по смыслу функций соответствия и устойчивости. Метод скелетной сегментации фигуры, основанный на минимизации циркулярной функции штрафа.
- (2) Критерий качества скелетной сегментации пары фигур. Метод скелетной сегментации пары фигур, основанный на минимизации циркулярной функции штрафа для пар.

- (3) Алгоритм поиска оптимальной сегментации пары фигур, основанный на определении циркулярной функции штрафа для пары фигур с учетом априорной информации об изоморфизме скелетов и на минимизации функции штрафа для пары циркуляров фигур. Определение множества циркуляров общего положения. Доказательство существования и единственности решения на множестве базовых циркуляров общего положения.
- (4) Циркулярная мера сходства формы фигур, основанная на проекции циркулярной функции штрафа на множестве пар циркуляров.

Научная новизна

- (1) Подход к определению критерия качества скелетной сегментации фигуры через методы математической морфологии.
- (2) Идея определения моделей сегментации формы на основе оптимизации по соответствию и качеству.
- (3) Формализация аппарата циркулярной морфологии: множества циркуляров, операторы проектирования на множествах циркуляров, циркуляры уникальной проекции, максимальный единичный проектор, циркулярные функции штрафа, соответствия, устойчивости.
- (4) Новый метод скелетной сегментации фигуры, основанный на минимизации циркулярной функции штрафа.
- (5) Новый критерий качества скелетной сегментации пары фигур, основанный на циркулярной функции штрафа для пары фигур и априорной информации об изоморфизме.
- (6) Новый метод скелетной сегментации пары фигур на основе оригинального критерия качества.

- (7) Алгоритмы построения монотонного множества вложенных цепочек циркуляров, алгоритм поиска оптимальной сегментации пары фигур.
- (8) Новая циркулярная мера сходства формы фигур, основанная на проекции циркулярной функции штрафа на множестве пар циркуляров.

Научная значимость работы состоит в

- (1) формализации математической морфологии на множестве циркуляров — определении аппарата *циркулярной морфологии*, который может быть использован для определения общих и прикладных мер для сравнения плоских фигур;
- (2) определении теоретически корректного критерия сегментации одной фигуры и зависимого критерия сегментации пары фигур.

Практическая значимость

Представление фигур с помощью скелетной сегментации и циркулярной морфологии может быть использовано в задачах распознавания формы.

Полученные результаты диссертационной работы могут найти применение в программных комплексах двумерной векторной графики в качестве встраиваемых модулей, в системах распознавания изображений, машинного зрения.

Апробация

Представленные в работе результаты докладывались и обсуждались на:

- (1) 12-й, 13-й и 14-й всероссийских конференциях "Математические методы распознавания образов" (Московская обл. 2005, Ленинградская обл. 2007 год, Владимирская обл. 2009 год);
- (2) международных конференциях "Интеллектуализация обработки информации - 2006" и "Интеллектуализация обработки информации - 2008" (Симферополь 2006, 2008);

- (3) международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых "Ломоносов-2006" в секциях "Математика и механика" и "Вычислительная Математика и Кибернетика" (Москва 2006);
- (4) научной школе-семинаре "Дискретная математика и математическая кибернетика", Московская область, март 2006;
- (5) 18-й международной конференции по компьютерной графике и машинному зрению "Графикон" (Москва 2008 год);
- (6) 4-ой международной конференции по теории компьютерного зрения и приложениям (The fourth International Conference on Computer Vision Theory and Applications VISAPP- 2009), Лиссабон, Португалия 2009;
- (7) 2-ом международном семинаре по анализу изображений: теории и приложениям (The Second International Workshop on Image Mining. Theory and Applications (IMTA 2009), Лиссабон, Португалия 2009;
- (8) 10-й международной конференции по вычислительным наукам и приложениям (ICCSA 2010), Фукуока, Япония 2010 — *победитель в номинации лучшая работа*;
- (9) семинарах "Морфологический анализ данных", Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, 2011.

Список публикаций

По теме диссертации опубликовано 15 работ, включая 9 статей в отечественных и зарубежных журналах и сборниках.

- (1) *Домахин М.А., Местецкий Л.М., Мехедов И.С., Петрова Л.Г.* Восстановление полутоновых изображений по изолиниям яркости. Труды 12 Всероссийской конференции Математические Методы Распознавания Образов (ММРО-12), Москва,, 2005, с. 305-308.

- (2) *Петрова Л.Г., Местецкий Л.М.* "Построение гомеоморфизма односвязных многоугольных областей с изоморфными базовыми скелетами методом построения вложенных цепочек подграфов". Труды XIII международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Москва, 2006, том 4, секция "Математика и Механика" с. 69-70.
- (3) *Петрова Л.Г., Местецкий Л.М.* "Расчет гомеоморфизма многоугольников методом разбиения скругленных областей на собственные области ребер базовых скелетов". Труды XIII международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых, Москва, 2006, секция "Вычислительная Математика и Кибернетика" с. 32-33.
- (4) *Петрова Л.Г., Местецкий Л.М.,* Расчет гомеоморфизма односвязных многоугольных областей с изоморфными базовыми скелетами. Сборник "Искусственный интеллект", Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, Украина, 2006.
- (5) *Петрова Л.Г.* Непрерывные модели преобразования растровых изображений // Сборник тезисов лучших дипломных работ 2006 года. М.: Издательский отдел Факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2006.
- (6) *Петрова Л.Г.* Преобразование растровых изображений на основе непрерывных моделей гранично-скелетного представления, Сборник статей ВМиК МГУ, выпуск 2, 2006.
- (7) *Домахина Л.Г.,* Об одном методе сегментации растровых объектов для задач преобразования формы, Труды 13 Всероссийской конференции Математические Методы Распознавания Образов (ММРО-13), Ленинградская обл., г.Зеленогорск, 2007, с. 312-315.

- (8) *Домахина Л.Г., Охлопков А.Д.* Изоморфные скелеты растровых изображений, Труды 18 международной конференции ГРАФИКОН-2008, 2008 г.
- (9) *Домахина Л.Г.* Устойчивость скелетной сегментации, журнал Таврический вестник информатики и математики. Изд-во НАН Украины, 2008. - № 1.
- (10) *L. Domakhina , A. Okhlopov* Shape Comparison Based on Skeleton Isomorphism, The Proceedings of the the fourth International Conference on Computer Vision Theory and Applications (VISAPP), Lisbon, Portugal, 2009.
- (11) *L. Domakhina* Skeleton-Based Shape Segmentation, The Proceedings of the Second International Workshop on Image Mining. Theory and Applications (IMTA 2009), Lisbon, Portugal, 2009.
- (12) *Домахина Л.Г.*, Регуляризация скелета для задачи сравнения формы, Труды 14 Всероссийской конференции Математические Методы Распознавания Образов (ММРО-14), Суздаль, 2009, с. 342-346.
- (13) *Domakhina L.G.* Skeleton-Based Segmentation and Decomposition of Raster Pairs of Shapes // Pattern Recognition and Image Analysis, No. 3, 2010, pp.293-316
- (14) *Домахина Л.Г.* Критериальные и проективные морфологии для множества плоских циркуляров // Журнал вычислительной математики и математической физики , № 7, 2012.
- (15) *Liudmila Domakhina* "On the Minimization of a Circular Function on the Isomorphic Shrunk Subset," ICCSA, pp.51-60, 2010 International

Conference on Computational Science and Its Applications, 2010 (*победитель в номинации "лучший доклад"*).

Обоснование специальности

По специальности 01.01.09 - "Дискретная математика и математическая кибернетика" работа относится к направлениям "1. Дискретная математика" и "5. Математическая теория распознавания и классификации".

Внедрение результатов

Выносимые на защиту методы были разработаны, исследованы и практически использованы в ходе работ по проектам Российского Фонда фундаментальных исследований (РФФИ) 05-01-00542 "Методы распознавания формы изображений на основе дискретно-непрерывных преобразований"; 08-01-00670 "Методы анализа и распознавания формы изображений на основе непрерывных моделей".

Представленные в работе результаты частично вошли в книгу Ю.В. Визильтера и соавторов "Обработка и анализ изображений в задачах машинного зрения" [8], рекомендованную в качестве учебного пособия в технических ВУЗах.

Структура диссертации

Работа состоит из оглавления, введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Содержание работы изложено на 149 страницах. Список литературы включает 75 наименований. Текст работы иллюстрируется 48 рисунками и 6 таблицами.

Во введении описана актуальность и цели работы. В *первой главе* вводятся понятия: фигура, непрерывный скелет, аппроксимирующая фигура, скелетное и циркулярное представление фигуры. Также в первой главе ставится задача

сегментации фигур и скелетов, проводится обзор литературы. Вводится понятие скелетной сегментации и даются основные, связанные с ним, определения. Также в этой главе описываются и обосновываются свойства декомпозиции скелета, доказываются основные теоремы.

Рассматривается вопрос качества сегментации. Описаны неустойчивые элементы (нерегулярности) скелетной сегментации. Рассматривается понятие базового скелета и базовой скелетной сегментации на его основе.

Вторая глава описывает циркулярную морфологию. Вводятся определения на множестве циркуляров: оператор максимальной единичной проекции, модельное множество оператора максимальной единичной проекции, функция соответствия проекции образу, функция устойчивости проекции, стандартная и упрощенная циркулярная функция штрафа. Описываются и доказываются основные свойства введенных функций. Доказывается, что множеством допустимых проекций функции штрафа составляют только подциркуляры проецируемого образа.

Третья глава посвящена выбору наилучшей скелетной сегментации для пар фигур. Для пар циркуляров вводятся аналогичные операторы и критерии, что и для отдельных циркуляров. Описываются их свойства. Формулируется задача поиска проекции функции с априорным условием изоморфизма. Доказывается, что решение поставленной задачи существует и, при определенном дополнительном условии, единственно. Предлагается конструктивный метод решения поставленной задачи. Приводится доказательство того, что полученное решение является точной проекцией функции с априорным условием изоморфизма.

Четвертая глава относится к задаче сравнения формы плоских фигур. Проводится обзор литературы по теме сравнения формы на основе скелетов и

фиксируются основные связанные с этим проблемы. Предлагается метод сравнения формы на основе скелетной сегментации для пар объектов. Предлагается новая метрика на основе проекции с априорным условием изоморфизма. Описываются эксперименты по применению данных методов к задаче распознавания формы.

В заключении подводятся итоги работы и формулируются задачи для дальнейших исследований.

Задача сегментации фигуры и скелета

Граничное и скелетное представление формы — удобный инструмент анализа бинарных изображений. Построив граничное представление бинарного образа, мы можем легко выявить такие его важные топологические характеристики, как количество связных компонент, наличие односвязных и многосвязных компонент. Анализ локальных свойств полученной границы дает возможность оценить ее гладкость и кривизну. Также можно вычислить различные геометрические характеристики объектов, например, периметр и площади компонент связности. Построив непрерывный скелет бинарного изображения, мы получаем также большое количество информации о составе, расположении и форме объектов, представленных на изображении. Структура скелетного графа, расположение его вершин, длина и кривизна ветвей, ширина (радиальная функция) ветвей - эти и другие характеристики могут быть легко вычислены на основе скелета [15]. Все эти величины оказываются полезными при решении задач машинного зрения, распознавания образов, классификации формы фигур.

Сегментация фигуры — это ее разбиение на компоненты. Прикладной смысл сегментации фигуры заключается в том, что разбиение на более простые компоненты позволяет успешно сравнивать и преобразовывать фигуры ”по частям” вместо глобальных операций. Разбиение фигуры играет важную

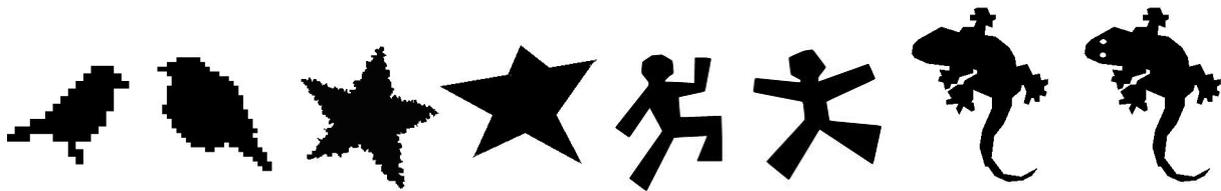


Рис. 1.1. Фигуры.

роль в системах распознавания и компьютерной графики. Например, в приложениях, связанных с обработкой документов: организация запросов изображений из базы данных, распознавание в медицине, сравнение формы и т.д. А модели разбиения как раз предоставляют инструмент для этого.

1.1. Фигура

Необходимо определить объекты, с которыми мы работаем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (Область). *Область* на евклидовой плоскости — непустое связное открытое множество точек [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (Замкнутая область). *Замкнутая область* на плоскости — минимальное замкнутое множество на плоскости, содержащее область.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (Нормальная область). *Нормальная область* [35] — ограниченная замкнутая область, граница которой представляет собой объединение конечного числа замкнутых контуров, каждый из которых в свою очередь состоит из конечного числа участков аналитических кривых.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (Непрерывная фигура). *Непрерывной фигурой* будет считаться любая нормальная область.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 (Односвязная непрерывная фигура). Если в границе непрерывной фигуры всего один контур, то фигура *односвязна*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 (Простая непрерывная фигура). *Простая непрерывная фигура* — односвязная непрерывная фигура.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 (Простой многоугольник). *Простой многоугольник* — замкнутая ломаная без самопересечений [34].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8 (Простая многоугольная фигура). *Простая многоугольная фигура* — замкнутая область, ограниченная простым многоугольником [15].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9 (Многосвязная фигура). Если в границе непрерывной фигуры более одного контура, то фигура *многосвязна*.

Основным объектом, рассматриваемым в данной работе, будет простой многоугольник, хотя многие понятия можно обобщить как на многосвязные многоугольные фигуры, так и на произвольные непрерывные фигуры.

На рисунке 1.1 изображены примеры различных фигур.

1.2. Скелетное и циркулярное представление фигуры

1.2.1. Скелет фигуры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10 (Пустой круг). *Пустым кругом* фигуры F называется замкнутое множество точек $S^r(p) = \{q : q \in R^2, p \in R^2, r \geq 0, d(p, q) \leq r\}$ такое, что $S^r(p) \subset F$. При $r = 0$ $S^r(p)$ также является пустым кругом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11 (Максимальный пустой круг). *Максимальным пустым кругом* фигуры называется пустой круг фигуры, который не содержится ни в одном другом пустом круге фигуры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12 (Скелет фигуры). *Скелетом* $ta(F)$ *фигуры* F [16] (рис. 1.2) называется множество центров всех ее максимальных пустых кругов.

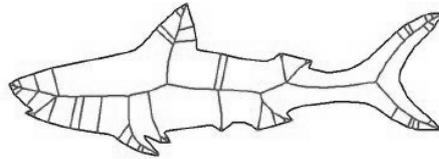


Рис. 1.2. Скелет фигуры.

В дальнейшем в работе будут использоваться следующие обозначения:

F — фигура;

$ma(F)$ — скелет фигуры F (medial axes).

Такой скелет также называют *множеством срединных осей* [35].

1.2.2. Скелетное представление фигуры. Скелет имеет вид планарного графа и может быть использован как признак описания формы. Степени его вершин могут указывать на "сложность" фигуры. Можно сравнивать топологию скелетов различных фигур в качестве инструмента сравнения формы. Но зачастую одних топологических свойств скелета недостаточно для решения данной задачи. Необходимость использования метрических свойств фигур в задачах сравнения формы породила "линии с шириной" или "циркуляры".

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13 (Скелетное представление фигуры). *Скелетное представление фигуры* [15] — это ее скелет вместе с множеством всех вписанных пустых кругов.

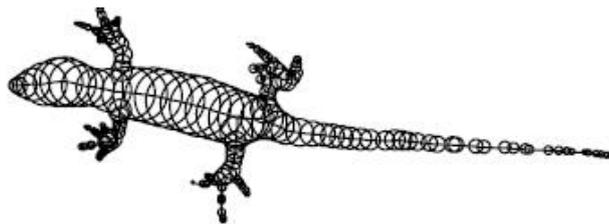


Рис. 1.3. Циркулярное представление фигуры.

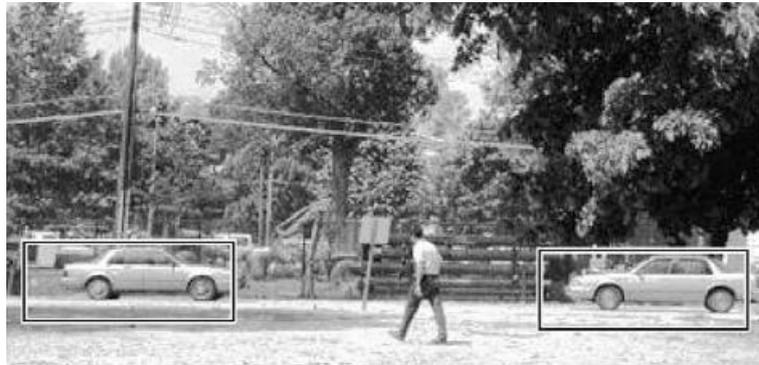


Рис. 1.4. Сегментация изображения.



Рис. 1.5. Сегментация фигуры.

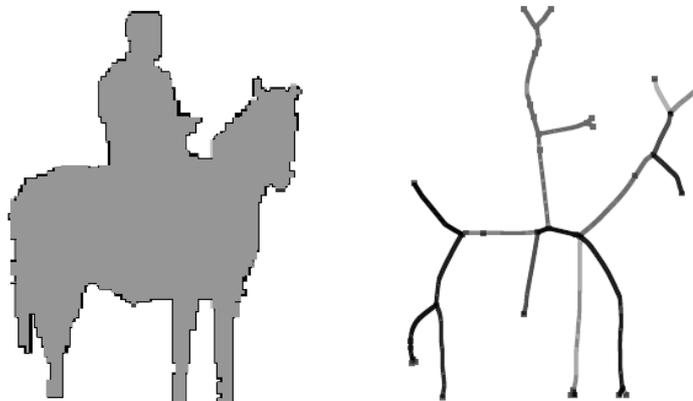


Рис. 1.6. Сегментация скелета.

1.3. Сегментация изображения, фигуры и скелета

Рассмотрим подробно понятия "сегментация изображения", "сегментация фигуры" и "сегментация скелета".

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14 (Сегментация изображения). *Сегментация изображения* — выделение на нем объектов (рис. 1.4) [52].

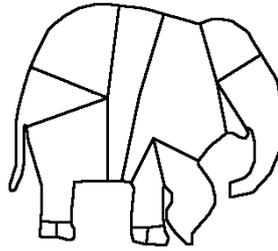


Рис. 1.7. Сегментация, отражающая структуру фигуры.

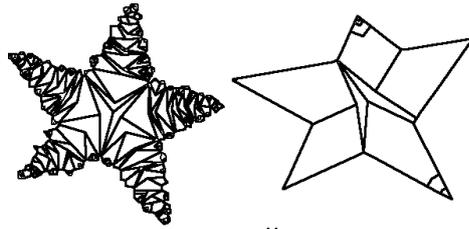


Рис. 1.8. Сегментация, неустойчивая к граничным шумам.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15 (Сегментация фигуры). Под *сегментацией* фигуры будем понимать ее разбиение на конечное множество областей (рис. 1.5).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 16 (Сегментация скелета). *Сегментация скелета* — его конечное разбиение.

На рис. 1.6 изображена фигура и ее сегментированный скелет.

1.3.1. Задача сегментации фигуры. *Задача сегментации фигуры в общем виде* — построить разбиение фигуры.

1.3.2. Задача сегментации скелета. *Задача сегментации скелета в общем виде* — построить скелет и его разбиение.

Детальные постановки данных задач предполагают определение внешних функций, определяющих критерии построения разбиений.

Примеры критериев для задачи сегментации фигуры:

- (1) Сегментация задает представление структуры фигуры (рис. 1.7 — пример сегментации фигуры, отражающей структуру).

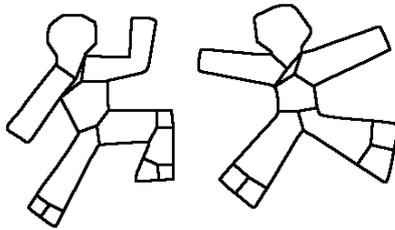


Рис. 1.9. Сегментация скелета, устойчивая к незначительным деформациям фигуры.

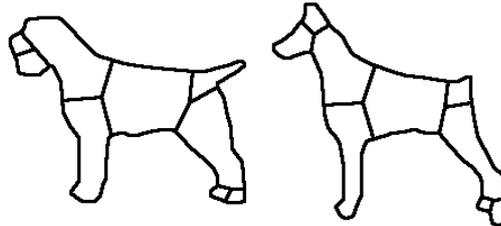


Рис. 1.10. Сегментация скелета, сходная для пары фигур.

- (2) Устойчивость к граничным шумам (рис. 1.8 — пример неустойчивой к граничным шумам сегментации фигуры).
- (3) Устойчивость к незначительным деформациям гибкой фигуры (рис. 1.9 — пример сегментации фигур, устойчивой к деформациям).
- (4) Сходство для похожих фигур (рис. 1.10 — пара похожих фигур со сходными сегментациями).

Для скелета можно определить аналогичные критерии. Или другие, например, оптимальное (в зависимости от задачи) число ребер скелетного графа.

1.3.3. Геометрический граф. Скелет фигуры представляет собой континуальное множество точек. Необходимо его сегментировать, то есть разбить на конечное множество элементов. Рассмотрим понятие ”геометрический граф” и попробуем дополнить модель скелета до геометрического графа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 17 (Геометрический граф). *Геометрический граф* G [56] — это совокупность $G = \langle V, E \rangle$, где V - непустое множество точек пространства, а E — множество простых кривых (возможно, направленных), удовлетворяющих следующим условиям:

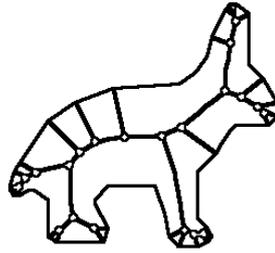


Рис. 1.11. Скелетный граф.

1. каждая замкнутая кривая множества E содержит только одну точку множества V ;
2. каждая незамкнутая кривая множества E содержит ровно две точки множества V — ее граничные точки;
3. кривые множества E не имеют общих точек, за исключением точек из множества V .

Элементы множества V называют вершинами графа, а само это множество — носителем графа; элементы множества E называются ребрами графа, а само E — его сигнатурой.

Таким образом, геометрический граф — это геометрическая конфигурация или структура в пространстве, состоящая из множества точек, взаимосвязанных множеством простых (не имеющих точек самопересечения) кривых.

1.3.4. Скелетный граф. Скелет фигуры можно рассматривать как геометрический граф.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 18 (Вершина скелета). Вершинами скелета назовем все центры максимальных пустых кругов, кроме тех, что касаются границы фигуры в двух точках.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 19 (Ребро скелета). Ребром скелета, соединяющим две вершины, назовем срединные оси фигуры, состоящие из центров окружностей, каждая из которых касается границы ровно в двух точках.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 20 (Скелетный граф). Геометрический граф с множеством вершин и ребер скелета назовем скелетным графом.

В дальнейшем в работе под скелетом будет пониматься данная модель скелетного графа с выделенными вершинами и ребрами. Полученная модель представляет собой разбиение скелета (рис. 1.11):

- вершины скелетного графа — точки разбиения;
- ребра скелетного графа — элементы разбиения.

1.3.5. Циркулярный граф. Понятие ”гранично-скелетного представления” было обобщено [15], [18] до циркулярного представления фигуры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 21 (Циркулярный граф, силуэт циркулярного графа). Рассмотрим множество точек T евклидовой плоскости R^2 , имеющее вид геометрического графа. С каждой точкой $t \in T$ связан круг C_t с центром в этой точке. Семейство кругов $c = \{C_t, t \in T\}$ называется *циркулярным графом* [15] или *циркуляром*. Граф T называется осевым графом циркулярного графа. Объединение $Sil(c) = \bigcup C_t$ всех кругов семейства c называется *силуэтом циркулярного графа*.

$c = \{C_t, t \in T\}$ — обозначение циркулярного графа;

C_t — обозначение круга на осевом графе циркуляра;

$Sil(c)$ — обозначение силуэта циркулярного графа c ;

Θ — множество всех циркуляров на плоскости.

1.3.6. Циркулярное представление фигуры. Рассмотрим фигуру F и ее скелетный граф с множеством максимальных пустых кругов $C(F)$ (их центры и образуют скелетный граф) $\{ta(F), C(F)\}$. Получим циркуляр , образованный семейством этих кругов. Рассмотрим множество всех точек, принадлежащих множеству кругов $C(F)$. Это множество совпадает с исходной фигурой F . При этом данное представление можно использовать для генерации дескрипторов формы, поэтому оно будет использоваться далее в настоящей работе (рис. 1.3 [15]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 22 (Циркуляр фигуры). Описанное циркулярное представление на основе скелетного графа будем называть *циркуляром* фигуры.

Аналогично с обозначением скелета фигуры $ta(F)$ обозначим $tg(c)$ — осевой граф циркулярного представления.

1.4. Обзор литературы

1.4.1. Методы сегментации фигуры. Существующие методы сегментации фигуры (рис. 1.12) можно условно разбить на два класса:

- (1) Основанные на границе фигуры, использующие лишь информацию о контуре для того, чтобы выделить части разбиения.
- (2) Основанные на информации о внутренней структуре.

В качестве методов сегментации, не связанных с построением скелета, можно выделить морфологические подходы [70, 71], в которых происходит разбиение фигуры с использованием заданного структурного элемента путем морфологических операций (эрозия, открытие, закрытие). В работе [71] — пример ”эффективной и точной” сегментации формы. Основной целью предложенного авторами [71] разбиения фигур было предотвращение ”перекрытий”

при морфологическом разбиении фигуры. Также авторы [71] указывают на то, что их метод дает значительно меньше компонент фигуры в разбиении по сравнению с некоторыми другими методами. В работе [27] основной задачей является разбиение фигуры на так называемую "основную форму" и "дополнительные отклонения" от нее. Для решения этой задачи используются дескрипторы Фурье, которые дают базовые характеристики формы такие как вытянутость, эллиптические и циркулярные характеристики. Внутренние свойства фигуры не рассматриваются. В [59] приведен пример разбиения на основе анализа выпуклости фигуры. Единственным его достоинством является простота. О стабильности таких подходов нет речи. Аналогичный подход предложен в [53]. В этой работе авторы говорят о "визуальном качестве" их подхода, так как выпуклые части фигуры визуальным образом выделяются и должны быть отнесены к различным областям сегментации. Шумы на границе предлагается устранить с помощью выбора подходящей аппроксимирующей фигуры.

Подобные методы не подходят для задач, в которых необходимо анализировать структуру фигур.

Методы второго класса часто используют скелеты [43, 54, 65, 66]. Большинство известных методов не содержат корректных критериев выбора метода сегментации. Нет критериев сегментации для работы с парами фигур.

В [43] предложены критерии качества сегментации:

- (1) *полнота* — сегментация содержит всю информацию об объекте;
- (2) *компактность* — сегментация содержит небольшое количество информативных компонент;

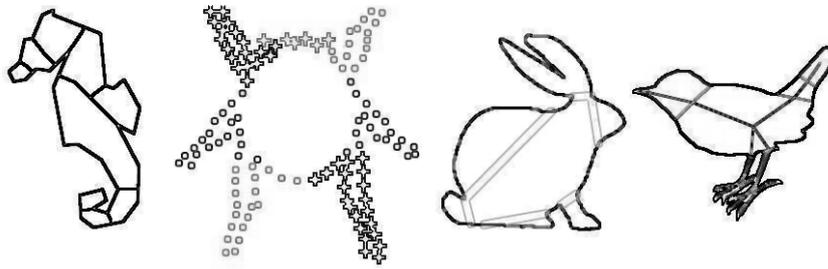


Рис. 1.12. Различные сегментации фигур.

- (3) *робастность* — устойчивость к шумам и незначительным изменениям границы, а также к ”артикуляции” — движению частей объекта (человек имеет одинаковую в определенном смысле сегментацию в разных положениях движения);
- (4) *высокая алгоритмическая скорость вычислимости.*

Авторы [43] предлагают представление формы, основанное на ”деревьях симметричных осей”. Обосновывается полнота предложенного представления [43]. Вычислительная скорость построения представления равна $O(N^4)$ по количеству вершин контура. Компактность и робастность представления показаны на примерах.

Имеется ряд работ, в которых рассмотрены дискретные фигуры и для построения разбиения используются дискретные скелеты. Например, [65] представляет иерархическое разбиение, основанное на осевом графе фигуры — дискретном скелете (модель, в которой граница фигуры и скелет представлены в виде растровых изображений). Обоснованием выбора метода является тот факт, что осевой граф отражает геометрические свойства фигуры, а иерархическое представление фигуры может быть использовано для задач определения коллизий (пересечений двух объектов) [46]. Метод обладает всеми недостатками, присущими дискретному скелету: отсутствие строгого определения, наличие шумовых ветвей, затрудняющих анализ формы [15].

Интересный метод сегментации фигуры предложен в [54]. Разбиение строится так же, как и в [65] иерархически, но во время параллельного итерационного процесса построения ”приблизительного скелета”, отражающего топологию фигуры. На каждой итерации с использованием некоторого критерия оценивается точность построенного скелета и качество декомпозиции. Устойчивость к шумам и деформациям показана на экспериментах.

В качестве методов сегментации, не связанных с построением скелета, можно выделить морфологические подходы [70, 71], в которых происходит разбиение фигуры с использованием заданного структурного элемента путем морфологических операций: эрозия и дилатация — строятся вложенные по эрозии скелетные подмножества. В работе [71] — пример ”эффективной и точной” сегментации формы с использованием восьми структурных элементов. Делается 8 разбиений при помощи эрозии, из которых затем составляется одно оптимальное со структурирующим элементом восьмиугольником. Основной целью предложенного авторами разбиения фигур было предотвращение ”перекрытий” при морфологическом разбиении фигуры. Также авторы указывают на то, что их метод дает значительно меньше компонент фигуры в разбиении по сравнению с некоторыми другими методами.

В [59] приведен пример разбиения на основе анализа выпуклости фигуры. Задается величина ”выпуклости” разбиения — взвешенная сумма ”выпуклости” всех областей разбиения. Выпуклость области разбиения — это величина, равная отношению площади области разбиения к площади ее выпуклой оболочки. Параметром является число областей разбиения. Аналитического решения авторами не предложено. Предложен алгоритм поиска оптимальных прямых, разрезающих фигуру на заданное число областей, максимизирующий

величину выпуклости. Достоинство подхода — простота. Отсутствует доказательство, что данное ”разрезание” максимизирует эту величину. Нет никаких обоснований для применения подхода к прикладным задачам (распознавания, анализа формы).

Аналогичный подход предложен в [53]. В этой работе авторы говорят о ”визуальном качестве” их подхода, так как выпуклые части фигуры визуально выделяются и должны быть отнесены к различным областям разбиения. Шумы на границе предлагается устранить с помощью выбора подходящей аппроксимирующей фигуры.

Авторы Aichholzer и Aurenhammer [28] предложили концепцию *линейного скелета* в виде объединения угловых бисекторов, полученных в процессе ”распространения волны” из всех углов многоугольной фигуры. Прямолинейный скелет не задается аналитически, а определяется по алгоритму построения. Данный скелет можно также представить в виде скелетного графа и строить его сегментацию. Преимущества при выборе такого скелета для решения прикладных задач обосновывается тем, что все ребра такого скелета — линейные отрезки, что является преимуществом по сравнению со множеством срединных осей [35], в котором встречаются отрезки парабол. Преимущество линейного скелета также его простая алгоритмическая вычислимость. Тем не менее вычислительная сложность не может быть по определению ниже субкубической: $O(n \log^2 n)$ [37] или $O(n^{1+\epsilon})$ [42] по числу ребер многоугольника. Кроме того, линейный скелет для фигур с большими невыпуклыми углами, очень далек от множества центральных осей и представляет собой сомнительный инструмент для использования на практике (рис. 1.15).

В работе [67] предложено разбиение простого многоугольника на основе линейного скелета [28]. Данное разбиение обладает теми же недостатками, что и сам линейный скелет. Значимые части, выделяемые при помощи такого подхода, обоснованы лишь "визуальным качеством". Кроме того, построение линейного скелета имеет большую вычислительную сложность по сравнению с множеством срединных осей.

В работе [66] предлагает метод разбиения простого многоугольника на значимые части, основанный на прямолинейных скелетах (рис. 1.15). При этом даже для пары похожих фигур указанный метод не всегда дает одни и те же значимые части. Это означает, что значимые части определены некорректно, и метод неустойчив и неприменим к задачам распознавания и морфинга.

Можно сделать вывод о том, что большинство из приведенных работ не содержит серьезного обоснования в пользу выбора того или иного метода сегментации. Авторы ограничиваются общими словами о визуальном качестве предложенных методов сегментации или проводят эксперименты на конкретных приложениях. Много работ опираются на эффективность и невысокую вычислительную сложность алгоритма построения разбиения. О стабильности или устойчивости полученных разбиений говорят немногие и, даже если говорят, то обычно подразумевают под этим устойчивость к шумам на границе фигуры.

1.4.2. Примеры сегментации скелета в литературе. Скелет обладает рядом недостатков, таких как шумовые ребра и иные нерегулярности. Поэтому во многих работах рассмотрены модификации скелетных графов. Более подробно нерегулярности скелета будут рассмотрены во второй главе.



Рис. 1.13. Скелетный граф для пары фигур.

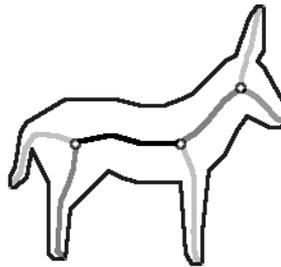


Рис. 1.14. Скелетный граф на основе базового скелета.

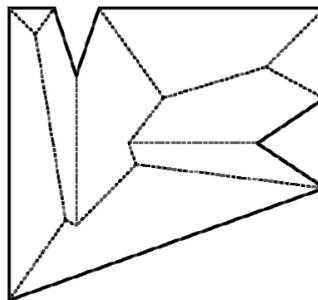


Рис. 1.15. Линейный скелет [28].

В работах [60], [49], [61] предлагается модифицировать скелетные графы пары фигур при помощи операций ”стрижка” и ”склейка” ребер скелетных графов до получения скелетных графов одинаковой структуры. При этом происходит

- (1) получение скелетов определенного вида;
- (2) сегментация полученных скелетных графов на ребра (рис. 1.13).

И.А. Рейер [17] предлагает метод построения подграфа скелетного графа в виде базового скелета (рис. 1.14).

Прямолинейный скелет, предложенный Mirela Tanase [66], представляет собой модификацию линейного скелета, предложенного Aichholzer и Aurenhammer [28]. Он состоит также лишь из прямолинейных отрезков, но

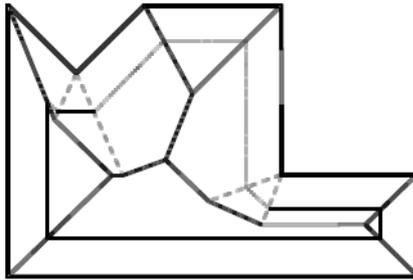


Рис. 1.16. Прямолинейный скелет [66].

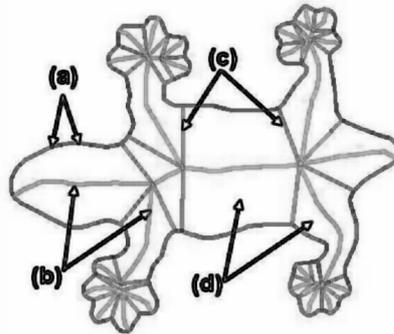


Рис. 1.17. Сегментация фигуры и скелета.

имеет ту же топологию, что и множество срединных осей и приближен к нему (рис. 1.16). В работе Mirela Tanase [66] предложен метод декомпозиции фигуры на основе прямолинейного скелета.

1.5. Скелетная сегментация фигуры

Исходя из предположения, что скелет фигуры несет информацию о ее структуре, можно построить сегментацию фигуры, основанную на ее скелете.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 23 (Собственная область ребра скелета). Собственная область ребра скелета — это минимальное подмножество точек фигуры, ограниченное ребром скелетного графа и соответствующими радиальными отрезками (перпендикулярами, опущенными из вершин скелетного графа).

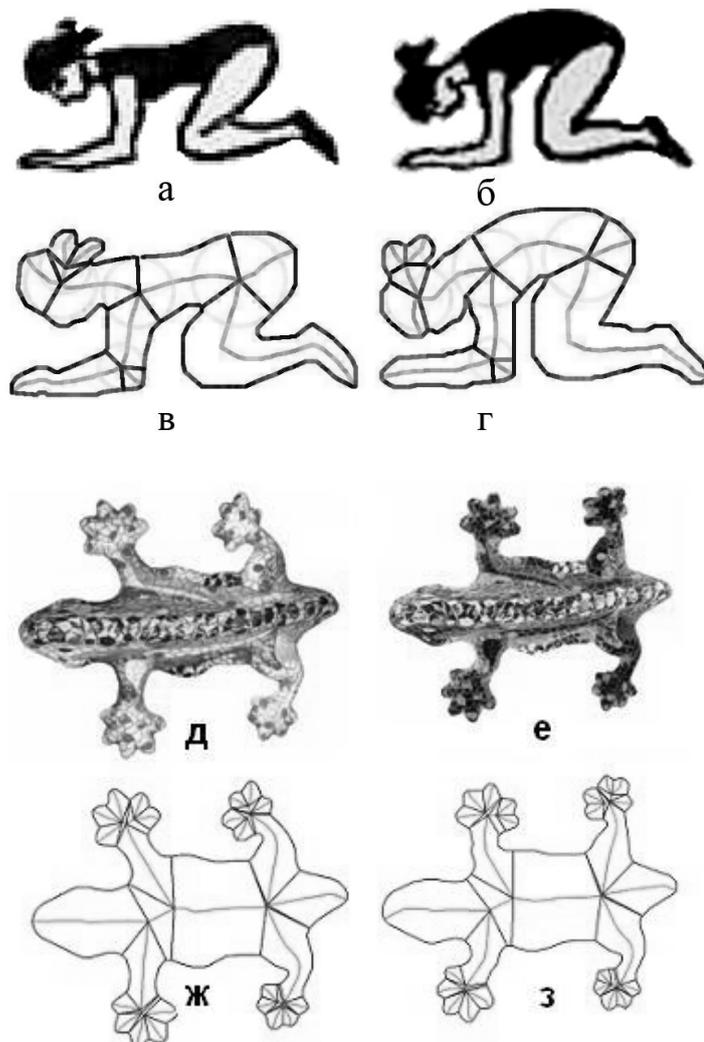


Рис. 1.18. Скелетная сегментация фигур.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 24 (Скелетная сегментация фигуры). *Скелетной сегментацией фигуры* [9] будем называть ее разбиение (рис. 1.17) на собственные области, связанные с ребрами скелетного графа.

На рисунке 1.17

- (а) граница фигуры;
- (б) скелет (скелетный граф с заданными вершинами представляет собой скелетную сегментацию);
- (с) перпендикуляры, опущенные из вершин скелетного графа;

(d) собственные области (компоненты скелетной сегментации фигуры) (на рис. 1.17 стрелками указаны две собственные области).

1.6. Качество скелетной сегментации

Основная проблема скелетных представлений в том, что они неустойчивы к незначительным изменениям фигуры, таким как небольшие шумы на ее границе. Иными словами, обладают нерегулярностями.

Рассмотрим:

- виды нерегулярностей скелета;
- базовый скелет фигуры как средство для улучшения качества скелетной сегментации;
- понятия устойчивость скелетной сегментации и регуляризация скелета по Тихонову;
- устойчивые подграфы скелета;

1.6.1. Некорректность задачи скелетизации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 25 (Корректно поставленная задача). Задача поставлена корректно (задача корректна) [23] если

- (1) задача разрешима при любых входных данных;
- (2) имеется единственное решение;
- (3) решение непрерывно зависит от входных данных (малому изменению входных данных соответствует малое изменение решения) - иными словами задача устойчива.

Возникает вопрос: корректно ли поставлена задача скелетизации? Проведем анализ скелета.

Известная проблема скелетного представления — наличие ”шумовых” ветвей (рис. 1.19). Для нескольких фигур, различия которых практически незаметны для глаза (рис. 1.19, 1.20), можно получить скелеты с разной топологической структурой. Небольшие нерегулярности в границе фигуры, часто являющиеся следствием шумов, приводят к появлению соответствующих шумовых ветвей скелета. Отсюда возникает проблема выбора скелетного графа, который не будет точным скелетом исходных фигур, но будет лучше отражать структуру фигур.

Для того, чтобы определить понятие ”качество скелетной сегментации” и его использовать, необходимо понять, что такое нерегулярности в скелете и какие они бывают. Интуитивно под нерегулярностью скелета понимается некоторый неустойчивый его элемент, который может существенно (в некоторой заданной метрике) изменяться при незначительных (в некоторой заданной метрике) изменениях фигуры. Рассмотрим несколько примеров:

рис. 1.19: две фигуры звезды, одна из которых имеет неровную границу — скелет такой звезды имеет множество ветвей скелета, исходящих из выпуклых вершин фигуры;

рис. 1.20: две фигуры человечков, руки которых находятся в разных положениях — при обходе их скелетных графов в одинаковом направлении, некоторые вершины ”меняются местами”;

На основе описанных примеров, можно условно классифицировать нерегулярности скелета как показано в таблице 1.

Первая ”нерегулярность” непрерывного скелета — это *терминальные шумовые ребра*, вызванные неровностью границы фигуры, не имеющие ничего общего со структурой фигуры (рис. 1.19).

Таблица 1. Виды нерегулярностей скелета.

Вид нерегулярности	Причины возникновения
рудиментные терминальные ребра	неровности границы фигуры: рис. 1.19
перехлест внутренних вершин	короткие внутренние ребра: рис. 1.20

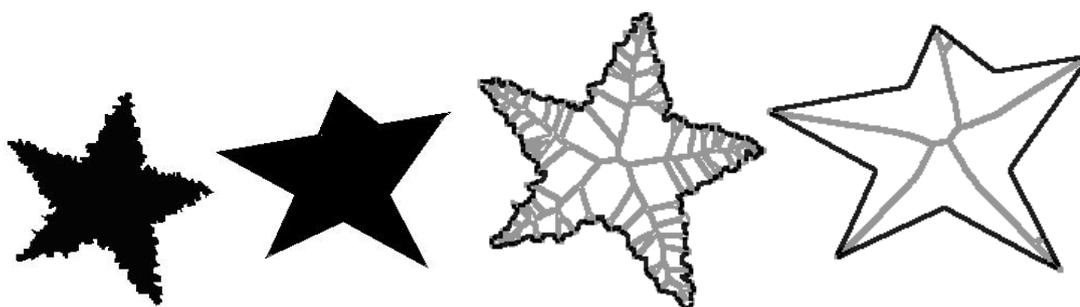


Рис. 1.19. Рудиментные ребра скелетного графа.

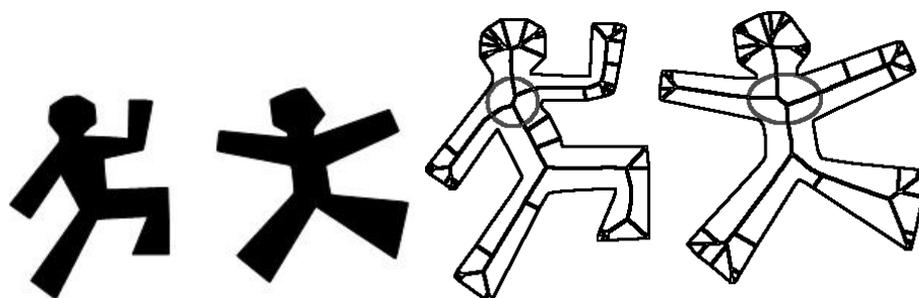


Рис. 1.20. Перехлест внутренних вершин.

Вторая ”нерегулярность” кроется во внутренних ребрах скелета: при незначительных вариациях фигуры внутренние узлы короткого ребра скелета могут поменяться местами — *перехлест внутренних узлов скелета* (рис. 1.20).

Вывод: скелетизация — *некорректная задача* по Адамару [24] в том смысле, что не обладает устойчивостью. Метод решения некорректных задач — получение некоторого приближенного решения, которое было бы более устойчивым [24]. Такой метод называется *регуляризацией по Тихонову*.

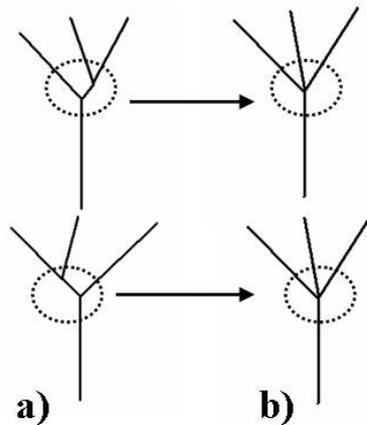


Рис. 1.21. Склейка вершин скелета.

Глядя на скелеты похожих фигур (рис. 1.19, 1.20), можно обнаружить некоторые общие (устойчивые) элементы, откуда возникает предположение, что скелет все-таки можно регуляризовать, то есть найти некоторый *приближенный устойчивый скелет*.

Проблема перекрестов устраняется различными инженерными решениями. Например, при помощи "склейки" (рис. 1.21) близко (в некоторой метрике) расположенных вершин [10].

В данной работе будет подробно рассмотрен первый вид нерегулярностей — рудиментные терминальные ребра. Для устранения данного вида нерегулярностей будут предложены теоретически обоснованные методы.

1.6.2. Устойчивость сегментации и регуляризация скелета по Тихонову.

Естественным требованием для задач распознавания и преобразования формы является следующее: похожие по форме фигуры должны иметь похожие сегментации.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 26 (Устойчивость геометрических объектов). *Устойчивость* применительно к геометрическим или иным объектам, зависящим от параметров, — это непрерывная зависимость этих объектов от параметров [4].

В фундаментальном смысле устойчивость скелета эквивалентна непрерывности оператора, который по фигуре строит ее скелет. Скелетный оператор должен получать на вход одну фигуру и строить устойчивый вид скелета, который при незначительных изменениях фигуры, меняется незначительно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 27 (Устойчивость скелета). Скелет, полученный с помощью оператора $\mathfrak{S} : F \rightarrow Sk$ устойчив на паре метрических пространств (Φ, Λ) с расстояниями $\rho_{\Phi}(F_1, F_2)$ и $\rho_{\Lambda}(Sk_1, Sk_2)$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любых двух фигур $F_1, F_2 \in \Phi$ из неравенства $\rho_{\Phi}(F_1, F_2) < \varepsilon$ следует неравенство $\rho_{\Lambda}(Sk_1, Sk_2) < \delta(\varepsilon)$, где $Sk_1 = \mathfrak{S}(F_1)$, $Sk_2 = \mathfrak{S}(F_2)$.

Зададим в явном виде расстояния $\rho_{\Phi}(F_1, F_2)$ и $\rho_{\Lambda}(Sk_1, Sk_2)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 28 (Расстояние Хаусдорфа между двумя подмножествами метрического пространства). Пусть $\rho(x, y)$ — евклидово расстояние между точками $x \in R^2$ и $y \in R^2$. Тогда расстоянием Хаусдорфа между некоторыми компактными множествами $F_1 = \{x \in R^2\}$ и $F_2 = \{y \in R^2\}$ (подмножества R^2) назовем величину

$$D_H(F_1, F_2) = \max \left\{ \max_{x \in F_1} \min_{y \in F_2} \rho(x, y), \max_{y \in F_2} \min_{x \in F_1} \rho(x, y) \right\}. \quad (1.1)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 29 (Топологическое скелетное расстояние). Топологическим скелетным расстоянием $\rho_{\Lambda}(Sk_1, Sk_2)$ на множестве Λ назовем модуль разности числа ребер скелетных графов Sk_1 и Sk_2 .

ТЕОРЕМА 1. *Оператор непрерывного скелета $ta : F \rightarrow Sk$ неустойчив на паре метрических пространств (Φ, Λ) — пространство фигур и скелетных*

графов с расстояниями $\rho_{\Phi}(\cdot, \cdot)$ — расстояние Хаусдорфа, $\rho_{\Lambda}(\cdot, \cdot)$ — топологическое скелетное расстояние.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем определение неустойчивости. Существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого $\delta > 0$, найдутся две фигуры $F_1, F_2 \in \Phi$, что из неравенства $\rho_{\Phi}(F_1, F_2) < \varepsilon$ следует неравенство $\rho_{\Lambda}(Sk_1, Sk_2) > \delta$, где $Sk_1 = \mathfrak{S}(F_1)$, $Sk_2 = \mathfrak{S}(F_2)$. Пример: 2 звезды (одна с "бахромой", другая — нет - рис. 1.19). При фиксированном $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколько угодно "бахром" вокруг звезды, так что разница между звездой "без бахромы" и звездой "с бахромой" не превзойдет $\varepsilon > 0$, в то время как количество "бахром" (а следовательно, и количество ребер скелета) превзойдет любое наперед заданное $\delta > 0$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 30 (Максимальная евклидова цепь скелета фигуры). Максимальная евклидова цепь скелета фигуры Sk^0 — подграф скелета, состоящий из цепочки ребер максимальной длины среди всевозможных цепочек, являющихся подграфами скелета фигуры.

Обозначим Ξ_F — множество всевозможных цепочек, являющихся подграфами скелета фигуры F .

Пусть $Sk^j = \{e_1^j, e_2^j, \dots, e_n^j\} \in \Xi_F$ — произвольная цепочка из этого множества. Тогда ее длина равна сумме длин всех ребер цепочки:

$$|Sk^j| = \sum_{i=1}^n |e_i^j| \quad (1.2)$$

Тогда максимальная евклидова цепь скелета фигуры F — это такая цепочка $Sk^0 \in \Xi_F$, что ее длина максимальна:

$$Sk^0 = \{e_1^0, e_2^0, \dots, e_n^0\} : |Sk^0| = \max_{Sk^j \in \Xi_F} |Sk^j| \quad (1.3)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 31 (Однореберный скелетный оператор). Обозначим $ma^0 : F \rightarrow Sk^0$ — *однореберный скелетный оператор*, который по фигуре строит максимальную евклидову цепь ее скелета (рис. 1.22в).

ТЕОРЕМА 2. *Однореберный скелетный оператор $ma^0 : F \rightarrow Sk^0$ устойчив на паре метрических пространств (Φ, Λ) с расстояниями $\rho_\Phi(.,.)$ — расстояние Хаусдорфа и $\rho_\Lambda(.,.)$ — топологическое скелетное расстояние.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ и для любых двух фигур $F_1, F_2 \in \Phi$ однореберный оператор строит скелетные графы, состоящие ровно из одного ребра. А значит, если положить, например $\delta(\varepsilon) = \varepsilon > 0$, в любом случае неравенство $\rho_\Lambda(Sk_1, Sk_2) < \delta(\varepsilon)$ будет верным, так как число ребер в каждом из скелетов Sk_1 и Sk_2 равно единице, следовательно:

$$\rho_\Lambda(Sk_1, Sk_2) = |\#Sk_1 - \#Sk_2| = |1 - 1| \equiv 0 < \delta(\varepsilon)$$

□

Однореберный скелетный оператор $ma^0(F)$ для задач сравнения формы не несет в себе достаточной информации, хотя может быть использован как признак описания фигуры. Оператор $ma(F)$ неустойчив, что делает его для задач сравнения формы также непригодным. Необходимо найти какой-то промежуточный скелетный оператор (рис. 1.22б) между неустойчивым, содержащим в себе ”лишнюю” информацию ($ma(F)$)—рис. 1.22а) и устойчивым, но содержащим в себе мало информации ($ma^0(F)$)—рис. 1.22в). Для этого можно использовать регуляризацию по Тихонову [24]. Предлагается определить некоторый функционал, минимизация которого и даст этот ”оптимальный”, то есть достаточно устойчивый, но при этом информативный скелетный оператор.

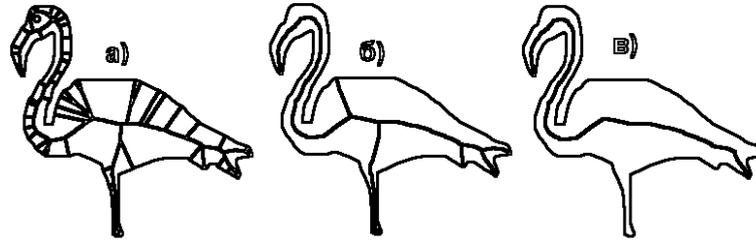


Рис. 1.22. Регуляризация скелета: а-непрерывный скелет; б-промежуточный скелет; в-устойчивое решение.

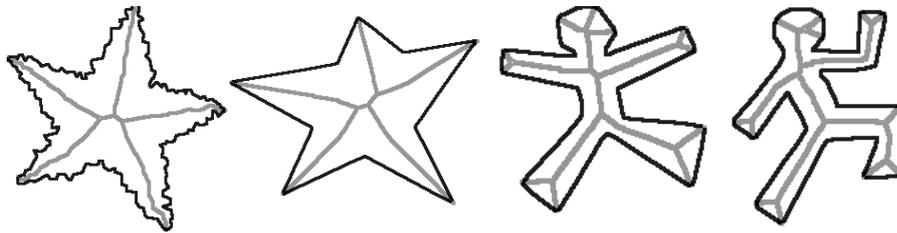


Рис. 1.23. Устранение рудиментных терминальных ребер — базовый скелет.

1.6.3. Базовая скелетная сегментация фигуры и ее свойства. Поиск некоего промежуточного решения рассмотрен в различной известной литературе. Чаще всего в основе лежит стрижка ветвей скелета по некоторому критерию. Например, в работе [66] выполняется стрижка всех терминальных ребер скелета. Большинство методов стрижки эвристические. Математически строго определенный метод — построение базового скелета с фиксированной точностью аппроксимации [17] (рис. 1.23 — рисунок взят из книги [15]). Рассмотрим его подробнее.

Базовый скелет фигуры

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 32 (Укороченный подграф скелета). Рассмотрим скелет $S = ma(F)$ фигуры F . С каждой точкой скелета $s \in S$ связан максимальный пустой круг радиуса $r(s)$ фигуры F : $V(s) = \{v : \rho(v, s) \leq r(s)\}$. Объединение $\bar{V}_S = \bigcup_{s \in S} V(s)$ множества максимальных пустых кругов с центрами на ветвях скелета совпадает с самой фигурой F , т.е. $\bar{V}_S = C$. Пусть $S' = (P', E')$ некоторый связный

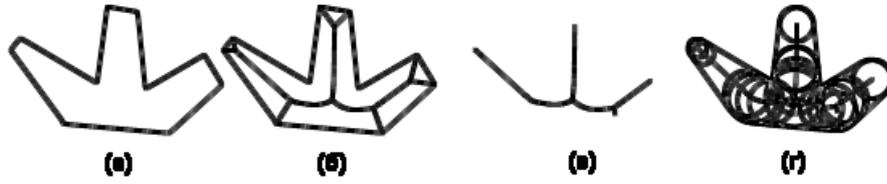


Рис. 1.24. Построение силуэта подграфа скелета: (а) многоугольная фигура, (б) скелет фигуры, (в) укороченный подграф, (г) силуэт подграфа .

подграф скелета $S = (P, E)$, такой, что $P' \subseteq P$, $E' \subseteq E$ и среди ребер из множества $E \setminus E'$ нет циклических ребер скелета S . Это означает, что граф S' может быть получен из скелета S путем удаления ("обрезки") части вершин и ребер скелета S , причем удаление не разрушает циклов и не нарушает связности графа. Такой граф S' будем называть укороченным подграфом скелета S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 33 (Силуэт фигуры). Рассмотрим фигуру $V_S = \bigcup_{s \in S} V(s)$, образованную путем объединения всех максимальных пустых кругов, центры которых лежат на укороченном подграфе S' . Такую фигуру будем называть силуэтом подграфа S' . Важное свойство силуэта укороченного подграфа — топологическая эквивалентность фигуре F . В частности, силуэт представляет собой связное множество.

На рис. 1.24 представлен пример построения силуэта (рисунок взят из книги [15]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 34 (Базовый скелет фигуры). Базовым скелетом фигуры F с точностью ε будем называть такой минимальный (как минимальное множество точек) укороченный подграф S' ее скелета S , для силуэта которого $V_{S'}$ выполнено условие $D_H(F, V_{S'}) \leq \varepsilon$, где ε — заданная положительная величина, а D_H — расстояние Хаусдорфа между фигурой F и силуэтом $V_{S'}$

Базовый скелетный граф является подграфом скелета фигуры F : .

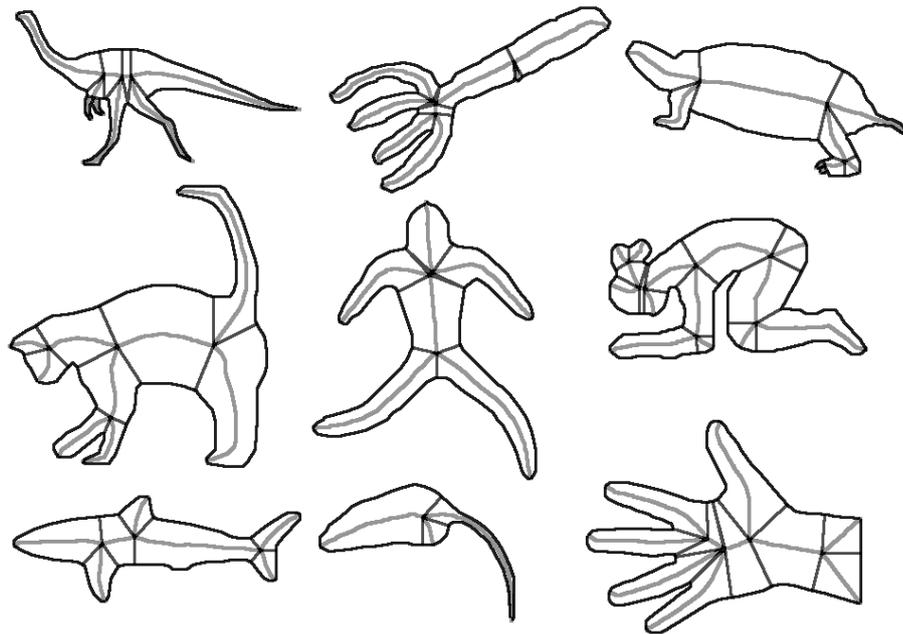


Рис. 1.25. Базовая скелетная сегментация различных фигур.

На рисунке 1.25 — пример базовых скелетов и на их основе скелетных сегментаций различных фигур.

1.7. Выводы главы

- Многоугольная фигура представляет собой многосвязную область на плоскости, граница которой состоит из конечного числа непересекающихся замкнутых ломаных линий. Простота представления многоугольных фигур в виде последовательности вершин их границ сочетается с возможностью аппроксимации ими объектов сколь угодно сложной формы. Поэтому многоугольная фигура является универсальным простым средством для построения моделей формы.
- Скелет многоугольной фигуры, состоящий из серединных осей, образованных центрами максимальных вписанных в фигуру окружностей, является информативным дескриптором формы фигуры. Скелет даёт

возможность анализировать интегральные структурные свойства объекта, связанные с формой объекта.

- Скелеты различных многоугольных фигур, аппроксимирующих один и тот же объект, либо объекты схожей формы, имеют разную топологическую структуру и поэтому не могут быть использованы для анализа и сравнения формы объектов непосредственно. Для использования этих скелетов в них должны быть выделены сходные составляющие элементы.
- Задачи сегментации фигур и скелетов в общем виде заключаются в определении и конструктивном построении разбиений фигур и скелетов, отвечающих определенным требованиям.
- Приведенный обзор литературы позволяет сделать следующие выводы относительно существующих методов сегментации фигур и скелетов.
 - с точки зрения эффективности и адекватности применения более эффективными представляются непрерывные скелеты (скелетные графы), полученные из множеств срединных осей;
 - использование известных сегментаций скелета не позволяет эффективно описывать форму плоских фигур;
 - для пар фигур необходимо определить строгий критерий сегментации и регуляризации скелета;
 - инструментами для регуляризации скелета являются понятия ”базовый скелет” и ”изоморфизм скелетов”;

На основе проведенного обзора можно сделать вывод об актуальности задачи поиска наилучшей сегментации фигуры и скелета.

- Скелетная сегментация многоугольника, построенная на основе скелета как разбиение на собственные области ребер скелета, отражает структуру фигуры. Поэтому ее можно использовать для решения задач сравнения формы фигур.
- Скелет — неустойчивая конструкция, чувствительная к локальным изменениям границы фигуры.
 - Чтобы использовать скелет эффективно для задач сравнения формы, необходимо его регуляризовать, то есть выделить устойчивую часть. Регуляризация может быть осуществлена на различных принципах. Необходимо разработать сами принципы для задачи сегментации и затем на их основе построить регуляризованный скелет.
 - Нерегулярности скелетов многоугольников классифицируются на два типа: терминальные шумовые ребра и перехлест внутренних узлов скелета.
 - Качество скелетной сегментации строго определяется через понятие устойчивость и регуляризация скелета по Тихонову.
 - Однореберный скелетный оператор устойчив.
 - Базовый скелет фигуры улучшает качество скелетной сегментации. Отсюда возникает понятие ”базовая скелетная сегментация фигуры”. Базовая скелетная сегментация лучше отражает структуру фигуры, нежели скелетная сегментация на основе скелета, содержащем все ветви.
- Вопрос о поиске промежуточного достаточно устойчивого, при этом достаточно информативного скелетного оператора будет решен в следующих двух главах настоящей работы.

Скелетная сегментация многоугольника на основе циркулярной морфологии

В данной главе решаются две главные задачи:

- (1) Определение критерия качества скелетной сегментации многоугольника.
- (2) Построение наилучшей (оптимальной) сегментации многоугольника с использованием критерия качества.

Для определения оптимальной скелетной сегментации предлагается использовать аппарат критериальной проективной математической морфологии [6], обобщающей свойства морфологий Пытьева [21] и Серра [72]. Предлагается применить морфологии для циркулярного представления фигур [18], [15] с использованием введенных на множестве циркуляров топологических и метрических критериев.

Формализация понятий в области циркулярного представления через понятийный аппарат математической морфологии Пытьева [21], Серра [72] и Визильтера [6] позволяет:

- (1) обобщить свойства плоских циркуляров в приложении к задаче сравнения формы;
- (2) поставить задачу поиска проекции морфологического проектора с априорным условием изоморфизма на множестве монотонных циркуляров;
- (3) установить связь базового скелета [17] и функции соответствия [6], введенных на множестве циркуляров.

Для решения поставленных задач предлагается:

- (1) формализовать теорию морфологий для множества циркуляров:
 - проективных;
 - критериальных;
- (2) определить функции на множестве пар циркуляров:
 - штрафа;
 - соответствия;
- (3) поставить задачу поиска наилучшей изоморфной пары циркуляров через задачу поиска проекции функции с априорным условием изоморфизма;
- (4) доказать, что решение поставленной задачи существует;
- (5) решить поставленную задачу конструктивно при помощи метода стрижки циркуляров:
 - при дополнительном условии об уникальности терминальной стрижки локализовать решение в подмножестве специальных цепочек подциркуляров;
 - доказать, что решение при условии уникальности терминальной стрижки единственно;
 - найти решение за полиномиальное время.

Морфологический анализ циркуляров является собой *неисследованную область* в теории морфологии. Поэтому приведенный в настоящей работе анализ дополняет теорию морфологического анализа еще одной областью применения.

2.1. Метрические критерии сходства циркуляров

Рассмотрим некоторые стандартные метрики для циркуляров как множеств точек. Одним из основополагающих понятий в морфологическом анализе является понятие расстояния. Для пар фигур на плоскости широко используется расстояние Хаусдорфа (определение дано в главе 1: (1.1)). Определим аналогичное расстояние для пары циркуляров.

2.1.1. Расстояние Хаусдорфа для пары циркуляров.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 35 (Расстояние между парой циркуляров). Расстоянием между циркулярами $c_1 \in \Theta$ и $c_2 \in \Theta$ назовем величину, равную расстоянию Хаусдорфа между их силуэтами:

$$D_H(c_1, c_2) = D_H(\text{Sil}(c_1), \text{Sil}(c_2)) \quad (2.4)$$

2.1.2. Погрешность аппроксимации фигуры циркуляром.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 36 (Погрешность аппроксимации фигуры циркуляром). Погрешностью аппроксимации непрерывной фигуры F циркуляром c назовем расстояние Хаусдорфа между непрерывной фигурой и силуэтом циркулярного графа: $D_H(F, \text{Sil}(c))$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 37 (Точная аппроксимация фигуры циркуляром). Циркулярное представление аппроксимирует непрерывную фигуру точно, если погрешность этой аппроксимации равна нулю.

Рассмотрим скелетный граф фигуры как осевой граф и множество максимальных пустых кругов (их центры и образуют скелетный граф). Данное циркулярное представление аппроксимирует исходную многоугольную непрерывную фигуру с нулевой погрешностью аппроксимации.

2.1.3. Срединный циркуляр фигуры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 38 (Срединный циркуляр фигуры). Назовем срединным циркуляром $c^{ma}(F)$ фигуры F такой циркуляр, что

- осевой граф $c^{ma}(F)$ совпадает со скелетом фигуры F :
 $tg(c^{ma}(F)) \equiv ta(F)$;
- множество максимальных вписанных пустых кругов фигуры F — множество кругов циркуляра $c^{ma}(F)$.

ЛЕММА 1. *Любой плоской фигуре F соответствует единственный срединный циркуляр.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из того, что скелет (множество срединных осей) и соответствующее множество вписанных пустых кругов однозначно определены для каждой фигуры. \square

Таким образом, каждой плоской фигуре можно однозначно сопоставить ее срединный циркуляр. По циркулярному представлению однозначно можно восстановить фигуру. Таким образом, описан переход от фигуры к ее циркулярному представлению и обратно, который позволяет использовать понятие "циркуляр" вместо понятия "фигура".

2.2. Топологические критерии сходства циркуляров: изоморфизм

Помимо метрических критериев сходства, необходимо определить и критерии сходства "структуры" фигур. На основе циркулярного представления можно определить топологические критерии сходства, используя понятие изоморфизма.

2.2.1. Изоморфизм скелетов. Рассмотрим два скелетных графа на плоскости.

Для того, чтобы задать их изоморфизм недостаточно существования обычного изоморфизма графов, потому что скелетный граф фигуры рассматривается в контексте фигуры на плоскости, в то время как изоморфизм — понятие, определенное для абстрактных графов, заданных множеством вершин и ребер.

Определим направление обхода ”вокруг скелетного графа”. Интуитивно обход по часовой стрелке положительный, против — отрицательный. Формально направление обхода можно задать следующим образом:

- (1) опустим радиальные отрезки из всех вершин скелетного графа к границе фигуры;
- (2) определим последовательность точек $P = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ на границе фигуры следующим образом: это все терминальные вершины скелета, которые лежат на границе фигуры и все точки касания радиальных отрезков; этому множеству соответствует множество всех вершин скелетного графа:

$$p_1 \leftrightarrow v_1, p_2 \leftrightarrow v_2, \dots, p_N \leftrightarrow v_n$$

- (3) фиксируем одну точку p_1 ;
- (4) упорядочим последовательность точек $P = \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ на границе фигуры таким образом: $P = \{p_{j_1}, p_{j_2}, \dots, p_{j_N}\}$, что для любой пары $p_{j_i}, p_{j_{i+1}}$ между ними на куске границы фигуры, их соединяющей, не содержится никакой другой точки p_{j_k} ;
- (5) такое упорядочение можно сделать всего двумя способами и оно задает обход фигуры; назовем его ”упорядочиванием вершин скелетного графа по обходу фигуры”;

(б) определим направление обхода: он положительный, если сумма векторных произведений положительна, отрицательный — если она отрицательна;

$$Sum = (p_{j_1}, p_{j_2})(p_{j_2}, p_{j_3}) + \dots + (p_{j_{N-1}}, p_{j_N})(p_{j_N}, p_{j_1}) \quad (2.5)$$

назовем первый случай ”упорядочиванием вершин скелетного графа по положительному направлению обхода фигуры с начальной вершиной v_1 ” и второй — ”упорядочиванием вершин скелетного графа по отрицательному направлению обхода фигуры с начальной вершиной v_1 ”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 39 (Сохранение ориентации вершин скелетных графов при отображении). Будем говорить, что отображение вершин скелетных графов $\vartheta : V^1 \leftrightarrow V^2 (v_1^1 \leftrightarrow v_2^1, \dots, v_n^1 \leftrightarrow v_n^1)$ сохраняет ориентацию, если при их упорядочивании по положительному направлению обхода фигур с начальных вершин $v_{i_1}^1 = v_1^1$ и $v_{j_1}^2 = \vartheta(v_1^1)$ соответственно: $v_{i_1}^1, \dots, v_{i_n}^1$ и $v_{j_1}^2 = \vartheta(v_{i_1}^1), v_{j_2}^2, \dots, v_{j_n}^2$, получается полное соответствие:

$$v_{i_1}^1 \leftrightarrow v_{j_1}^2, v_{i_2}^1 \leftrightarrow v_{j_2}^2, \dots, v_{i_n}^1 \leftrightarrow v_{j_n}^2,$$

то есть $v_{j_1}^2 = \vartheta(v_{i_1}^1), v_{j_2}^2 = \vartheta(v_{i_2}^1), \dots, v_{j_n}^2 = \vartheta(v_{i_n}^1)$

Иными словами отображение инвариантно относительно упорядочивания множеств вершин скелетных графов в одном и том же направлении (положительном).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 40 (Изоморфизм скелетов). Будем говорить, что два скелета изоморфны, если существует изоморфизм соответствующих скелетных графов [25], сохраняющий ориентацию вершин двух скелетных графов.

Требование сохранения ориентации при изоморфизме не допускает возможности ”перехлеста” смежных терминальных ребер.

Изоморфизм скелетов может быть использован для определения топологического сходства и различия фигур. Например, следующим образом: фигуры сходны, если их скелеты изоморфны, иначе различны.

2.2.2. Изоморфизм циркуляров. Для определения изоморфизма циркуляров необходимо рассмотреть изоморфизм осевых графов.

Обозначим $\tilde{V}(c)$ — множество вершин осевого графа $mg(c)$ всех степеней, кроме вершин степени равной двум.

Обозначим $\tilde{E}(c)$ — множество ветвей осевого графа $mg(c)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 41 (Изоморфизм осевых графов циркуляров). Два осевых графа циркуляров c_1 и c_2 изоморфны: $mg(c_1) \cong mg(c_2)$, если

- (1) существует биекция $\tilde{V}(c_1) \rightarrow \tilde{V}(c_2)$, соответствующих осевых графов c_1 и c_2 ;
- (2) существует биекция соответствующих ветвей $\tilde{E}(c_1) \rightarrow \tilde{E}(c_2)$;
- (3) биекция сохраняет ориентацию любых трех подряд идущих вершин из множеств $\tilde{V}(c_1)$ и $\tilde{V}(c_2)$ при положительном направлении обхода двух осевых графов.

Таким образом, отличие изоморфизма осевых графов от изоморфизма скелетов заключается в том, что ”ветвь” осевого графа рассматривается с точки зрения отображения как ”ребро”.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 42 (Изоморфизм циркуляров). Два циркуляра c_1 и c_2 изоморфны, если существует изоморфизм соответствующих осевых графов, сохраняющий ориентацию вершин обхода двух осевых графов: $mg(c_1) \cong mg(c_2)$.

2.3. Оператор проектирования на множестве циркуляров

Рассмотрим проективные и критериальные морфологии на множествах циркуляров и пар циркуляров в терминологии, введенной в работах Визильте-ра [6], [7].

Сначала определим оператор проектирования (проектор) на множестве плоских циркуляров.

Пусть имеется множество Ω .

Введем на Ω оператор проектирования $Pr: \forall A \in \Omega$

$$(1) Pr(A) \in \Omega$$

$$(2) Pr(\emptyset) = \emptyset; \emptyset — нулевой элемент множества Ω .$$

$$(3) Pr(A) = Pr(Pr(A))$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 43 (Модельное множество проектора). Множество собственных (стабильных) элементов проектора

$$M = \{A \in \Omega : Pr(A) = A\}$$

назовем модельным множеством или моделью [7].

Проектор Pr имеет смысл оператора проектирования образа на модель M .

2.3.1. Ветвь циркуляра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 44 (Инцидентность ребра и вершины графа). Если v_1, v_2 — вершины графа, а $e = (v_1, v_2)$ — соединяющее их ребро, тогда вершина v_1 и ребро e инцидентны, вершина v_2 и ребро e тоже инцидентны [25].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 45 (Терминальная вершина скелета). Вершина скелета, имеющая одно инцидентное ребро, называется терминальной, более одного - узлом скелета [15].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 46 (Терминальное и внутреннее ребро скелета). Ребро скелета называется терминальным, если оно содержит хотя бы одну терминальную вершину скелета, иначе — внутренним.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 47 (Путь в графе). Путем в графе $G = (V, E)$ [25] называется последовательность вершин и ребер, в которой каждый элемент кроме v_0 и v_1 инцидентен предыдущему и последующему.

$$v_0, (v_0, v_1), v_1, (v_1, v_2), \dots, v_{n-1}, (v_{n-1}, v_n), v_n$$

Число n в данных обозначениях называется длиной пути.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 48 (Цепь в графе). Цепью [25] называется путь, в котором нет повторяющихся ребер.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 49 (Простая цепь в графе). Простой цепью [25] называется путь без повторения вершин.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 50 (Ветвь скелета). Ветвью скелета назовем простую цепь скелетного графа, в которой все вершины имеют степень два, кроме двух крайних вершин. Ветвь скелета называется терминальной, если она содержит хотя бы одну терминальную вершину скелета, иначе — внутренней.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 51 (Ветвь циркуляра). Ветвь циркуляра — объединение всех кругов циркулярного представления, центры которых лежат на некоторой ветви скелета.

2.3.2. Подциркуляр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 52 (Подциркуляр). Рассмотрим циркуляр $c_1 \in \Theta$. Назовем циркуляр $c_2 \in \Theta$ подциркуляром циркуляра c_1 (обозначение: $c_2 \subseteq c_1$) или вложенным

в циркуляр c_1 , если осевой граф c_2 — подграф c_1 (т.е. $mg(c_2) \subseteq mg(c_1)$) и все круги с центрами на осевом графе $mg(c_2)$ совпадают с кругами, принадлежащими c_1 :

$$c_2 \subseteq c_1 \Leftrightarrow \begin{cases} mg(c_2) \subseteq mg(c_1) \\ \forall t \in mg(c_2) : C_t \in c_1 \Rightarrow C_t \in c_2 \end{cases} \quad (2.6)$$

Отметим важные свойства подциркуляра, следующие напрямую из его определения:

- (1) Подциркуляр и его осевой граф являются связными множествами.
- (2) Силуэт подциркуляра $c_2 \subseteq c_1$ лежит внутри силуэта циркуляра c_1 :
 $Sil(c_2) \subseteq Sil(c_1)$

2.3.3. Максимальный простой подциркуляр и циркуляр уникальной проекции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 53 (Максимальный простой подциркуляр). Рассмотрим осевой граф $mg(c)$ циркуляра $c \in \Theta$. В нем имеется простая цепь максимальной длины $mg(c')$, являющаяся его подграфом: $mg(c') \subseteq mg(c)$. Соответствующий подциркуляр c' назовем максимальным простым подциркуляром циркуляра c .

Отметим, что в общем случае максимальный простой подциркуляр не единственный. Но в данной работе случай, когда таких подциркуляров несколько, не рассматривается. В практических задачах данный случай встречается чрезвычайно редко. На практике можно выбирать среди нескольких максимальных любой, у остальных от длины убавлять небольшое "фиктивное значение" δ . Рассмотрим теоретически лишь случаи, в которых максимальный простой подциркуляр единственный.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 54 (Циркуляр уникальной проекции). Циркуляр $c \in \Theta$ называется циркуляром уникальной проекции, если его максимальный простой подциркуляр $c' \subseteq c$ единственный.

$\dot{\Theta} \subset \Theta$ — обозначим множество всех циркуляров уникальной проекции на плоскости.

ЛЕММА 2. *Максимальный простой подциркуляр циркуляра уникальной проекции принадлежит множеству всех плоских циркуляров уникальной проекции: $c \in \dot{\Theta} \Rightarrow c' \in \dot{\Theta}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данное утверждение следует из того, что цепь максимальной длины циркуляра уникальной проекции c совпадает с цепью максимальной длины c' . А так как она единственна, значит, у c' единственный максимальный простой подциркуляр совпадает с ним самим: $(c')' \equiv c'$. Таким образом, по определению c' — тоже циркуляр уникальной проекции. \square

2.3.4. Проектор максимальной длины. Определим оператор проектирования на множестве всех циркуляров на плоскости Θ следующим образом.

ТЕОРЕМА 3. *Оператор $Pr_1(c) = c'$ на множестве циркуляров уникальной проекции $\dot{\Theta}$, который ставит циркуляру $c \in \dot{\Theta}$ в соответствие его максимальный простой подциркуляр $c' \in \dot{\Theta}$, — оператор проектирования на множестве циркуляров.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) $Pr_1(c) \in \dot{\Theta}$, так как максимальный простой подциркуляр принадлежит множеству циркуляров.

(2) $Pr_1(\emptyset) = \emptyset$.

(3) $Pr_1(c) = Pr_1(Pr_1(c))$, так как максимальный простой подциркуляр максимального простого подциркуляра тождественно равен себе.

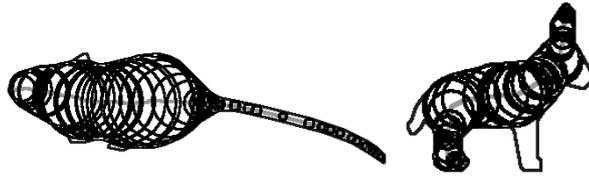


Рис. 2.1. Пример: проекции максимальной длины.

□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 55 (Проектор максимальной длины). Назовем максимальный простой подциркуляр проекцией максимальной длины, а оператор $Pr_1(c)$ — проектором максимальной длины.

На рисунке 2.1 пример проекций максимальной длины для фигур мыши и осла.

2.3.5. Модельное множество проектора максимальной длины. Обозначим

Ω_1 — множество всех циркуляров, осевые графы которых имеют вид простой цепи.

ЛЕММА 3. *Модельным множеством проектора Pr_1 являются все циркуляры из множества циркуляров уникальной проекции $\dot{\Theta}$, осевые графы которых имеют вид простой цепи.*

$$M_1 = \{c \in \dot{\Theta} : c \in \Omega_1\}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) Действительно, для $\forall c \in \Omega_1 \Rightarrow Pr_1(c) = c$.

(2) Рассмотрим произвольный циркуляр из множества уникальной проекции $c' \in \dot{\Theta}$, не являющийся простой цепью: $c' \notin \Omega_1$. Его проекцией будет циркуляр, имеющий вид простой цепи $Pr_1(c') = c''$. Но $c' \neq c''$.

□

2.4. Морфологический анализ циркуляров: критериальные морфологии

Рассмотрим критериальные морфологии на множествах циркуляров и пар циркуляров в терминологии [6], [7].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 56 (Задача построения критериального морфологического фильтра). Пусть задана целевая функция-критерий $\Phi(A, B) : \Omega \times \Omega \rightarrow R \cup +\infty$. Задача построения критериального морфологического фильтра [7] заключается в поиске проекции, доставляющей минимальное значение функции-критерию $\Phi(A, B)$ на множестве Ω :

$$\Psi(A, \Phi) = \arg \min_{B \in \Omega} \Phi(A, B) \quad (2.7)$$

- A — проецируемый образ;
- B — проекция;
- $\Psi(A, \Phi)$ — функция-проектор, зависящая от проецируемого образа и параметра: функции-критерия Φ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 57 (Множество допустимых проекций). Множеством допустимых проекций функции Φ при проецировании исходного образа A [7] назовем множество всех проекций, на которых функция-критерий $\Phi(A, B)$ принимает конечное значение. Обозначим:

$$V(A, \Phi) = \{B \in \Omega : \Phi(A, B) < +\infty\}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 58 (Функция соответствия проекции и проецируемого образа). $J(A, B) : \Omega \times \Omega \rightarrow R$ — функция соответствия проекции и проецируемого образа (matching function) — это функция, отображающая пару проекции и образа в неотрицательное значение, обладающая следующим свойством:

$$\forall A \in \Omega, \forall B \in V(A, \Phi) : J(A, A) \leq J(A, B) \quad (2.8)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 59 (Функция допустимости решения). $\chi(A, B)$ — функция (предикат) допустимости решения (validation function), определяющая множество допустимых проекций, вида

$$\chi(A, B) = \begin{cases} 0, B \in V(A, \Phi) \\ +\infty, B \notin V(A, \Phi) \end{cases} \quad (2.9)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 60 (Функция устойчивости проекции). $Q : \Omega \rightarrow R$ функция устойчивости проекции (projection quality function) — это функция, отображающая проекцию в неотрицательное значение, характеризующее ее устойчивость.

Чем меньше значение $Q(B)$, тем устойчивее проекция B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 61 (Стандартная функция штрафа). Стандартная функция штрафа проекции B [7] имеет вид суммы трех функций: соответствия, допустимости решения и устойчивости проекции:

$$\Phi(A, B) = J(A, B) + \chi(A, B) + \alpha Q(B) \quad (2.10)$$

$\alpha \geq 0$ — структурирующий параметр, обеспечивающий компромисс между функциями соответствия и устойчивости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 62 (Проектор на базе структурирующих критериев и параметров). Назовем морфологический проектор проектором на базе структурирующих критериев и параметров [7]:

$$\Psi(A, B) = Pr(A, J, \chi, \alpha, Q) = \arg \min_{B \in \Omega} \Phi(A, B, J, \chi, \alpha, Q) \quad (2.11)$$

так как зависит от вида функций $Q : \Omega \rightarrow R$, $J(A, B) : \Omega \times \Omega \rightarrow R$, $\Phi(A, B)$, $\chi(A, B)$ и параметра α .

$\Phi(A, B, J, \chi, \alpha, Q)$ — обозначение функции-критерия $\Phi(A, B)$ и ее зависимости от вида функций J, χ, Q и параметра α .

$Pr(A, J, \chi, \alpha, Q)$ — обозначение проектора $Pr(A)$ и его зависимости от вида функций J, χ, Q и параметра α .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 63 (Хорошо определенная функция штрафа). Функция штрафа (2.10) хорошо определена, если требования соответствия и устойчивости оказываются противоположными: из неравенства ”функция соответствия на проекции B_1 меньше или равна функции соответствия на проекции B_2 ” следует обратное неравенство для функции устойчивости: $Q(B_1) \geq Q(B_2)$, а из неравенства ”функция устойчивости на проекции B_1 больше или равна функции устойчивости на проекции B_2 ” следует обратное неравенство для функции соответствия: $J(A, B_1) \leq J(A, B_2)$.

$$\forall A \in \Omega : \begin{cases} \forall B_1, B_2 \in V(A, \Phi) : J(A, B_1) \leq J(A, B_2) \Rightarrow Q(B_1) \geq Q(B_2) \\ \forall B_3, B_4 \in V(A, \Phi) : Q(B_3) \geq Q(B_4) \Rightarrow J(A, B_3) \leq J(A, B_4) \end{cases} \quad (2.12)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 64 (Функция минимального расстояния). Пусть функция соответствия обладает свойствами расстояния: $\forall A, B, C \in \Omega : J(A, B) \geq 0; J(A, A) = 0; J(A, B) = J(B, A); J(A, B) + J(A, C) \geq J(B, C)$

Назовем такую функцию соответствия функцией минимального расстояния (в соответствии с терминологией в [7]).

2.4.1. Критериальные морфологии для множества циркуляров. Введем необходимые функции для определения критериальных морфологий на множестве циркуляров.

2.4.2. Циркулярная функция штрафа. Рассмотрим целевую функцию-критерий $\Phi : \Theta \times \Theta \rightarrow R$ на множестве всех циркуляров Θ . Множеством ее допустимых проекций будет $V(c, \Phi) = \{c' \in \Theta : \Phi(c, c') < +\infty\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 65 (Циркулярная функция штрафа). Определим целевую функцию-критерий $\Phi : \Theta \times \Theta \rightarrow R$ как стандартную функцию штрафа (2.10) и обозначим следующим образом:

$$\Phi_c(c, c') = J_c(c, c') + \chi_c(c, c') + \alpha_c Q_c(c') \quad (2.13)$$

Где c — циркуляр-проецируемый образ, а c' — циркуляр-проекция.

Назовем ее циркулярной функцией штрафа.

Для того чтобы определить компоненты циркулярной функции штрафа, а также решать задачу поиска проекции, необходимо ввести понятия подциркуляров.

2.5. Базовый подциркуляр с контролируемой точностью

В работе [17] описан метод получения базового скелета плоской фигуры с контролируемой точностью ϵ при помощи стрижки терминальных ветвей. Этот метод будем использовать в данной работе.

2.5.1. Стрижка терминального ребра и ветви циркуляра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 66 (Стрижка терминального ребра циркуляра). Пусть дан циркуляр c_1 и соответствующий осевой граф $T_1 = mg(c_1)$, имеющий терминальное ребро $e \subseteq T_1$. Операция стрижки терминального ребра $e \subseteq T_1$ циркуляра c_1 заключается в удалении из осевого графа $T_1 = mg(c_1)$ ребра e , а из циркуляра c_1 —

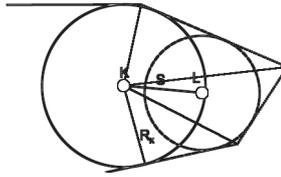


Рис. 2.2. Стрижка терминального ребра скелета и изменение силуэта.

в удалении всех кругов, центры которых лежат на ребре e . При этом в силуэте происходит "скругление" углов фигуры за счет того, что радиус круга с центром в новой терминальной вершине скелета ненулевой (рис. 2.2).

Аналогично можно делать стрижку ветви циркуляра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 67 (Стрижка терминальной ветви циркуляра). Пусть дан циркуляр c_1 и соответствующий осевой граф $T_1 = mg(c_1)$, имеющий терминальную ветвь $e \subseteq T_1$. Операция стрижки терминальной ветви $e \subseteq T_1$ циркуляра c_1 заключается в удалении из осевого графа $T_1 = mg(c_1)$ ветви e , а из циркуляра c_1 — в удалении всех кругов, центры которых лежат на ветви e .

В работе [15] понятие "базового скелета" переформулировано в конструктивное определение: базовым скелетом S фигуры F с контролируемой точностью ϵ называется минимальный укороченный подграф скелета S' такой, что расстояние Хаусдорфа между фигурой и силуэтом подграфа S' не превосходит ϵ : $D_H(F, Sil(S')) \leq \epsilon$.

Переформулируем указанное определение базового скелета в терминах подциркуляров и циркуляров.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 68 (Базовый подциркуляр с контролируемой точностью $\epsilon \geq 0$). Базовым подциркуляром с точностью, равной нулю, является сам циркуляр: $c^{(\epsilon=0)} \equiv c^*$. Базовым подциркуляром циркуляра c^* с точностью $\epsilon \geq 0$ назовем минимальный подциркуляр $c^{(\epsilon)}$ циркуляра c^* , вложенный во все базовые подциркуляры

с точностями меньше ε , такой, что расстояние Хаусдорфа между циркуляром и подциркуляром не превосходит ε .

Иными словами выполнены четыре условия:

$$\left\{ \begin{array}{l} c^{(\varepsilon)} \subseteq c^* - \text{подциркуляр} \\ D_H(c^*, c^{(\varepsilon)}) \leq \varepsilon - \text{расстояние не превосходит } \varepsilon \\ \forall c \subseteq c^* : c \neq c^{(\varepsilon)}, D_H(c^*, c) \leq \varepsilon \Rightarrow c^{(\varepsilon)} \subset c - \text{подциркуляр } c^{(\varepsilon)} \text{ минимальный} \\ \forall \varepsilon_1 < \varepsilon \Rightarrow c^{(\varepsilon)} \subseteq c^{(\varepsilon_1)} - \text{вложен во все базовые подциркуляры с меньшей} \\ \text{точностью} \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Стоит отметить, что для каждого фиксированного циркуляра c^* существует верхний порог точности $\varepsilon_{\max}(c^*)$ такой, что для любых точностей, превосходящих данный порог, базового подциркуляра не существует. Подциркуляром с точностью $\varepsilon_{\max}(c^*)$ будет являться круг с центром в одной из вершин осевого графа циркуляра c^* , то есть вырожденный циркуляр. В этом случае базовый подциркуляр может быть определен неоднозначно: может возникнуть случай, когда вырожденным базовым подциркуляром может являться круг с центром в любой из двух вершин осевого графа циркуляра c^* . А для точности меньше $\varepsilon_{\max}(c^*)$ базовый подциркуляр будет содержать как минимум одно ребро осевого графа. Таким образом, имеет смысл рассматривать точность в пределах: $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_{\max}(c^*)$.

Стоит также отметить, что первое условие в определении базового подциркуляра говорит о том, что подциркуляр является связной фигурой, а четвертое условие позволяет конструктивно построить всевозможные базовые подциркуляры на основе алгоритма стрижки.

2.5.2. Алгоритм построения монотонных цепочек подциркуляров на основе стрижки. Аналогично алгоритму нахождения базового скелета с точностью ε , описанному в работе Местецкого [15], построим монотонную цепочку всевозможных базовых подциркуляров на основе стрижки.

Пусть задан циркуляр c . Построим цепочку монотонных подциркуляров для циркуляра c следующим образом:

(1) $c^0 \equiv c$;

$Term(c^0)$ — обозначим множество терминальных ребер циркуляра c^0 .

(2) Из множества терминальных ребер циркуляра c^0 выберем терминальное ребро e^0 такое, что его удаление из графа c^0 вместе с соответствующими кругами наименьшим образом влияет на силуэт циркуляра $Sil(c)$, то есть

$$\varepsilon^1 = D_H(c, (c^0 \setminus e^0)) \rightarrow \min_{e^0 \in Term(c^0)}$$

Если таких ребер несколько, то выберем их все и обозначим $\{e^0\}$.

Обозначим $c^1 = c^0 \setminus \{e^0\}$.

Стрижка с контролируемой точностью, равной ε^1 , дает циркуляр с осевым графом c^1 . $B(c, \varepsilon^1) = c^1$. $c^1 \subset c^0$.

(3) Далее выберем терминальное ребро $e^1 \in Term(c^1)$ такое, что его удаление из графа c^1 вместе с соответствующими кругами наименьшим образом влияет на силуэт циркуляра $Sil(c)$, то есть

$$\varepsilon^2 = D_H(c, (c^1 \setminus e^1)) \rightarrow \min_{e^1 \in Term(c^1)}$$

Если таких ребер несколько, то выберем их все и обозначим $\{e^1\}$.

Обозначим $c^2 = c^1 \setminus \{e^1\}$. Верно, что $c^2 \subset c^1 \subset c^0$.

(n) И так продолжим до получения следующей цепочки вложенных подциркуляров:

$$c \equiv c^0 \supset c^1 \supset c^2 \supset \dots \supset c^n \equiv \text{Sil}(e^n) \quad (2.15)$$

Им соответствуют точности:

$$0 \equiv \varepsilon^0 < \varepsilon^1 < \varepsilon^2 < \dots < \varepsilon^n \quad (2.16)$$

Обозначим упорядоченное множество вложенных осевых подциркуляров c :

$$\tilde{c} = \{c^0, \dots, c^n\} \quad (2.17)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 69 (*Монотонное подмножество циркуляра c*). Множество \tilde{c} (2.17) назовем монотонным подмножеством циркуляра c .

Обозначим упорядоченное соответствующее множество точностей их стрижки:

$$\tilde{\varepsilon} = \{\varepsilon^0, \dots, \varepsilon^n\}, \quad (2.18)$$

Замечание: использование расстояния Хаусдорфа дает в общем случае неэффективный алгоритм полиномиальной сложности. На практике можно использовать другие расстояния, которые позволяют достичь квадратичной сложности. Например, верхнюю оценку расстояния Хаусдорфа, которую можно сделать для подциркуляров. Такие расстояния вычисляются аналитически и суммируются на каждом шаге, за счет чего достигается высокая эффективность алгоритма.

2.5.3. Циркуляры общего положения. Рассмотрим упрощенный случай, когда всем точностям из цепочки $\tilde{\epsilon} = \{\epsilon^0, \dots, \epsilon^n\}$ (2.18) соответствует ровно по одному отрезанному терминальной ребру. То есть

$$\forall i = 1, \dots, n \Rightarrow \{e^i\} \text{ состоит из одного элемента} \quad (2.19)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 70 (*Уникальность терминальной стрижки*). Будем называть описанное условие (2.19) — уникальность терминальной стрижки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 71 (*Циркуляр общего положения*). Будем называть циркуляром общего положения циркуляр, для которого выполнено условие (2.19) — уникальность терминальной стрижки, а сам процесс построения цепочки (2.19) по алгоритму выше — процессом терминальной стрижки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 72 (*Множество циркуляров общего положения*). Обозначим $\tilde{\Theta}$ — множество всех циркуляров общего положения на плоскости.

ЛЕММА 4. *Для любого циркуляра общего положения: $c \in \tilde{\Theta}$ существует такой номер $j > 0$, что в его цепочке подциркуляров (2.17), полученных в процессе терминальной стрижки, осевой граф циркуляра c^{n-j} является простой цепочкой, а сам циркуляр c^{n-j} принадлежит модельному множеству проектора Pr_1 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что таким циркуляром является c^{n-1} или цепочка, в которую циркуляр c^{n-1} входит. Покажем, что для $j = 1$ лемма верна. Предположим, что это не так. Тогда циркуляр c^{n-1} имеет минимум три ребра, два из которых должны быть отстрижены на последнем шаге алгоритма стрижки. Но для циркуляра общего положения на каждом шаге может быть отстрижено только одно ребро. Поэтому предположение не верно. \square

В силу леммы 4 можно найти максимальный такой номер $j > 0$, что c^{n-j} является простой цепочкой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 73 (Максимальный стриженный подциркуляр). Максимальный стриженный подциркуляр — циркуляр, полученный в результате алгоритма, описанного в 2.5.2, осевой граф которого представляет собой максимальную простую цепочку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 74 (Оператор проектирования на максимальный стриженный подциркуляр). Назовем оператором проектирования циркуляра $c \in \mathring{\Theta}$ на максимальный стриженный подциркуляр оператор, ставящий в соответствие циркуляру c его максимальный стриженный подциркуляр. Обозначим такой оператор $Pr_2(c)$.

$$Pr_2 : \mathring{\Theta} \rightarrow \mathring{\Theta}; Pr_2(c) = c^{n-j}, j = \max_{i=1, \dots, n} \{i : c^{n-i} \in \tilde{c} - \text{простая цепочка}\} \quad (2.20)$$

Операторы проекции Pr_1 и Pr_2 можно использовать для генерации признаков формы. Для фиксированного циркуляра c проекции $Pr_1(c)$ и $Pr_2(c)$ являются признаками, описывающими циркуляр c .

2.6. Базовый циркуляр с контролируемой точностью

2.6.1. Рекурсивное определение базового циркуляра с контролируемой точностью.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 75. *Базовый циркуляр* с точностью ε для циркуляра общего положения c^* — это максимальный циркуляр $c_B^{(\varepsilon)}$, находящийся между ”соседними” базовыми подциркулярами или совпадающий с одним из базовых подциркуляров, такой, что расстояние Хаусдорфа между ним и циркуляром c^*

в точности равно ε :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \varepsilon^i \leq \varepsilon < \varepsilon^{i+1}; \varepsilon^i, \varepsilon^{i+1} \in \tilde{\varepsilon} \text{ — величина } \varepsilon \text{ находится между точностями} \\
 \text{из монотонной цепочки (2.18);} \\
 c^i \cong c_B^{(\varepsilon)}, c^i \in \tilde{c} \text{ — циркуляр } c^i \text{ из монотонной цепочки (2.17) изоморфен} \\
 \text{базовому циркуляру } c_B^{(\varepsilon)}; \\
 c^i \setminus c_B^{(\varepsilon)} = e_B^i \text{ или } c^i = c_B^{(\varepsilon)} \text{ — разницу между циркуляром } c^i \text{ из монотонной} \\
 \text{цепочки и базовым циркуляром } c_B^{(\varepsilon)} \text{ составляет кусок одного ребра или же} \\
 \text{они совпадают;} \\
 D_H(c^*, c_B^{(\varepsilon)}) = \varepsilon \text{ — расстояние Хаусдорфа между базовым циркуляром } c_B^{(\varepsilon)} \\
 \text{и исходным циркуляром } c^* \text{ в точности равно } \varepsilon; \\
 \forall t \in mg(c_B^{(\varepsilon)}) : C_t \in c^i \Rightarrow C_t \in c_B^{(\varepsilon)} \text{ — все круги с центрами на осевом графе} \\
 mg(c_B^{(\varepsilon)}) \text{ принадлежат базовому циркуляру } c_B^{(\varepsilon)}.
 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Таким образом, базовый подциркуляр с точностью $\varepsilon > 0$ и базовый циркуляр с точностью $\varepsilon > 0$ соотносятся следующим образом:

- (1) они совпадают, если точность $\varepsilon > 0$ находится в монотонном множестве $\tilde{\varepsilon}$ (2.18): $\varepsilon \in \tilde{\varepsilon}$;
- (2) они почти полностью совпадают, если $\varepsilon \notin \tilde{\varepsilon}$, с точностью до одного терминального ребра, которое у последнего укорочено, а так же с точностью до соответствующих ”отстриженных” кругов, центры которых лежат на ”отстриженной” части терминального ребра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 76. *Функция базового циркуляра* с контролируемой точностью $\varepsilon > 0$, которая циркуляру общего положения $c \in \mathring{\Theta}$ ставит в соответствие базовый циркуляр $c_B^{(\varepsilon)}$ с точностью ε :

$$B(c) : R_+ \rightarrow \Theta; B(c, \varepsilon) = c_B^{(\varepsilon)} \quad (2.22)$$

Таким образом, можно рассматривать функцию базового циркуляра $B(c, \varepsilon)$ с контролируемой точностью как параметрическую функцию на множестве монотонных подциркуляров $\Theta^S(c^*)$. Фиксируем циркуляр общего положения и рассмотрим функцию от переменной-параметра $\varepsilon > 0$. Похожая функция рассмотрена в работе К.Жуковой и И.Рейера [11]. Там показано, что базовый скелет фигуры непрерывно зависит от точности аппроксимации $\varepsilon > 0$ в смысле расстояния Хаусдорфа между исходной фигурой и ее силуэтом базового скелета с точностью $\varepsilon > 0$.

Пусть \tilde{c} — базовое подмножество циркуляра c . Рассмотрим соответствующее множество значений точности $\tilde{\varepsilon}$ (2.16).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 77. *Базовое множество циркуляра* c — множество всех базовых циркуляров циркуляра c с точностями из отрезка $[0, \varepsilon^n]$.

$$\tilde{c}^B = \{c_B^{(\varepsilon)} : \varepsilon \in [0, \varepsilon^n]\} \quad (2.23)$$

2.7. Циркулярная функция соответствия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 78 (Циркулярная функция соответствия). Построим функцию соответствия $J_c(c, c')$ проекции и образа таким образом, чтобы она была равна расстоянию между циркуляром-проецируемым образом и циркуляром-проекцией для всех проекций, являющихся подциркулярами проецируемого образа, и бесконечно большой величине для остальных циркуляров:

$$J_c(c, c') = \begin{cases} D_H(c, c'), c' - \text{базовый циркуляр циркуляра } c \\ +\infty, c' - \text{не является базовым подциркуляром циркуляра } c \end{cases} \quad (2.24)$$

Где $D_H(c, c')$ — расстояние Хаусдорфа (1.1) между силуэтами циркуляров c и c' .

ТЕОРЕМА 4. *Функция $J(c, c')$ является функцией соответствия на множестве допустимых проекций $V(c, \Phi)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо показать, что она обладает свойством (2.8). А это следует из того, что $J_c(c, c) \equiv 0$. Поэтому для всех циркуляров из множества допустимых проекций $c' \in V(c, \Phi)$ верно: $0 = J_c(c, c) \leq J_c(c, c')$.

□

2.7.1. Задача поиска циркулярной проекции. Сформулируем задачу поиска циркулярной проекции.

ЗАДАЧА 1. Найти циркуляр, доставляющий минимум циркулярной функции штрафа.

$$\Psi_1(c_1, c'_1) = Pr(c_1, J_c, Q_c) = \arg \min_{(c'_1) \in \Theta} \Phi_c(c_1, c'_1) \quad (2.25)$$

2.7.2. Свойства циркулярной функции соответствия.

ТЕОРЕМА 5. *Функция $J_c(c, c')$ является функцией минимального расстояния.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо доказать, что для любых циркуляров из множества Θ , функция $J(c, c')$ удовлетворяет аксиомам расстояния [5]. В этом несложно убедиться, так как функция определена через расстояние Хаусдорфа. \square

2.7.3. Множество допустимых проекций циркулярной функции штрафа.

ЛЕММА 5. При определении функции соответствия $J_c(c, c')$ через расстояние Хаусдорфа (2.24), множеством допустимых проекций $V(c, \Phi_c)$ функции Φ_c будут только базовые циркуляры циркуляра c .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, для любого циркуляра c^* , не являющегося базовым циркуляром циркуляра c , значение функции соответствия $J_c(c, c^*)$ будет бесконечным, а так как в функцию штрафа Φ_c (2.10) входят только положительные члены, следовательно, и значение $\Phi_c(c, c^*)$ будет бесконечным. Таким образом, никакой циркуляр c^* , не являющийся базовым циркуляром циркуляра c , не может входить во множество допустимых проекций. \square

Таким образом, можно определить вид множества $V(c, \Phi)$. Множество допустимых проекций $V(c, \Phi)$ в силу леммы 5 составляют только базовые циркуляры циркуляра c . Подмножеством допустимых проекций $V(c, \Phi)$ будут все подциркуляры (2.17): $\tilde{c} = \{c^0, \dots, c^n\}$. Это множество упорядочено по вложению, то есть $c \equiv c^0 \supset c^1 \supset c^2 \supset \dots \supset c^n \equiv e^n$. Все базовые циркуляры с точностью промежуточных значений между ϵ^i и ϵ^{i+1} также монотонно упорядочены по вложению: $c^i \supset c^* \supset c^{i+1}$. Таким образом, множество допустимых проекций $V(c, \Phi)$ является монотонным упорядоченным по вложению.

2.7.4. Монотонность функции соответствия. Рассмотрим функцию соответствия $J_c(c, c')$. Фиксируем циркуляр $c \in \mathfrak{C}$ из множества циркуляров общего положения. Тогда функция соответствия $J_c(c, c') : \mathfrak{C} \rightarrow R$ — функция от одной переменной $c' \in V(c, \Phi_c)$.

ЛЕММА 6. Функция соответствия $J_c(c, c')$ является монотонной (не убывающей) на множестве допустимых проекций $V(c, \Phi)$ и строго монотонной (возрастающей) на множестве $c' \in \tilde{c} = \{c^0, \dots, c^n\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим любую пару базовых циркуляров $c^i \subset c^j$. Им соответствуют точности (алгоритм (2.5.2)) $\varepsilon^i > \varepsilon^j$. А значит, функция $J_c(c, c')$ возрастает на множестве $V(c, \Phi)$.

Что касается множества допустимых проекций $V(c, \Phi)$, достаточно показать, что для любой пары циркуляров c^i и c^j между парой c^k и c^{k+1} следует, что $J_c(c, c^i) \geq J_c(c, c^j)$. Но это следует напрямую из определения базового циркуляра (2.21).

□

2.8. Циркулярная функция устойчивости проекции

Определим функцию устойчивости проекции c' , исходя из логических соображений, что "чем ближе c' к устойчивой проекции циркуляра c , тем устойчивее проекция". В качестве устойчивой проекции выберем проекцию на максимальный стриженный подциркуляр $Pr_2(c)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 79 (Функция устойчивости проекции). Циркулярная функция устойчивости — это расстояние Хаусдорфа между проекцией c' и проекцией на максимальный стриженный подциркуляр $Pr_2(c)$ (2.20):

$$Q_c(c') = \begin{cases} D_H(c', Pr_2(c)), c' \text{ — базовый подциркуляр циркуляра } c \\ +\infty, c' \text{ — не является базовым подциркуляром циркуляра } c \end{cases} \quad (2.26)$$

ЛЕММА 7. *Функция устойчивости $Q_c(c')$ монотонна (не возрастает) на множестве (2.17): $c' \in \tilde{c} = \{c^0, \dots, c^n\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо доказать, что для любой пары c^i, c^{i+1} верно, что $Q_c(c^{i+1}) \geq Q_c(c^i)$. Это следует из определения расстояния Хаусдорфа (1.1) и того, что циркуляры рассматриваемой цепочки вложены друг в друга: $c^i \supseteq c^{i+1}$. \square

Таким образом, функции устойчивости и соответствия имеют противоположный смысл. Чем ближе проекция к проекции на максимальный стриженный подциркуляр $Pr_2(c)$, тем она устойчивее, при этом дальше от исходной, поэтому штраф больше. И наоборот.

2.9. Свойства циркулярной функции штрафа

ЛЕММА 8. *Функция штрафа Φ_c (2.13) эквивалентна следующей функции (упрощенная функция штрафа):*

$$\Phi_c(c, c') = J_c(c, c') + \alpha_c Q_c(c') \quad (2.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, в случае неудовлетворения предикату допустимости, функция соответствия также будет обращаться в бесконечно большую величину. Когда же циркуляр c' принадлежит множеству допустимых

проекций, второе слагаемое равно нулю, поэтому оно избыточно при данном определении функции соответствия $Q_c(c')$. \square

ТЕОРЕМА 6. *Функция штрафа Φ_c (2.13) хорошо определена на множестве монотонных циркуляров \tilde{c} .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо показать, что

- (1) для любой пары подциркуляров из цепочки \tilde{c} таких, что $J_c(c, c_1) \leq J_c(c, c_2)$, верно: $Q_c(c_1) \geq Q_c(c_2)$;
- (2) для любой пары подциркуляров из цепочки \tilde{c} таких, что $Q_c(c_3) \geq Q_c(c_4)$, верно: $J_c(c, c_3) \leq J_c(c, c_4)$.

Оба утверждения следуют из того, что функция соответствия не убывает (лемма 6), а функция устойчивости не возрастает (лемма 7) на множестве циркуляров \tilde{c} . \square

ЛЕММА 9. *Решение задачи 1 (минимум функции $\Phi_c(c, c')$) находится в монотонном подмножестве циркуляра \tilde{c} (2.17).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из того, что вне этого подмножества функция устойчивости обращается в бесконечно большую величину $Q_c(c') \rightarrow \infty$. \square

Конструктивный поиск решения задачи 1 во множестве \tilde{c} можно осуществить перебором, так как множество \tilde{c} конечно.

Стоит отметить, что в зависимости от величины α_c — параметра функции штрафа (2.27) — циркуляров, на которых достигается минимум, может быть несколько. Параметр α_c должен определяться для конкретных задач в зависимости от того, что важнее: устойчивость искомой проекции (α_c велико) или соответствие проекции (α_c мало).

2.10. Выводы главы

- Задача определения качества скелетной сегментации требует с одной стороны устойчивости сегментации, а с другой — соответствия исходному объекту. Аппарат математической морфологии подходит для согласования этих противоречивых требований.
 - Основные определения, необходимые для использования аппарата математической морфологии на множестве циркуляров:
 - оператор проектирования максимальной длины $Pr_1(c)$;
 - проекция на максимальный стриженный подциркуляр $Pr_2(c)$;
 - модельное множество оператора проектирования максимальной длины;
 - функция соответствия проекции образу;
 - функция устойчивости проекции;
 - стандартная циркулярная функция штрафа.
 - упрощенная циркулярная функция штрафа.
 - Важными свойствами введенных функций являются:
 - Циркулярная функция соответствия является функцией минимального расстояния.
 - Множество допустимых проекций функции штрафа составляют только подциркуляры проецируемого образа.
 - Функция штрафа хорошо определена.
- Циркуляр общего положения — циркуляр, монотонная терминальная стрижка которого отстригает на каждой итерации ровно по одному его ребру.

- Задача поиска наилучшей сегментации поставлена как задача оптимизации. Важным свойством является то, что функция устойчивости проекции имеет противоположный смысл критерию соответствия. Данное свойство позволяет доказать, что минимум циркулярной функции штрафа существует.
- Параметр α_c функции штрафа определяет степень важности устойчивости или соответствия искомого оптимального циркуляра. Он должен задаваться исходя из прикладной задачи, в которой необходимо искать оптимальный циркуляр.
- Оптимальный циркуляр может быть найден конструктивно — выбран из множества вложенных монотонных подциркуляров.

Скелетная сегментация и циркулярная морфология пары многоугольников

3.1. Наилучшая скелетная сегментация пар фигур

Цель данной главы заключается в разработке эффективного метода сегментации скелета и фигуры, который может быть полезен для работы с парами фигур. Например, когда объект движется, нужен инструмент для работы с парой соседних фаз. А в задачах распознавания необходимо сравнивать пары объектов из определенных множеств. Если у двух изображений скелеты изоморфны, то можно сопоставлять и сравнивать соответствующие друг другу в изоморфизме элементы. Тем самым через изоморфизм можно выйти на количественную задачу сравнения формы. При этом необходимо, чтобы эти изоморфные скелеты как можно лучше отражали исходную структуру фигур и были устойчивы к небольшим изменениям фигур.

Скелетная декомпозиция фигуры связана с сегментацией скелета следующим образом: каждой компоненте скелетного разбиения однозначно ставится в соответствие компонента декомпозиции фигуры. Поэтому с выбором наилучшей пары скелетных графов для заданной пары фигур однозначно связан выбор и наилучшей скелетной декомпозиции пары фигур. Необходимо формализовать понятие "наилучший скелетный граф" и "наилучшая пара скелетных графов". Причем использовать не только свойства скелетных графов, но и свойства фигур. Наиболее удобный инструмент для этого — циркулярное представление (срединный циркуляр фигуры).

Для пары плоских циркуляров предлагается концепция морфологического проектора с априорным условием изоморфизма (схема решения на рис. 3.1). Определяется монотонное множество циркуляров для каждого плоского циркуляра. Нахождение проекций морфологического проектора предлагается через функцию, являющуюся обратной функции соответствия на множестве монотонных вложенных циркуляров.

При помощи морфологического инструмента можно работать с парами циркулярных представлений и находить наилучшие *проекции* в виде циркуляров, которые можно использовать как наилучшие *аппроксимации* пары фигур.

3.2. Морфологический проектор с априорным условием изоморфизма для пар циркуляров

Рассмотрим множество пар циркуляров Θ^2 . Для произвольной пары из Θ^2 будем строить морфологический проектор [6] с априорным условием изоморфизма.

Рассмотрим пару циркуляров $c_1 \in \Theta, c_2 \in \Theta$ из множества $(c_1, c_2) \in \Theta^2$.

Для данной пары построим циркулярные функции штрафа $\Phi_c : \Theta \times \Theta \rightarrow R$ на множестве $\dot{\Theta}$ всех циркуляров уникальной проекции $\Phi_c(c_1, c'_1)$ и $\Phi_c(c_2, c'_2)$ соответственно в следующем виде:

$$\Phi_c(c_1, c'_1) = J_c(c_1, c'_1) + \alpha_1 Q_c(c'_1); \Phi_c(c_2, c'_2) = J_c(c_2, c'_2) + \alpha_2 Q_c(c'_2) \quad (3.28)$$

Поиск оптимального решения задачи минимизации данных функций штрафа связан с определением наилучших значений α_1 и α_2 , которые определяют выбор в сторону лучшего соответствия данным (малые значения α_1 и α_2) или же выбора более устойчивой проекции (большие значения параметров α_1 и α_2).

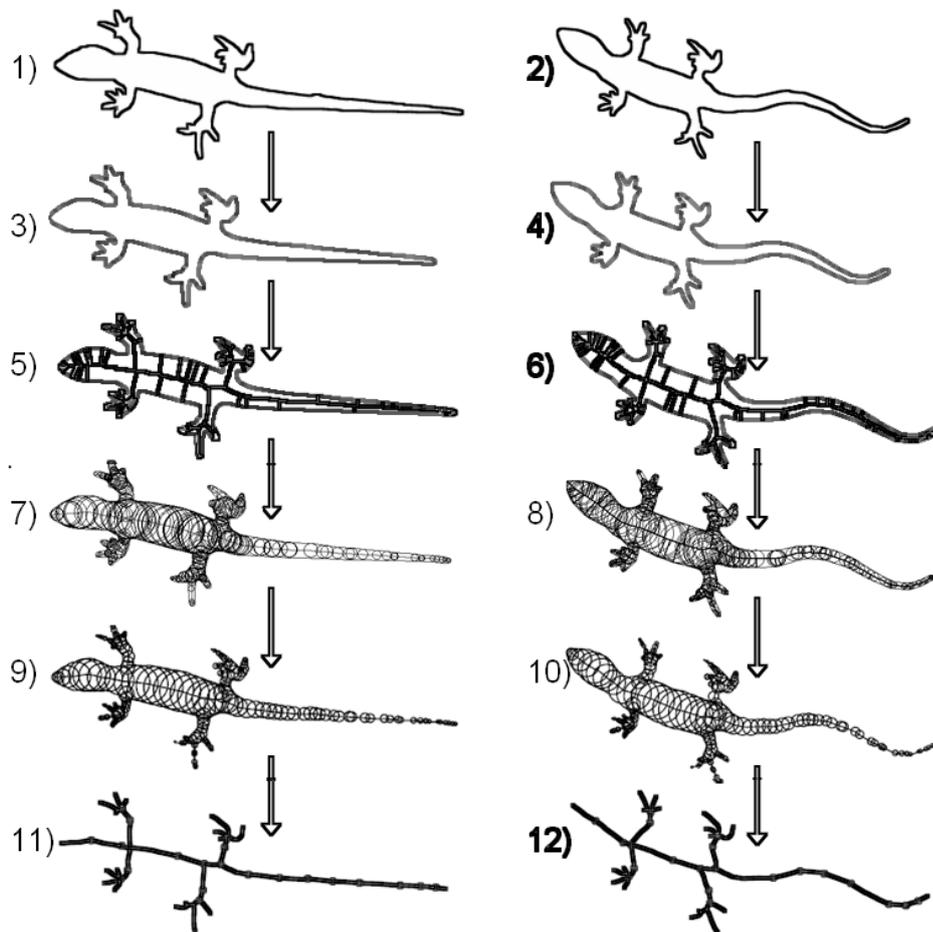


Рис. 3.1. Задача определения пары наилучших изоморфных скелетных графов: схема решения. 1-2: пара (дискретных) фигур; 3-4: пара аппроксимирующих многоугольников минимального периметра; 5-6: непрерывные скелеты фигур; 7-8: циркулярные представления на основе осевого графа—скелета (срединные циркуляры); 9-10: изоморфные циркулярные представления; 11-12: изоморфные осевые графы (наилучшая сегментация скелета)

3.2.1. Априорная информация об изоморфизме. Для задачи сравнения формы фигур, заданных циркулярным представлением, удобно рассматривать изоморфные циркулярные представления. Для двух изоморфных циркуляров можно строить отображения соответствующих друг другу в изоморфизме ветвей, сравнивать их "по частям". Определим следующее требование на пару проекций c'_1 и c'_2 : они должны быть изоморфны. Так как это предположение

выдвигается до решения задачи, будем считать его *априорным* условием (или информацией) об изоморфизме циркуляров-проекций для определения морфологического проектора для пары циркуляров.

Предлагается вместо выбора параметра α в определении функций штрафа (3.28) использовать априорную информацию об изоморфизме искомых проекций c'_1 и c'_2 .

3.2.2. Функция устойчивости на основе априорной информации об изоморфизме. Предлагается задать априорное условие об изоморфизме при помощи зависимой функции устойчивости проекций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 80 (Зависимая функция устойчивости на основе априорной информации об изоморфизме). Зависимая функция устойчивости на основе априорной информации об изоморфизме тождественно равна нулю на множестве пар изоморфных циркуляров и равна бесконечно большой величине на остальных парах:

$$Q_2(c'_1, c'_2) = \begin{cases} 0, mg(c'_1) \cong mg(c'_2) \\ +\infty, mg(c'_1) \not\cong mg(c'_2) \end{cases} \quad (3.29)$$

По сути функция устойчивости для пары циркуляров определена как индикатор их изоморфизма.

3.2.3. Функция соответствия для пары циркуляров. Определим функцию соответствия для пары циркуляров на основе функции соответствия для одного циркуляра.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 81 (Функция соответствия для пары циркуляров). Функция соответствия для пары циркуляров c_1 и c_2 имеет вид:

$$J_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2) = \max\{J_c(c_1, c'_1), J_c(c_2, c'_2)\} \quad (3.30)$$

Итак, будем считать, что для пары циркуляров функция соответствия — это максимум функций соответствия для одного циркуляра.

3.2.4. Функция штрафа для пары циркуляров. Определим функцию штрафа для пары циркуляров на основе функций соответствия и устойчивости для пары циркуляров.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 82 (Функция штрафа для пары циркуляров). Функция штрафа для пары циркуляров c_1 и c_2 имеет вид:

$$\Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2) = J_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2) + Q_2(c'_1, c'_2) \quad (3.31)$$

Итак, функция штрафа для пары циркуляров представляет собой сумму противоположных по смыслу функций соответствия и устойчивости для пары циркуляров.

3.2.5. Морфологический проектор с априорным условием изоморфизма. Так как функция штрафа для пары циркуляров представляет собой сумму двух неотрицательных противоположных по смыслу функций, для фиксированной пары циркуляров можно ставить задачу минимизации функции штрафа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 83 (Морфологический проектор с априорным условием изоморфизма). Морфологический проектор с априорным условием изоморфизма выглядит следующим образом:

$$\Psi_2(c_1, c_2, c'_1, c'_2) = Pr(c_1, c_2, J_2, Q_2) = arg \min_{(c'_1, c'_2) \in \Theta^2} \Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2) \quad (3.32)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 84 (Проекция пары циркуляров). Проекцией пары циркуляров (c_1, c_2) назовем пару (c'_1, c'_2) , доставляющую минимум функции штрафа $\Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$.

3.2.6. Задача поиска проекции с априорным условием изоморфизма.

Переформулируем основную задачу данного исследования как задачу минимизации.

Задача 2. Построить морфологический проектор (3.32) с априорным условием изоморфизма $\Psi_2(c_1, c_2, c'_1, c'_2)$ на множестве Θ^2 .

Иными словами для любой пары циркуляров из множества $(c_1, c_2) \in \Theta^2$ нужно найти проекцию (c'_1, c'_2) морфологического проектора с априорным условием изоморфизма (3.32).

3.3. Свойства функций, введенных на парах циркуляров

Рассмотрим подробно следующие функции и опишем их свойства:

- функция штрафа для пар циркуляров;
- функция устойчивости для пар циркуляров;
- функция соответствия для пар циркуляров.

3.3.1. Описание множества допустимых проекций для пар циркуляров.

ТЕОРЕМА 7. Множество допустимых проекций (3.31) $\Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$ — это множество всех изоморфных базовых циркуляров c_1 и c_2 : $V(c_1, c_2, \Phi_2) = \tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что

$$V(c_1, c_2, \Phi_2) = \{(c'_1, c'_2) : c'_1 \in \Theta^B(c_1), c'_2 \in \Theta^B(c_2) : c'_1 \cong c'_2\} \equiv \tilde{\Theta}^B(c_1, c_2) \quad (3.33)$$

(1) По определению множества допустимых проекций критерия

$$V(c_1, c_2, \Phi_2) = \{(c_1, c_2) \in \Theta^2 : \Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2) < +\infty\}$$

(2) Обозначим

$$\tilde{\Theta}^B(c_1, c_2) = \{(c'_1, c'_2) : c'_1 \in \Theta^B(c_1), c'_2 \in \Theta^B(c_2) : mg(c'_1) \cong mg(c'_2)\}.$$

Для любой пары циркуляров из такого множества $\forall (c'_1, c'_2) \in \tilde{\Theta}(c_1, c_2)$ следует равенство нулю функции штрафа $\Rightarrow Q_2(c'_1, c'_2) = 0$. А функция соответствия $J_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$ принимает конечное значение для любой такой пары. Значит, функция $\Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$ тоже принимает конечные значения на том же множестве, так как является суммой функций штрафа и соответствия. Значит, множество $\tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$ входит в множество допустимых проекций функции $\Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$: $\tilde{\Theta}^B(c_1, c_2) \subseteq V(c_1, c_2, \Phi_2)$.

(3) Покажем, что любая пара циркуляров, не принадлежащая $\tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$, также не будет принадлежать множеству допустимых проекций, то есть для любой пары циркуляров, не принадлежащих подмножеству изоморфных базовых циркуляров $\forall (c'_1, c'_2) \notin \tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$ следует, что значение функции штрафа на ней бесконечно велико: $\Rightarrow Q_2(c'_1, c'_2) = +\infty$. Предположим, что такая пара существует: (c'_1, c'_2) . В таком случае должно быть выполнено хотя одно из трех утверждений $\forall (c'_1, c'_2) \notin \tilde{\Theta}^B(c_1, c_2) \Leftrightarrow$:

$c'_1 \not\subseteq c_1$: первый циркуляр c'_1 не является базовым циркуляром c_1 ;

$c'_2 \not\subseteq c_2$: второй циркуляр c'_2 не является базовым циркуляром c_2 ;

$c'_1 \not\cong c'_2$: циркуляры c'_1 и c'_2 не изоморфны.

Но для первого и второго функция соответствия сразу обращается в положительную бесконечно большую величину, а для третьего в нее обращается функция штрафа. Так как все слагаемые положительные, то и функция в таком случае будет бесконечной. Поэтому такая пара не

$$\begin{array}{ccccccccc}
F_1 & \xrightarrow{a} & c^{ma}(F_1) & \xrightarrow{b} & c_1^* & \xrightarrow{c} & \tilde{c}_1 & \xrightarrow{d} & Pr(c_1) \\
\cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\
\mathfrak{S} & \longrightarrow & \Theta^2 & \xrightarrow{\cong} & \Theta^S(c_1, c_2) & \xrightarrow{\cong} & \tilde{\Theta}^S(c_1, c_2) & \xrightarrow{\cong} & \Theta(Pr(c_1), Pr(c_2)) \\
\cong \uparrow & & \cong \uparrow & & \cong \uparrow & & \cong \uparrow & & \cong \uparrow \\
F_2 & \xrightarrow{a} & c^{ma}(F_2) & \xrightarrow{b} & c_2^* & \xrightarrow{c} & \tilde{c}_2 & \xrightarrow{d} & Pr(c_2)
\end{array}$$

Рис. 3.2. Схема преобразования фигур к циркулярному представлению, а затем к проекциям. а- фигурам соответствуют срединные циркуляры; б- промежуточные вложенные подциркуляры; с- вложенные изоморфные подциркуляры; д- проекции подциркуляров; Средний ряд показывает вложенные друг в друга подмножества пар циркуляров.

может принадлежать множеству допустимых проекций. Значит, предположение о том, что существует пара не из множества $\tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$, привело к противоречию. Утверждение доказано.

□

3.3.2. Ограниченность множества допустимых проекций. Покажем, что множество допустимых проекций $V(c_1, c_2, \Phi_2) = \tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$ функции (3.33) обладает следующим свойством: ограниченность в метрическом пространстве $\tilde{\Theta}^2$ с расстоянием $\mu_H((c_1, c_2), (c'_1, c'_2)) = \max\{D_H(c_1, c_2), D_H(c'_1, c'_2)\}$.

ТЕОРЕМА 8. *Множество $V(c_1, c_2, \Phi_2) = \tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$ ограничено в метрическом пространстве $\tilde{\Theta}^2$ с расстоянием $\mu_H((c_1, c_2), (c'_1, c'_2)) = \max\{D_H(c_1, c'_1), D_H(c_2, c'_2)\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограниченность по определению означает, что существует фиксированное число $M > 0$ и пара циркуляров $(c_1^*, c_2^*) \in \tilde{\Theta}^2$ таких, что для любой пары $(c'_1, c'_2) \in \tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$ следует $\mu_H((c_1^*, c_2^*), (c'_1, c'_2)) \leq M$.

Выберем значением числа M_1 — максимальный из диаметров циркуляров c_1 и c_2 .

$$M_1 = \max \left\{ \max_{\substack{x \in c_1 \\ y \in c_1}} \rho(x, y), \max_{\substack{x \in c_2 \\ y \in c_2}} \rho(x, y) \right\}$$

Где ρ — евклидово расстояние между двумя точками.

Выберем $(c_1^*, c_2^*) = (x^* \in c_1, y^* \in c_2)$ — пара точек внутри циркуляров c_1 и c_2 . Эта пара точек — также и пара вырожденных циркуляров, изоморфных друг другу. Поэтому $(x^*, y^*) \in \tilde{\Theta}^2$.

Для любой пары циркуляров (c'_1, c'_2) из множества $V(c_1, c_2, \Phi_2) = \tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$, являющегося подмножеством $\tilde{\Theta}^2$, верно, что $\mu_H((x^*, y^*), (c'_1, c'_2)) = \max\{D_H(x^*, c'_1), D_H(y^*, c'_2)\} \leq \leq \max\{D_H(x^*, c_1), D_H(y^*, c_2)\} \leq M_1$. Утверждение доказано. \square

3.3.3. Непрерывность функции соответствия на множестве допустимых проекций.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 85 (Расстояние между парами циркуляров из множества монотонных базовых циркуляров). Расстоянием между двумя парами циркуляров из множества пар изоморфных базовых циркуляров пары циркуляров (c_1, c_2) на плоскости $\tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$ назовем следующую величину: $\mu_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c''_1, c''_2)) =$

$$|\max\{D_H(c_1, c'_1), D_H(c_2, c'_2)\} - \max\{D_H(c_1, c''_1), D_H(c_2, c''_2)\}| \quad (3.34)$$

ТЕОРЕМА 9. Функция $J_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$ соответствия (3.30) непрерывна по переменным (c'_1, c'_2) на множестве допустимых проекций функции $\Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$: $(c'_1, c'_2) \in V(c_1, c_2, \Phi_2) = \tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$ (3.33) с расстоянием $\mu_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c''_1, c''_2))$ 3.34.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность функции в метрическом пространстве по определению: для любого $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, $\forall (c'_1, c'_2) \in V(c_1, c_2, \Phi_2): \forall (c''_1, c''_2) \in V(c_1, c_2, \Phi_2) : \mu_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c''_1, c''_2)) < \delta \Rightarrow |J_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2) - J_2(c_1, c''_1, c_2, c''_2)| < \varepsilon$.

Функция соответствия для пары циркуляров по определению есть максимум из функций соответствия для одного циркуляра. На множестве $V(c_1, c_2, \Phi_2)$ верна следующая цепочка:

$$J_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2) = \max\{J_c(c_1, c'_1), J_c(c_2, c'_2)\} \equiv \max\{D_H(c_1, c'_1), D_H(c_2, c'_2)\} \quad (3.35)$$

Тогда для модуля разности функций соответствия верно:

$$|J_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2) - J_2(c_1, c''_1, c_2, c''_2)| = \mu_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c''_1, c''_2)) \quad (3.36)$$

Выберем для любого $\varepsilon > 0 \delta \equiv \varepsilon$. Тогда для фиксированной любой пары $\forall (c'_1, c'_2) \in V(c_1, c_2, \Phi_2)$ и для любой пары $\forall (c''_1, c''_2) \in V(c_1, c_2, \Phi_2)$ такой, что $\mu_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c''_1, c''_2)) < \delta \Rightarrow^{(3.36)} |J_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2) - J_2(c_1, c''_1, c_2, c''_2)| < \delta \Rightarrow^{\delta \equiv \varepsilon} |J_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2) - J_2(c_1, c''_1, c_2, c''_2)| < \varepsilon$. Непрерывность доказана.

□

3.3.4. Непрерывность функции устойчивости на множестве допустимых проекций.

ЛЕММА 10. Зависимая функция устойчивости на основе априорной информации об изоморфизме $\mathcal{Q}_2(c'_1, c'_2)$ непрерывна на множестве допустимых проекций функции $\Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$ (3.33).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. На множестве допустимых проекций функции $\Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$ (3.33) осевые графы циркуляров c'_1 и c'_2 изоморфны, поэтому функция устойчивости тождественно равна нулю, то есть непрерывна. \square

3.3.5. Непрерывность функции штрафа на множестве допустимых проекций.

ТЕОРЕМА 10. *Функция штрафа для пары циркуляров $\Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$ (3.31) непрерывна на множестве допустимых проекций (3.33).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это утверждение следует из непрерывности суммы двух непрерывных функций $J_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$ и $Q_2(c'_1, c'_2)$ от переменных (c'_1, c'_2) на множестве допустимых проекций (3.33). \square

3.3.6. Замкнутость множества монотонных изоморфных подциркуляров. Расширим метрику на множестве изоморфных базовых пар циркуляров 3.34 на все множество $\tilde{\Theta}^2$ следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 86 (Расстояние между парами циркуляров из множества всех изоморфных циркуляров). Расстоянием между двумя парами циркуляров из множества всех изоморфных циркуляров $\tilde{\Theta}^2$ назовем следующую величину:

$$\bar{\mu}_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c''_1, c''_2)) =$$

$$= \begin{cases} |\max\{D_H(c_1, c'_1), D_H(c_2, c'_2)\} - \max\{D_H(c_1, c''_1), D_H(c_2, c''_2)\}|, \\ \text{при } (c'_1, c'_2) \in \tilde{\Theta}^B(c_1, c_2), (c''_1, c''_2) \in \tilde{\Theta}^B(c_1, c_2) \\ M, \text{ иначе} \end{cases} \quad (3.37)$$

Где $M > 0$ — фиксированная положительная величина, равная максимуму по всем циркулярным расстояниям из множества $\Theta^B(c_1, c_2)$:

$$M = \max_{(c'_1, c'_2) \in \Theta^S(c_1, c_2); (c''_1, c''_2) \in \Theta^B(c_1, c_2)} \mu_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c''_1, c''_2)) \quad (3.38)$$

Таким образом, расширенная метрика 3.37 совпадает с метрикой 3.34 на множестве монотонных подциркуляров и равна фиксированной величине вне его.

ЛЕММА 11. *Расстояние между двумя парами циркуляров из множества всех изоморфных циркуляров 3.37 удовлетворяет аксиоме метрики: "неравенство треугольника".*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим три пары циркуляров: $(c'_1, c'_2), (c''_1, c''_2), (c'''_1, c'''_2)$ и четыре случая их принадлежности множеству монотонных подциркуляров:

- (1) Все пары принадлежат множеству пар изоморфных базовых циркуляров пары циркуляров (c_1, c_2) на плоскости $\Theta^B(c_1, c_2)$.

Тогда величина $\bar{\mu}_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c''_1, c''_2)) = \mu_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c''_1, c''_2))$, для которой неравенство треугольника выполнено.

- (2) Одна из пар не принадлежат множеству пар изоморфных базовых циркуляров пары циркуляров (c_1, c_2) на плоскости $\Theta^B(c_1, c_2)$. Например, $(c'_1, c'_2) \notin \Theta^B(c_1, c_2)$.

$$(a) \bar{\mu}_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c''_1, c''_2)) + \bar{\mu}_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c'''_1, c'''_2)) = \\ = x + M \geq M = \bar{\mu}_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c''_1, c''_2))$$

$$(b) \bar{\mu}_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c'''_1, c'''_2)) + \bar{\mu}_H^{c_1, c_2}((c''_1, c''_2), (c'''_1, c'''_2)) = \\ = M + M \geq \bar{\mu}_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c''_1, c''_2)), \text{ так как } M \text{ определено как макси-} \\ \text{мальное из всех расстояний 3.38.}$$

(3) Две пары не принадлежат подмножеству монотонных подциркуляров $\Theta^B(c_1, c_2)$.

В этом случае

$$\begin{aligned} & \bar{\mu}_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c''_1, c''_2)) + \bar{\mu}_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c'''_1, c'''_2)) = \\ & = M + M \geq M = \bar{\mu}_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c''_1, c''_2)) \end{aligned}$$

(4) Все пары не принадлежат подмножеству монотонных подциркуляров $\Theta^B(c_1, c_2)$.

В этом случае

$$\begin{aligned} & \bar{\mu}_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c''_1, c''_2)) + \bar{\mu}_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c'''_1, c'''_2)) = \\ & = M + M \geq M = \bar{\mu}_H^{c_1, c_2}((c'_1, c'_2), (c''_1, c''_2)) \end{aligned}$$

□

ЛЕММА 12. Множество монотонных изоморфных подциркуляров пары циркуляров (c_1, c_2) на плоскости $\tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$ замкнуто относительно $\tilde{\Theta}^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит в себе все свои предельные точки. Предположим, что множество $\tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$ незамкнуто. Тогда существует предельная точка множества $\tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$, ему не принадлежащая:

$$\begin{cases} (c'_1, c'_2) \in \tilde{\Theta}^2 \\ (c'_1, c'_2) \notin \tilde{\Theta}^B(c_1, c_2) \end{cases} \quad (3.39)$$

Тогда по определению предельной точки для любой ее окрестности $\cup_{\delta}(c'_1, c'_2)$ существует точка, не совпадающая с ней, принадлежащая множеству $\tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$:

$$\begin{cases} (c_1'', c_2'') \in \cup_{\delta}(c_1', c_2') \\ (c_1'', c_2'') \in \tilde{\Theta}^B(c_1, c_2) \end{cases} \quad (3.40)$$

Выберем $\delta = M/2$. Тогда $\bar{\mu}_H^{c_1, c_2}((c_1', c_2'), (c_1'', c_2'')) = M > M/2 = \delta$.

При этом принадлежность дельта-окрестности означает следующее:
 $\bar{\mu}_H^{c_1, c_2}((c_1', c_2'), (c_1'', c_2'')) < \delta$.

Получаем противоречие.

□

3.4. Существование проектора с априорным условием изоморфизма

ТЕОРЕМА 11. *Для каждой пары циркуляров существует проекция функции $\Phi_2(c_1, c_1', c_2, c_2')$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Естественным образом множество поиска проекции функции $\Phi_2(c_1, c_1', c_2, c_2')$ сужается до множества допустимых проекций (3.33), то есть до множества $\tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$.

Множество $\tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$ не пусто. Рассмотрим циркуляры, полученные как проекции на максимальные подциркуляры: $c_1^* = Pr_2(c_1)$ и $c_2^* = Pr_2(c_2)$. Они изоморфны, так как их осевые графы — простые цепочки: $mg(c_1^*) \cong mg(c_2^*)$. Они также удовлетворяют множеству допустимых проекций, так как являются подциркулярами циркуляров c_1 и c_2 . Таким образом, мы показали, что множество $\tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$ содержит хотя бы одну пару.

В силу леммы 12 подмножество $\tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$ замкнуто относительно $\tilde{\Theta}^2$. Тогда функция Φ_2 непрерывна (теорема 10) на замкнутом ограниченном (лемма 8) множестве $\tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$. Значит, по теореме Вейерштрасса достигает на этом множестве своего минимального значения.

Таким образом, проекция функции $\Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$ существует и достижима на множестве изоморфных монотонных подциркуляров (множество допустимых проекций функции $\Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$): $\tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$. \square

3.5. Единственность решения задачи поиска оптимальной проекции на множестве циркуляров общего положения

Для того, чтобы искомое решение было единственным, нужно добавить предположение об уникальности терминальной стрижки. В данном предположении и докажем, что решение задачи поиска проекции (3.32) единственно и локализовано в построенных цепочках.

Пусть заданы два циркуляра общего положения $c_1 \in \ddot{\Theta}$ и $c_2 \in \ddot{\Theta}$.

Применим алгоритм построения монотонных цепочек подциркуляров на основе стрижки (2.5.2) к циркулярам c_1 и c_2 , но вместо ребер в алгоритме (2.5.2) будем стричь целые ветви.

Обозначим полученные цепочки монотонных подциркуляров для циркуляров c_1 и c_2 :

$$\tilde{c}_1 = \{c_1^0, \dots, c_1^n\}, \tilde{c}_2 = \{c_2^0, \dots, c_2^m\} \quad (3.41)$$

Обозначим упорядоченные соответствующие множества значений точности их стрижки:

$$\tilde{\epsilon}_1 = \{\epsilon_1^0, \dots, \epsilon_1^n\}, \tilde{\epsilon}_2 = \{\epsilon_2^0, \dots, \epsilon_2^m\}. \quad (3.42)$$

Отметим, что решение задачи поиска проекции в общем случае для произвольных циркуляров, а не циркуляров общего положения, лежит за рамками данной работы. Есть предположение о том, что в общем случае придется построить вместо цепочек со стрижкой — 2 многоуровневых дерева, вершины

каждого уровня имеют метки $\tilde{\epsilon}_1 = \{\epsilon_1^0, \dots, \epsilon_1^n\}$ и $\tilde{\epsilon}_2 = \{\epsilon_2^0, \dots, \epsilon_2^m\}$ соответственно. Так поиск оптимальной пары будет выполнен лишь за полиномиальное время и решение будет не единственным. Общий случай представляет лишь теоретический смысл и может быть рассмотрен в качестве продолжения развития работы.

Множество циркуляров общего положения достаточно богато. И хотя его можно определить только по построению (то есть без построения цепочки вложенных циркуляров нельзя определить, общего ли положения данный циркуляр или нет) на практике можно рассматривать множество всех циркуляров. В случае когда попадаетея несколько ветвей, стрижка которых одинаково влияет на фигуру в смысле расстояния Хаусдорфа, одной из ветвей (произвольной) можно добавить фиктивное значение ϵ^* и считать данный циркуляр циркуляром общего положения.

Введем следующие обозначения:

$\dot{\Theta}^2 = \{(c_1, c_2) : c_1 \in \Theta, c_2 \in \Theta\}$ — множество всех пар циркуляров общего положения на плоскости;

3.5.1. Задача поиска проекции на множестве циркуляров общего положения. Переформулируем задачу (3.32) на множестве циркуляров общего положения.

Задача 3. Для любой пары циркуляров общего положения $(c_1, c_2) \in \dot{\Theta}$ найти проекцию $(c'_1, c'_2) = Pr(c_1, c_2, J_2, Q_2)$.

3.5.2. Теорема о локализации одного решения задачи поиска проекции. Построенные множества являются подмножествами цепочек монотонных подциркуляров для циркуляров c_1 и c_2 : $\tilde{c}_1 \subseteq \Theta^S(c_1)$ и $\tilde{c}_2 \subseteq \Theta^S(c_2)$. При этом эти

подмножества содержат далеко не все базовые циркуляры c_1 и c_2 . Тем не менее, покажем, что в условии (2.19) одно из решений задачи 3 лежит в построенных множествах, т.е. $\tilde{c}_1 \subseteq \Theta^S(c_1)$ и $\tilde{c}_2 \subseteq \Theta^S(c_2)$.

ТЕОРЕМА 12. *В условиях (2.19) одно из решений задачи поиска проекции для пары циркуляров общего положения (задача 3) лежит в упорядоченных множествах \tilde{c}_1 и \tilde{c}_2 , то есть $\exists(c_1^*, c_2^*) \in \Psi_2(c_1, c_2, c'_1, c'_2) : c_1^* \in \tilde{c}_1, c_2^* \in \tilde{c}_2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть в множествах \tilde{c}_1 и \tilde{c}_2 выбрана пара изоморфных подциркуляров $c_1^i \in \tilde{c}_1, c_2^j \in \tilde{c}_2 : c_1^i \cong c_2^j$ такая, что

$$\varepsilon^{ij} = \max\{\varepsilon_1^i, \varepsilon_2^j\} \rightarrow \min_{\varepsilon_1^i \in \tilde{\varepsilon}_1; \varepsilon_2^j \in \tilde{\varepsilon}_2}$$

Замечание: этот выбор можно сделать за линейное время, так как множества \tilde{c}_1 и \tilde{c}_2 упорядочены.

Предположим, что пара (c_1^i, c_2^j) не оптимальная для функции $\Phi_2(c_1, c'_1, c_2, c'_2)$ на множестве допустимых проекций $\tilde{\Theta}^B(c_1, c_2)$. То есть, предположим, что $(c_1^i, c_2^j) \notin \Psi_2(c_1, c_2, c'_1, c'_2)$. Тогда существуют $\exists \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0 : \varepsilon^* = \max\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} < \varepsilon^{ij} : B(c_1, \varepsilon_1) \cong B(c_2, \varepsilon_2)$ и $\varepsilon^* < \varepsilon^{ij}$. Покажем, что данное предположение приводит к противоречию.

- (1) $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \notin (\tilde{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_2)$, иначе пара ε_1^i и ε_2^j не была бы "минимальной", то есть существовали бы другие $\varepsilon_1^q \in \tilde{\varepsilon}_1$ и $\varepsilon_2^r \in \tilde{\varepsilon}_2 : \max\{\varepsilon_1^q, \varepsilon_2^r\} < \max\{\varepsilon_1^i, \varepsilon_2^j\}$;
- (2) $\varepsilon_1 < \varepsilon_1^i, \varepsilon_2 < \varepsilon_2^j$, иначе $\varepsilon^{ij} < \varepsilon^*$, что противоречит предположению;
- (3) Существуют такие номера:

$$t \in 1, \dots, n; k \in 1, \dots, m: \varepsilon_1^{t-1} < \varepsilon_1 < \varepsilon_1^t \text{ и } \varepsilon_2^{k-1} < \varepsilon_2 < \varepsilon_2^k$$

- (4) Сделаем стрижку первого циркуляра с точностями $\varepsilon_1^{t-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_1^t$:

$$c_1^{t-1} \equiv B(c_1, \varepsilon_1^{t-1}) \subseteq B(c_1, \varepsilon_1) \subseteq B(c_1, \varepsilon_1^t) \equiv c_1^t$$

Но $c_1^{t-1} \subset c_1^t$, причем отличие этих осевых графов лишь в одном или

нескольких ребрах $\{e_1^{t-1}\} = c_1^{t-1} \setminus c_1^t$. Причем стрижка циркуляра на величину меньшую, чем ε_1^t не отсечет ни одного ребра из $\{e_1^{t-1}\}$ целиком. Таким образом, стрижка циркуляра на величину большую, чем ε_1^{t-1} , но меньшую, чем ε_1^t и стрижка на величину ε_1^{t-1} даст изоморфные циркуляры, то есть $B(c_1, \varepsilon_1) \cong B(c_1, \varepsilon_1^{t-1}) = c_1^{t-1}$.

(5) Аналогично для второго циркуляра:

$$c_2^{k-1} \equiv B(c_2, \varepsilon_2^{k-1}) \subseteq B(c_2, \varepsilon_2) \subseteq B(c_2, \varepsilon_1^k) \equiv c_2^k$$

...

$$B(c_2, \varepsilon_2) \cong B(c_2, \varepsilon_2^{k-1}) = c_2^{k-1}.$$

(6) При этом по предположению $B(c_2, \varepsilon_2) \cong B(c_1, \varepsilon_1)$. Следовательно (из пунктов 4 и 5 следует $\Rightarrow c_1^{t-1} \cong c_2^{k-1}$, то есть пара циркуляров с меньшей точностью стрижки изоморфна. Что противоречит пункту 1, вытекающему из предположение. Получаем противоречие.

Таким образом, предположение не верно. И $(c_1^i, c_2^j) = (c_1^*, c_2^*) \in \Psi_2(c_1, c_2, c_1', c_2')$.

□

Таким образом, поиск одной из проекций может быть выполнен с помощью упорядоченных множеств $\tilde{c}_1, \tilde{\varepsilon}_1, \tilde{c}_2, \tilde{\varepsilon}_2$.

3.5.3. Теорема о единственности решения задачи поиска проекции на множестве циркуляров общего положения.

ТЕОРЕМА 13. *Для пары циркуляров общего положения $c_1, c_2 \in \Theta$ решение задачи поиска проекции для пары циркуляров c_1^*, c_2^* единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Данное утверждение напрямую следует из доказательства теоремы 12 и условия (2.19). □

3.6. Решение задачи поиска проекции функции с априорным условием изоморфизма

Итак, доказано, что для пары циркуляров общего положения $c_1, c_2 \in \mathfrak{C}$ единственное решение задачи 3 существует и лежит в упорядоченных множествах \tilde{c}_1 и \tilde{c}_2 (3.41). Необходимо его найти.

Опишем процесс нахождения проекции морфологического проектора с априорным условием изоморфизма.

3.6.1. Общая схема решения задачи.

- Построим множество цепочек монотонных подциркуляров.
- Найдем решение задачи 3 в построенных цепочках.

3.6.2. Алгоритм проверки изоморфизма циркуляров. Для решения поставленной задачи необходимо эффективно проверять, изоморфны ли два заданных циркуляра, то есть их скелеты. Неизвестно принадлежит ли задача проверки изоморфизма графов классам NP или P , является ли она NP -полной [58]. Поэтому если для проверки изоморфизма скелетов проверять изоморфизм их как графов, то этот алгоритм едва ли можно будет назвать эффективным. Но в определении изоморфизма скелетов есть дополнительное условие, связанное с сохранением ориентации обхода вершин, и необходимо воспользоваться этим условием для разработки алгоритма быстрой проверки изоморфизма скелетов.

Предлагается следующая процедура проверки изоморфизма циркуляров:

- (1) Если число терминальных узлов у скелетов различно, то циркуляры не изоморфны.
- (2) Если число вершин у скелетов различно, то циркуляры также не изоморфны.

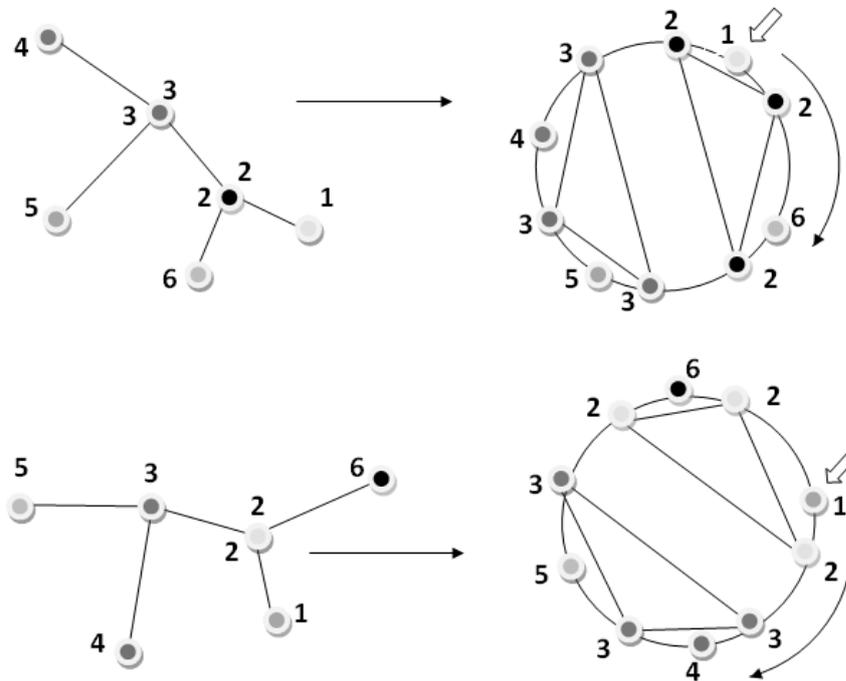


Рис. 3.3. Проверка изоморфизма осевых графов циркуляров: круговая диаграмма смежности.

(3) Иначе:

- (a) Превратим скелетные графы в ориентированные графы, заменив каждое ребро на две ветви с противоположными направлениями, и упорядочим исходящие из каждой вершины ветви по часовой стрелке.
- (b) Отообразим каждый из полученных орграфов в круговую диаграмму смежности (рис. 3.3) следующим образом:
 - пометим все вершины орграфа уникальной пометкой (цветом);
 - произведем обход орграфа, начиная с фиксированной терминальной вершины;
 - каждое пройденное ребро помечается, чтобы не идти по нему 2 раза;

- каждая вершина при ее прохождении наносится на круг (рис. 3.3);
- все вершины на круге, имеющие одинаковые пометки, соединим дополнительными дугами.

Отметим, что на диаграмме смежности терминальным вершинам соответствуют вершины на круге, в которые не входят дополнительные дуги.

Обозначим

$D(mg(c_1))$, $D(mg(c_2))$ — круговые диаграммы смежности скелетов $mg(c_1)$ и $mg(c_2)$.

Таким образом, мы построили отображения: $c_1 \rightarrow D(mg(c_1))$ и $c_2 \rightarrow D(mg(c_2))$.

- (с) Фиксируем произвольную терминальную вершину v_1^0 первого скелета $mg(c_1)$.
- (d) Фиксируем направление обхода первой круговой диаграммы смежности $D(mg(c_1))$.
- (e) Фиксируем направление обхода второй круговой диаграммы смежности $D(mg(c_2))$.
- (f) Фиксируем произвольную терминальную вершину v_2^0 второго скелета $mg(c_2)$.
 - (i) По выбранному в шаге (5) направлению обхода отображаем все вершины круга $D(mg(c_1))$ в вершины круга $D(mg(c_2))$ (требование сохранения ориентации).
 - (ii) Проверяем, что вершины, имеющие одинаковые пометки отобразились друг в друга (проверка смежности).

- (iii) В случае положительного результата проверки смежности, алгоритм заканчивает работу с возвращением найденного изоморфизма.
- (g) Если изоморфизм не найден, повторяем шаги, начиная с шага (6) с другой фиксированной терминальной вершиной второго скелета $mg(c_2)$.
- (h) Если после перебора всех вариантов начальной терминальной вершины, изоморфизм не найден, меняем направление обхода в шаге (5) и заново повторяем шаги алгоритма, начиная с (6).

Описанная процедура эквивалентна поиску топологической эквивалентности диаграмм смежности $D(mg(c_1))$ и $D(mg(c_2))$. Если существует их наложение, тогда циркуляры изоморфны.

Обозначим:

$\Pi(c_1, c_2)$ — функция проверки изоморфизма циркуляров c_1 и c_2 .

$$\Pi(c_1, c_2) = \begin{cases} 0, & mg(c_1) \cong mg(c_2) \\ 1, & mg(c_1) \not\cong mg(c_2) \end{cases}$$

Отметим, что вообще говоря, для одной пары циркуляров может быть найдено несколько изоморфизмов. Для прикладных задач морфинга, где имеет значение, какая ветвь одного циркуляра отображается в какую ветвь другого, важно решить также и задачу выбора наилучшего изоморфизма для фиксированной пары циркуляров. В настоящей работе данная задача не решается. Она может стать предметом отдельного исследования. В рамках данной работы важно лишь значение функции $\Pi(c_1, c_2)$ для заданной пары циркуляров.

3.6.3. Поиск проекции функции с априорным условием изоморфизма в монотонных цепочках. Итак, пусть построены цепочки монотонных подциркуляров \tilde{c}_1 и \tilde{c}_2 (3.41).

Доказано, что в них лежит единственное решение задачи поиска проекции.

$$\tilde{c}_1 = \{c_1^0, \dots, c_1^n\}, \tilde{c}_2 = \{c_2^0, \dots, c_2^m\}$$

Обозначим:

$\#c$ — количество ветвей циркуляра c ;

n — количество циркуляров первой цепочки \tilde{c}_1 ;

m — количество циркуляров второй цепочки \tilde{c}_2 .

ЛЕММА 13. Для циркуляра общего положения количество ветвей циркуляров из цепочек \tilde{c}_1 и \tilde{c}_2 (3.41) равно: $\{n+1, n, \dots, 2, 1\}$ и $\{m+1, m, \dots, 2, 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим циркуляр $c_1^n \equiv e_1^n$. У него одна ветвь e_1^n . То есть $\#c_1^n = 1$. У предшествующего ему в цепочке \tilde{c}_1 циркуляра c_1^{n-1} в силу уникальности терминальной стрижки ровно на одну ветвь больше, то есть $\#c_1^{n-1} = 2$. И так далее. \square

Предположим, без ограничения общности, что $m \leq n$.

Из данной леммы следует, что для любого значения $i = 0, \dots, m$ количество ветвей циркуляров из цепочки с соответствующими индексами $m-i$ и $n-i$ одинаково, т.е. $\#c_1^{n-i} \equiv \#c_2^{m-i}$.

Таким образом, алгоритм поиска оптимальной пары среди двух цепочек $\tilde{c}_1 = \{c_1^0, \dots, c_1^n\}, \tilde{c}_2 = \{c_2^0, \dots, c_2^m\}$ заключается в поиске нужного номера i , для которого пара соответствующих циркуляров (c_1^{n-i} и c_2^{m-i}) будет изоморфна.

Предположим, без ограничения общности, что $m \leq n$. Тогда $\#c_1^{(n-m)+1} \equiv \#c_2^1$

3.6.4. Алгоритм поиска изоморфной пары в монотонных цепочках.

- (1) $i = 0$ (инициализация индекса i).
- (2) Пока $\Pi(c_1^{(n-m)+i}, c_2^i) \neq 0$ (цикл до нахождения минимальных индексов циркуляров из первой и второй цепочки, изоморфных друг другу).
 - (а) $i=i+1$; (увеличение индекса i).

На выходе алгоритма мы имеем индекс i и соответствующую пару изоморфных циркуляров $c_1^{(n-m)+i}, c_2^i$, являющимися решением поставленной задачи поиска проекции.

3.7. Вычислительная сложность алгоритма решения задачи поиска проекции

Оценим вычислительную сложность алгоритмов построения цепочек, поиск изоморфной пары в цепочках и поиска проекции.

3.7.1. Вычислительная сложность алгоритма построения монотонных цепочек циркуляров. Обозначим

N — число ребер циркуляра c ;

$O^{\tilde{N}}$ — вычислительная сложность построения цепочки циркуляра c , имеющего число ребер N ;

Алгоритм (2.5.2) построения монотонных множеств $\tilde{c}, \tilde{\epsilon}$ имеет полиномиальную вычислительную сложность по числу ребер циркуляра c .

Шаг (2) алгоритма (2.5.2) фактически заключается в поиске минимального значения $D_H(c, (c^0 \setminus e^0))$ по всем терминальным ребрам циркуляра c . Число терминальных ребер N_c меньше или равно, чем N . Упорядочим все терминальные ребра $e^i, i = 1 \dots N_c$ по величине расстояния Хаусдорфа $D_H(c, (c^0 \setminus e^i))$. Данное упорядочение можно сделать за $O(N \log N)$ [51]. Вычисление расстояния Хаусдорфа $D_H(c, (c^0 \setminus e^i))$ на первом шаге может быть сделано аналитически.

Дальнейшие шаги не требуют упорядочения, а лишь вставки нового элемента (после каждой стрижки появляется новое терминальное ребро). Вычислительная сложность вставки в упорядоченное множество — $O(\log N)$ [51]. Шагов со вставкой будет не более, чем N . Таким образом, вычислительная сложность всех вставок в алгоритме построения упорядоченного множества \tilde{c} (2.5.2) будет не более, чем $O(N \log N)$.

Дополнительно на каждом последующем шаге понадобится делать вычисление расстояния Хаусдорфа от нового ребра циркуляра, образованной отсечением ребра e_k^i .

Обозначим сложность вычисления этого расстояния $O^D(e_k^i)$.

Расстояние Хаусдорфа $D_H(c, (c^i \setminus e_k^i))$ может быть вычислено за полиномиальное время по числу уже отсеченных ребер циркуляра. Таким образом, вычислительная сложность алгоритма построения упорядоченного множества \tilde{c} (2.5.2) будет равна произведению сложности вычисления расстояния $O^D(e_k^i)$ и сложности вставок $O(N \log N)$ и будет тоже полиномиальной:

$$O^{\tilde{N}} = O^D(e_k^i) * O(N \log N) \quad (3.43)$$

3.7.2. Вычислительная сложность алгоритма проверки изоморфизма.

Пусть в скелетах N вершин, из них M терминальных. $N > M$.

Оценим вычислительную сложность каждого шага алгоритма 3.6.2.

(1) $O(2N)$.

(2) $O(2N)$.

(3) 1.

(4) 1.

(5) 2.

(6) $O(N)$.

(7) Предыдущий шаг необходимо умножить на $O(M)$.

(8) Предыдущий шаг необходимо умножить на 2.

В результате вычислительная сложность не превосходит $O(2MN)$ в худшем случае.

3.7.3. Вычислительная сложность алгоритма решения задачи поиска проекции. Вычислительная сложность алгоритма решения задачи поиска проекции равна сумме вычислений цепочек монотонных циркуляров и проверки изоморфизма. Несмотря на то, что данный алгоритм не принадлежит NP , но он остается достаточно трудоемким. Необходимо его оптимизировать.

3.7.4. Оптимизация алгоритма решения задачи поиска проекции. Оптимизировать алгоритм для решения практических задач можно в трех направлениях:

(1) **Замена расстояния Хаусдорфа на менее вычислительно трудоемкое расстояние.** Например, сумму длин отстриженных ветвей или "геодезическое расстояние" по минимальной дуге отстриженной ветви. Данные расстояния могут быть вычислены за линейное время на каждом шаге алгоритма построения монотонных цепочек (2.5.2). Таким образом, первый множитель в формуле сложности построения цепочек (3.43) заменяется на $O(N)$ и общая сложность этого алгоритма становится не более, чем субкубической по числу ребер исходного циркуляра.

$$O^{\tilde{N}} = O(N) * O(N \log N) = O(N^2 \log N) \quad (3.44)$$

Стоит отметить, что при использовании других расстояний решение, полученное в результате работы алгоритма, получается приближенной проекцией. Но тем не менее оправданность применения на практике такого приближения обосновывается тем, что в практических задачах изоморфизм, как правило, достигается при небольшой стрижке. Таким образом найденное приближенное решение близко к искомой проекции.

- (2) **Построение цепочек монотонных циркуляров не полностью.** Во-первых, можно строить лишь несколько звеньев (подциркуляров) до достижения изоморфизма. Во-вторых, для задач сравнения формы можно задать порог "стрижки", дальше которого циркуляры обрезать уже не будут, считая, что циркуляр стал "чрезмерно" (по порогу) далек от исходного и сравнивать дальше уже не имеет смысла (пострадало качество в угоду устойчивости). При этом решение задачи поиска проекции может быть и не найдено, но если задача именно в сравнении формы, то по достижению указанного порога, фигуры могут быть объявлены далекими, а расстояние между ними можно считать достаточно большой константой.
- (3) **Использование информации о предыдущих шагах алгоритма.** Оптимизация данного алгоритма возможна за счет использования информации о предыдущих шагах алгоритма. Необязательно каждый раз строить заново круговые диаграммы смежности для проверки изоморфизма. Их достаточно построить один раз для циркуляров $(c_1^{(n-m)+i}, c_2^i)$. Все последующие диаграммы будут получены из этих путем удаления из них всех меток, относящихся к удаляемому ребру. Сравнение круговых диаграмм тоже необязательно делать целиком, используя n^2 времени.

Его можно объединить со сравнением предыдущим, за исключением новых "измененных мест".

Применяя все способы оптимизации, можно свести вычислительную сложность алгоритма решения задачи поиска проекции сводится к *субкубической* по минимальному числу ребер одного из циркуляров c_1 и c_2 в худшем случае.

3.8. Выводы главы

Критерий качества для пары циркуляров определяется при помощи оптимизационной задачи, поставленной на множестве пар циркуляров. Аппарат морфологии расширяется на множество пар циркуляров следующим образом:

- Функция устойчивости определяется через априорное условие изоморфизма искомого решения.
- Функция соответствия определяется как максимум двух функций соответствия исходным циркулярам.
- Функция штрафа являет собой сумму противоположных по смыслу функций соответствия и устойчивости для пары циркуляров.
- Морфологический проектор включает в себя априорное условие изоморфизма.

Введенные функции обладают следующими свойствами:

- Множество допустимых проекций функции штрафа представляет собой множество всех изоморфных подциркуляров.
- Множество допустимых проекций функции штрафа ограничено.
- Функции устойчивости, соответствия и штрафа непрерывны на множестве допустимых проекций.

- Морфологический проектор с априорным условием изоморфизма существует.

Для пары циркуляров можно построить множества цепочек вложенных подциркуляров на основе стрижки ветвей.

- Проекция функции с априорным условием изоморфизма может быть найдена конструктивно во множестве базовых циркуляров при помощи алгоритма поиска в множествах цепочек вложенных подциркуляров.
- Для пары циркуляров общего положения проекция
 - (1) существует,
 - (2) единственна,
 - (3) может быть найдена за полиномиальное по сумме ребер циркуляров время (субкубическое при оптимизации алгоритма для практических задач).

Итак, можно считать, что найденная проекция (пара циркуляров) — наилучшая пара циркуляров, аппроксимирующих две заданные фигуры. Она наилучшая в том смысле, что с одной стороны хорошо (в смысле расстояния Хаусдорфа) аппроксимирует обе фигуры, с другой стороны является наиболее ”простым” (в смысле близости к циркулярам-проекциям максимальной длины). Кроме того, априорное условие изоморфизма ограничивает множество допустимых проекций и дает интересное в прикладном смысле множество решений для пар фигур.

Осевые графы найденной пары циркуляров представляют собой

- (1) базовые скелеты исходных фигур;
- (2) наилучшие скелетные сегментации скелетов исходных фигур;

(3) скелетные графы, на основе которых получаются наилучшие скелетные декомпозиции исходных фигур.

Найденная проекция с априорным условием изоморфизма является наилучшей парой циркуляров, а соответствующие осевые графы — наилучшими скелетными сегментациями скелетов пары фигур, скелетные декомпозиции на основе этих осевых графов — наилучшими скелетными декомпозициями пары фигур.

Алгоритм поиска проекции обладает полиномиальной сложностью по минимальному числу ребер одного циркуляра из пары, но в практических задачах может быть сведена к субкубической при использовании других расстояний и информации о предыдущих шагах алгоритма.

Сравнение формы на основе скелетной сегментации

Задача сравнения формы заключается в определении меры сходства для пары фигур.

Задача сравнения формы имеет множество приложений, связанных с анализом и обработкой документов, содержащих изображения. Например, обработка запросов, распознавание формы, задачи машинного зрения, сравнение медицинских изображений и другие.

Цель данной главы — применение изоморфных скелетных сегментаций для построения различных мер сходства форм. Метрики, полученные с помощью данного инструмента, должны визуально соответствовать оценкам экспертов и при этом быть математически корректно определенными, являться расстояниями. Также рассматривается приложение к задачам распознавания формы и запросам из баз изображений.

Предлагается:

- провести анализ известных методов сравнения формы с использованием скелетов;
- выявить проблемы, возникающие при использовании скелета для сравнения формы;
- предложить новый подход к сравнению формы с использованием изоморфизма скелетов;
- реализовать новый подход на основе проектора с условием изоморфизма;

- определить новую метрику на множестве плоских фигур;
- провести эксперименты с циркулярным расстоянием на модельных и реальных данных;
- попробовать применение циркулярного расстояния к задачам распознавания формы плоских фигур и запросам по базе изображений.

4.1. Сравнение формы с использованием скелетов

Существующие методы сравнения формы фигур, можно условно разделить на два класса:

- (1) использующие исключительно информацию о границе;
- (2) использующие информацию о внутренней области фигуры (так или иначе связанные с различными видами скелета).

Сравнение методов этих двух классов приведено в работе [60]. Показано, что использование непрерывных скелетов обосновано для приложений связанных с распознаванием изображений.

4.1.1. Обзор известных методов сравнения формы с использованием скелетов. Идеи о том, что скелеты могут быть использованы как инструмент для сравнения формы неоднократно выдвигались различными авторами, например [49] и [66]. Тем не менее, все методы имеют те или иные недостатки. В большинстве случаев единственный критерий оценки качества меры сходства формы — визуальное сходство, что не является достаточным критерием. Данный критерий субъективен и не имеет математически корректного обоснования. Его также недостаточно для эффективного решения задач распознавания. Многие подходы связаны с приведением в соответствие границ и скелетов двух фигур, так называемым мэтчингом. В работе [48] предлагается алгоритм

сравнения формы на основе минимизации расстояния редактирования скелетов для простых фигур. В статьях [61], [62] обозначен вариационный метод вычисления цены деформации границы фигуры, которая ассоциируется с удаленностью ветви скелета. Тем не менее нет корректного обоснования, почему вычисляется именно такая величина. Кроме того на каждом шаге метода требуется явное сопоставление границ, что делает метод громоздким. У авторов другой работы [44] рассмотрена интересная альтернатива указанным методам: фиксируется модель скелета и производится операция минимизации границы, чтобы "подогнать" границу под фиксированный скелет. Метод устойчив к граничным шумам и незначительным деформациям, но чрезвычайно трудоемкий. Труды [68],[64] используют структурные характеристики скелета: таксономию локальных изменений, метки вершин скелета, локальные минимумы и максимумы радиальной функции скелета и т.п. В работе [55] используется алгоритм мэтчинга осевых деревьев, который вычисляется путем соотнесения контура фигуры и его отражения. Данный алгоритм не рассматривает проблему изменения порядка узловых ребер, которая может привести к потере связности фигуры. В работе [49] данная проблема решена за счет введения так называемого расстояния редактирования при мэтчинге скелетов для сравнения формы фигур. Идея данного подхода заключается в наблюдении за дискретными изменениями в скелетных графах в то время, как одна форма преобразуется в другую. Данная мера сходства зависит от параметров алгоритма редактирования. Другие авторы [57] предлагают сравнивать шоковые поддеревья, которые обладают некоторыми дополнительными метрическими параметрами: длиной

ветвей, радиусами привязанных окружностей, скоростями и кривизной скелета. Метод не устойчив к локальным деформациям и граничным шумам, иногда в методе происходят ошибки, влекущие за собой потерю связности фигур.

В работе [69] предпринята попытка введения устойчивой меры сходства без использования детального сопоставления границ фигур, что представляет преимущества по сравнению с [61], [62]. Обозначены дополнительные требования, накладываемые на меру сходства фигур, такие как: кусочная непрерывность на локальных сегментах, не имеющих топологических "перехлестов". Вдобавок, мера сходства должна отделить основные компоненты скелета от несущественных, и определять узлы скелета, разделяющие значимые части фигуры. В данной работе [69] предложена скелетная мера, основанная на степени изменения длины границы вдоль ветвей скелета, то есть следующая величина:

$$dl = \frac{dl_1}{ds} + \frac{dl_2}{ds}$$

где ds — изменение длины ветви скелета, а dl_1, dl_2 — изменение длин соответствующих границ (рис. 4.1).

Свойства указанной меры:

- полное описание формы;
- различает фигуры с одинаковой топологией скелета (кошка \neq собака);

Основная проблема данного метода в том, что мера определена как признак для каждой фигуры, который сравнивается на основе известных алгоритмов мэтчинга скелетов. Данную меру назовем условно "производной" мерой сходства. Далее будут проведены эксперименты для сравнения циркулярной меры с данной мерой сходства.

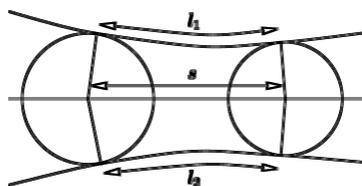


Рис. 4.1. Основа "производной" скелетной меры сходства.

4.1.2. Проблемы при использовании скелета для сравнения формы.

Рассмотрим пример фигур, изображенных на рисунке 1.1 главы 1. Одинакова ли форма двух фигур, одна из которых имеет зашумленную, а другая — гладкую границу? Одинакова ли форма фигур двух человечков, у которых ноги и руки находятся в разных положениях?

Сходство форм во всех трех случаях видно невооруженным глазом. Возникает задача — как описать математически столь очевидное сходство? Имеется предположение о том, что непрерывный скелет — это тот инструмент, который хорошо подходит для описания подобного сходства форм. Тем не менее, классически определенный как множество срединных осей [16],[15] имеет несколько известных проблем, описанных подробно в главе 3 данной работы. Все те же проблемы возникают и при определении мер сходства на основе скелета.

4.1.3. Новый подход к сравнению формы с использованием изоморфизма скелетов. В предыдущей главе предложен проектор с априорным условием изоморфизма. Фактически он задает корректный критерий стрижки. Остается определить меру сходства на основе полученной пары изоморфных циркуляров.

Можно предложить несколько методов определения меры сходства. Например:

- (1) Оценка сложности построения изоморфных сегментаций двух фигур (рис. 4.2).

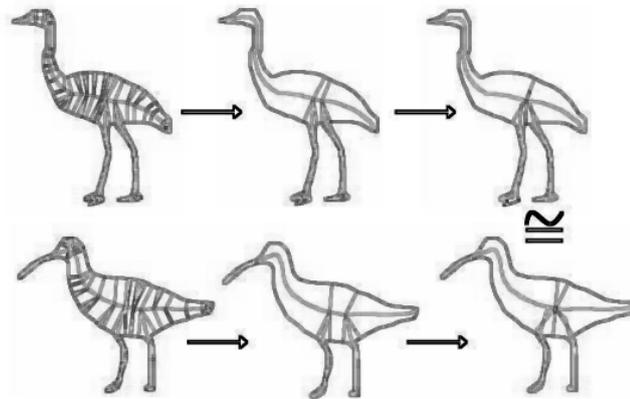


Рис. 4.2. Сложность получения изоморфных сегментаций для задачи сравнения формы

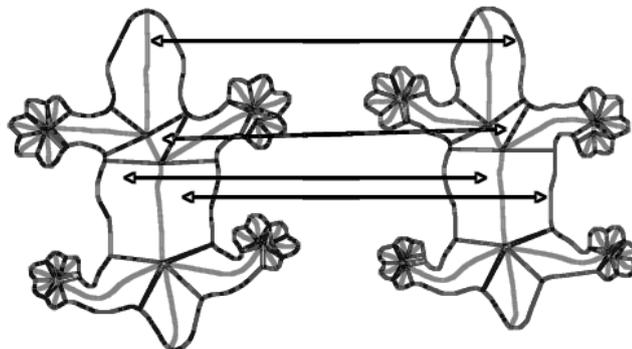


Рис. 4.3. Оценка результирующих изоморфных сегментаций для задачи сравнения формы

- (2) Оценка результирующих изоморфных сегментаций в сравнении с исходными фигурами и друг с другом (рис. 4.3).

Предлагаемый подход использует обе методики и базируется на следующей идее (рис. 4.4): для двух заданных фигур найти их наилучшие изоморфные проекции на основе проектора и сравнивать эти проекции в совокупности с исходными фигурами.

Предлагается ввести метрику — циркулярное расстояние на основе проектора с априорным условием изоморфизма. Таким образом, для определения метрики будет использована и ”цена преобразования” фигур к их проекциям (метрический критерий), и полученный результат (топологический критерий).

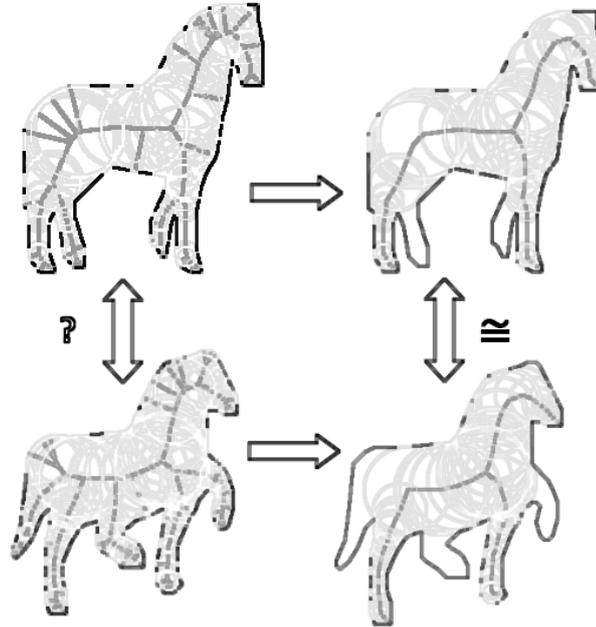


Рис. 4.4. Сравнение формы с использованием изоморфизма скелетов

4.2. Метрика на основе проектора — циркулярное расстояние с условием изоморфизма

Пусть даны две фигуры: F_1 и F_2 . Им соответствуют срединные циркуляры: $c^{ma}(F_1)$ и $c^{ma}(F_2)$.

4.2.1. Определение циркулярного расстояния с условием изоморфизма. Мы показали, что для пары циркуляров существует проектор с априорным условием изоморфизма, а также, что для фиксированной пары циркуляров его значение можно найти в явном виде. Пусть найдена пара: $(c_1^*, c_2^*) = \Psi_2(c^{ma}(F_1), c^{ma}(F_2), \Phi_2, Q_2)$. Тогда значение функции штрафа в точке (c_1^*, c_2^*) можно считать расстоянием между двумя циркулярами $(c^{ma}(F_1), c^{ma}(F_2))$ с условием изоморфизма. Вернемся к фигурам F_1 и F_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 87 (Циркулярное расстояние с условием изоморфизма). Циркулярным расстоянием ρ_c с условием изоморфизма для пары фигур (F_1, F_2) назовем значение функции штрафа на паре проекций функции с априорным условием

изоморфизма срединных циркуляров этих фигур:

$$\rho_c(F_1, F_2) = \Phi_2(c^{ma}(F_1), c_1^*, c^{ma}(F_2), c_2^*) \quad (4.45)$$

где $(c_1^*, c_2^*) = \Psi_2(c^{ma}(F_2), c^{ma}(F_2), \Phi_2, Q_2)$

Итак, циркулярное расстояние можно ввести с помощью функции штрафа и морфологического проектора с априорным условием изоморфизма.

4.2.2. Свойства циркулярного расстояния с условием изоморфизма.

ТЕОРЕМА 14. *Циркулярное расстояние удовлетворяет трем аксиомам метрики:*

- 1: Нулевое расстояние между совпадающими фигурами — $\rho_c(F, F) = 0$;
- 2: Неотрицательное расстояние между любыми фигурами — $\rho_c(F_1, F_2) \geq 0$;
- 3: Неравенство треугольника — $\rho_c(F_1, F_2) + \rho_c(F_2, F_3) \geq \rho_c(F_1, F_3)$ для любых F_1, F_2, F_3 .

Не выполнена аксиома метрики: $\rho_c(F_1, F_2) = 0 \Rightarrow F_1 = F_2$, то есть нулевое расстояние может быть не только между совпадающими фигурами. Но при этом любые фигуры с нулевым циркулярным расстоянием имеют изоморфные срединные циркуляры: $\rho_c(F_1, F_2) = 0 \Rightarrow c^{ma}(F_1) \cong c^{ma}(F_2)$;

То есть циркулярное расстояние является полуметрикой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем, что циркулярное расстояние удовлетворяет описанным аксиомам.

$$(1) \rho_c(F, F) = \Phi_2(c^{ma}(F), c_1^*, c^{ma}(F), c_1^*) = J_2(c, c^*, c, c^*) + Q_2(c^*, c^*) \equiv 0.$$

$$(2) \rho_c(F_1, F_2) \geq 0, \text{ так как } \Phi_2(c^{ma}(F_1), c_1^*, c^{ma}(F_2), c_2^*) \geq 0$$

(3) $\rho_c(F_1, F_2) + \rho_c(F_2, F_3) \geq \rho_c(F_1, F_3)$ для любых F_1, F_2, F_3 .

Распишем подробнее левую часть. Опустим $Q_2(c_1^*, c_2^*)$ и $Q_2(c_2^*, c_3^*)$, так как они равны нулю при изоморфизме $c_1^* \cong c_2^*$ и $c_2^* \cong c_3^*$. Таким образом, левая часть имеет вид:

$$\begin{aligned} & J_2(c^{ma}(F_1), c_1^*, c^{ma}(F_2), c_2^*) + J_2(c^{ma}(F_2), c_2^*, c^{ma}(F_3), c_3^*) = \\ & = \max\{J_c(c^{ma}(F_1), c_1^*), J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*)\} + \\ & + \max\{J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*), J_c(c^{ma}(F_3), c_3^*)\} \end{aligned}$$

Возможны всего 6 случаев:

$$(a) J_c(c^{ma}(F_1), c_1^*) \geq J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*) \geq J_c(c^{ma}(F_3), c_3^*);$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_c(F_1, F_2) + \rho_c(F_2, F_3) = J_c(c^{ma}(F_1), c_1^*) + J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*) \\ \rho_c(F_1, F_3) = J_c(c^{ma}(F_1), c_1^*) \end{cases} \quad (4.46)$$

$$(b) J_c(c^{ma}(F_1), c_1^*) \geq J_c(c^{ma}(F_3), c_3^*) \geq J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*);$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_c(F_1, F_2) + \rho_c(F_2, F_3) = J_c(c^{ma}(F_1), c_1^*) + J_c(c^{ma}(F_3), c_3^*) \\ \rho_c(F_1, F_3) = J_c(c^{ma}(F_1), c_1^*) \end{cases} \quad (4.47)$$

$$(c) J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*) \geq J_c(c^{ma}(F_3), c_3^*) \geq J_c(c^{ma}(F_1), c_1^*);$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_c(F_1, F_2) + \rho_c(F_2, F_3) = J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*) + J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*) = 2 * J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*) \\ \rho_c(F_1, F_3) = J_c(c^{ma}(F_3), c_3^*) \end{cases} \quad (4.48)$$

$$(d) J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*) \geq J_c(c^{ma}(F_1), c_1^*) \geq J_c(c^{ma}(F_3), c_3^*);$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_c(F_1, F_2) + \rho_c(F_2, F_3) = J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*) + J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*) = 2 * J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*) \\ \rho_c(F_1, F_3) = J_c(c^{ma}(F_1), c_1^*) \end{cases} \quad (4.49)$$

$$(e) J_c(c^{ma}(F_3), c_3^*) \geq J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*) \geq J_c(c^{ma}(F_1), c_1^*);$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_c(F_1, F_2) + \rho_c(F_2, F_3) = J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*) + J_c(c^{ma}(F_3), c_3^*) \\ \rho_c(F_1, F_3) = J_c(c^{ma}(F_3), c_3^*) \end{cases} \quad (4.50)$$

$$(f) J_c(c^{ma}(F_3), c_3^*) \geq J_c(c^{ma}(F_1), c_1^*) \geq J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*);$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho_c(F_1, F_2) + \rho_c(F_2, F_3) = J_c(c^{ma}(F_1), c_1^*) + J_c(c^{ma}(F_3), c_3^*) \\ \rho_c(F_1, F_3) = J_c(c^{ma}(F_3), c_3^*) \end{cases} \quad (4.51)$$

Во всех случаях, кроме (с) и (d) автоматически получается:
 $\rho_c(F_1, F_2) + \rho_c(F_2, F_3) \geq \rho_c(F_1, F_3)$.

Рассмотрим (с) и (d) отдельно.

$$(c): \quad \text{Так как} \quad J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*) \geq J_c(c^{ma}(F_3), c_3^*) \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 * J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*) \geq J_c(c^{ma}(F_3), c_3^*) \Rightarrow \rho_c(F_1, F_2) + \rho_c(F_2, F_3) \geq \rho_c(F_1, F_3)$$

(d): аналогично (с). Неравенство треугольника доказано.

$\rho_c(F_1, F_2) = 0 \Rightarrow c^{ma}(F_1) \cong c^{ma}(F_2)$, но необязательно $F_1 = F_2$. Докажем это.

Предположим, существуют такие $F_1 \neq F_2$, что $\rho_c(F_1, F_2) = 0$.
Тогда $J_2(c^{ma}(F_1), c_1^*, c^{ma}(F_2), c_2^*) = 0$ и $Q_2(c_1^*, c_2^*) = 0$. Но
 $J_2(c^{ma}(F_1), c_1^*, c^{ma}(F_2), c_2^*) = \max\{J_c(c^{ma}(F_1), c_1^*), J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*)\} = 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} J_c(c^{ma}(F_1), c_1^*) = 0 \Rightarrow D_H(c^{ma}(F_1), c_1^*) = 0, c_1^* \subseteq c^{ma}(F_1) \Rightarrow c^{ma}(F_1) \equiv c_1^* \\ J_c(c^{ma}(F_2), c_2^*) = 0 \Rightarrow D_H(c^{ma}(F_2), c_2^*) = 0, c_2^* \subseteq c^{ma}(F_2) \Rightarrow c^{ma}(F_2) \equiv c_2^* \end{cases} \quad (4.52)$$

Но в силу того, что $Q_2(c_1^*, c_2^*) = 0 \Rightarrow c_1^* \cong c_2^* \Rightarrow c^{ma}(F_1) \cong c^{ma}(F_2)$.

□

4.3. Эксперименты с циркулярным расстоянием

4.3.1. Экспериментальное пороговое циркулярное расстояние: определение. В приложениях, в которых необходимо принимать решение о том близки (сходны) или далеки (различны) фигуры, нужно задать порог $\eta \geq 0$, начиная с которого фигуры считаются далекими (различными). Поэтому необязательно находить проекцию для пары фигур и циркулярное расстояние с априорным условием изоморфизма (4.45), если можно заранее оценить, что фигуры далеки. Введем экспериментальное пороговое циркулярное расстояние.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 88 (Экспериментальное пороговое циркулярное расстояние). Экспериментальным пороговым циркулярным расстоянием с порогом η назовем следующую величину:

$$\rho_c^\eta(F_1, F_2) = \begin{cases} \rho_c(F_1, F_2), & \text{при } \rho_c(F_1, F_2) \leq \eta \\ \infty, & \text{при } \rho_c(F_1, F_2) > \eta \end{cases} \quad (4.53)$$

4.3.2. Экспериментальное пороговое циркулярное расстояние: свойства. Данное ограничение в терминах проектора и поиска проекций означает фактически следующее:

- функция соответствия каждого циркуляра будет обладать дополнительным условием:

$$J_c(c, c') = \begin{cases} D_H(c, c'), & c' \subseteq c \cap D_H(c, c') \leq \eta \\ +\infty, & c' \not\subseteq c \cup D_H(c, c') > \eta \end{cases} \quad (4.54)$$

- множество допустимых проекций сужается $V(c_1, c_2, \Phi_2)$: в теореме об ограниченности множества допустимых проекций (теорема 8), можно

												
	0.62	##	8.04	6.44	##	##	##	##	##	##	##	##
	##	0.98	3.88	##	##	##	##	##	##	##	##	##
	8.04	3.88	1.72	6.44	##	##	##	##	##	##	##	##
	6.44	##	##	1.56	##	##	##	9.85	##	##	##	##
	##	##	##	##	1.66	6.89	4.06	6.68	##	##	##	##
	##	##	##	##	6.89	1.54	6.89	4.97	##	##	##	##
	##	##	##	##	4.06	1.80	1.80	4.97	##	##	##	##
	##	##	##	9.85	6.68	4.97	4.97	0.67	##	##	##	##
	##	##	##	##	##	##	##	##	1.57	2.44	2.36	2.44
	##	##	##	##	##	##	##	##	2.44	1.19	##	1.19
	##	##	##	##	##	##	##	##	2.36	##	1.82	##
	##	##	##	##	##	##	##	##	2.44	1.19	##	1.02

Рис. 4.5. Пример экспериментального порогового циркулярного расстояния.

выбрать параметр в зависимости от η , который будет сильнее ограничивать $V(c_1, c_2, \Phi_2)$, нежели выбранное в теореме значение M_1 .

- Теорема существования проектора становится верна не для любой пары фигур (циркуляров).
- Если в указанных ограниченных условиях проекция все же существует, то теорема о единственности решения задачи поиска проекции остается верна.
- Алгоритм решения задачи поиска проекции упрощается: необходимо строить не всю последовательность вложенных цепочек подциркуляров, а лишь ее часть. Вычислительная сложность алгоритма становится меньше.

На рисунке 4.5 показана таблица с примером порогового циркулярного расстояния. Знак ∞ в таблице 4.5 изображен как: '##'.

4.3.3. Примеры решения модельных задач. С целью испытания предложенного подхода для решения практических задач взяты эксперименты из работы [69]. Аналогичные эксперименты проведены для расстояния ρ_c (4.45).

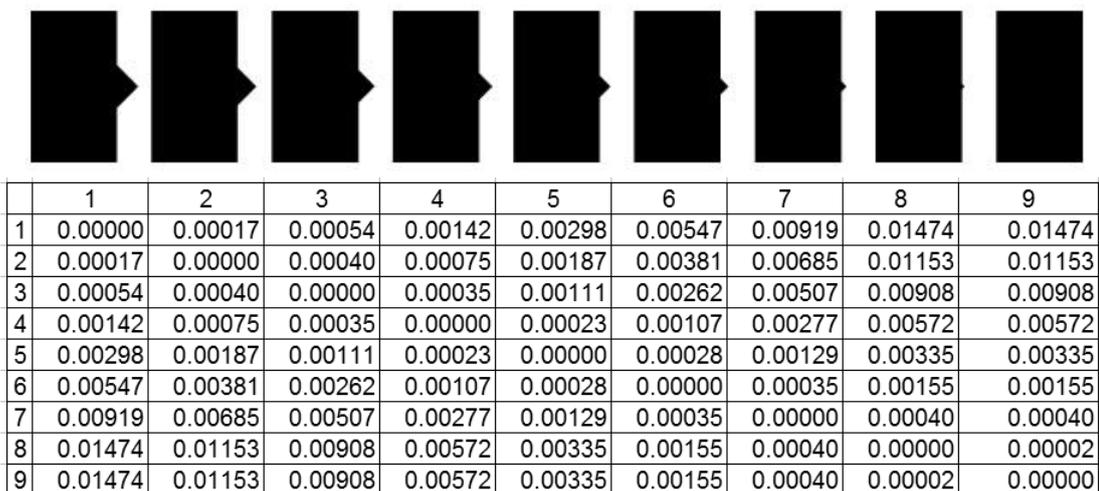


Рис. 4.6. Прямоугольники с уменьшающимся шумовым отростком и таблица попарных циркулярных расстояний.

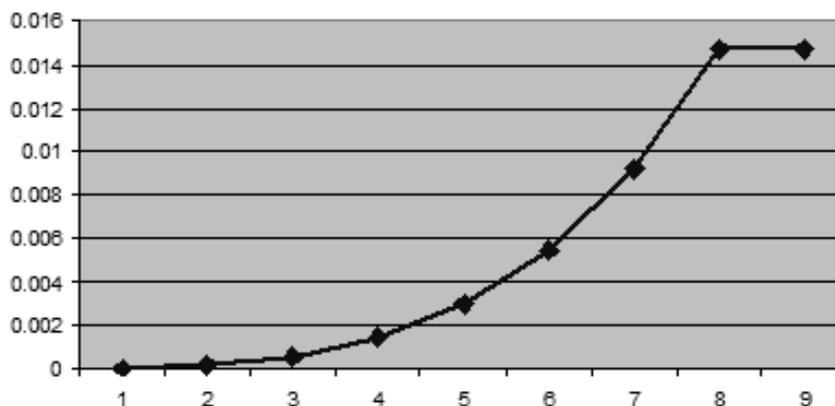


Рис. 4.7. Циркулярное расстояние от прямоугольника №1 остальных.

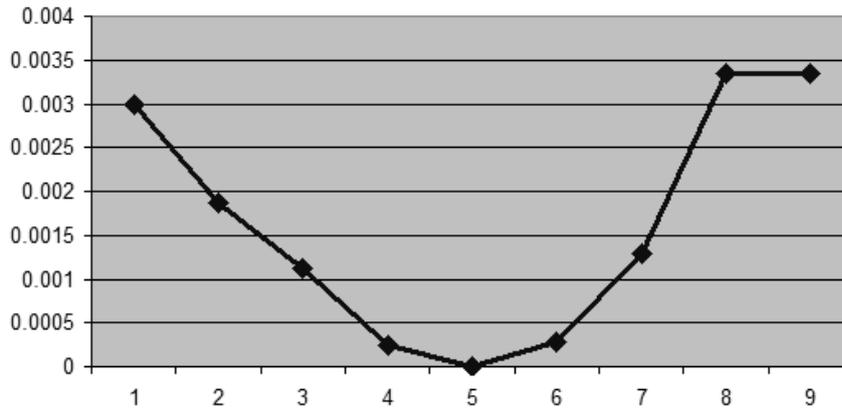


Рис. 4.8. Циркулярное расстояние от прямоугольника №5 до остальных.

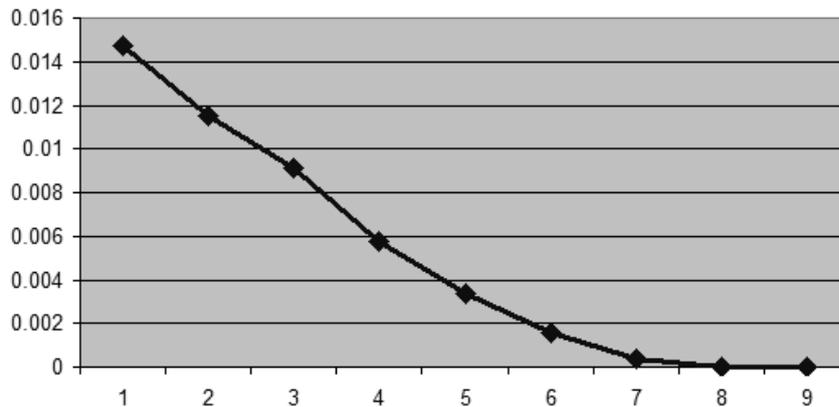


Рис. 4.9. Циркулярное расстояние от прямоугольника №9 до остальных.

4.3.4. Устойчивость к деформации. Цель данного эксперимента показать, что несмотря на неустойчивость непрерывного скелета к локальным деформациям фигуры, предложенная мера сходства на основе проектора (4.45) к таким деформациям устойчива.

На рисунке 4.6 показана последовательность прямоугольников с постепенно уменьшающимся шумовым отростком. Пронумеруем эти прямоугольники от одного до девяти. Обозначим фигуры так: $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9$. Посмотрим, как меняется зависимость значений предложенной меры сходства на соответствующих монотонных множествах:

(1) между первым прямоугольником и остальными: $\rho_c(P_1, P_1); \dots \rho_c(P_1, P_9)$;
рис. 4.7. График возрастает.

(2) между пятым прямоугольником и остальными: $\rho_c(P_5, P_1); \dots \rho_c(P_5, P_9)$;
рис. 4.8. Видно, что график имеет локальный минимум.

(3) между последним прямоугольником и остальными:
 $\rho_c(P_9, P_1); \dots \rho_c(P_9, P_9)$; рис. 4.9. Видно, что график убывает.

Эксперимент показывает устойчивость предложенной меры сходства к незначительным деформациям (нет резких скачков при незначительных деформациях).

4.3.5. Гладкое изменение структуры. Цель данного эксперимента — исследовать изменение циркулярного расстояния на структурно похожих фигурах, то есть имеющих незначительные топологические различия.

Рассматривается последовательность фигур животных, для которых происходит плавный морфинг одной фигуры в другую: ”осел превращается в зайца” (рис. 4.10).

Построим, как и в предыдущем эксперименте, графики расстояний

(1) от осла до остальных фигур последовательности рис. 4.11

(2) от зайца до остальных фигур последовательности рис. 4.12

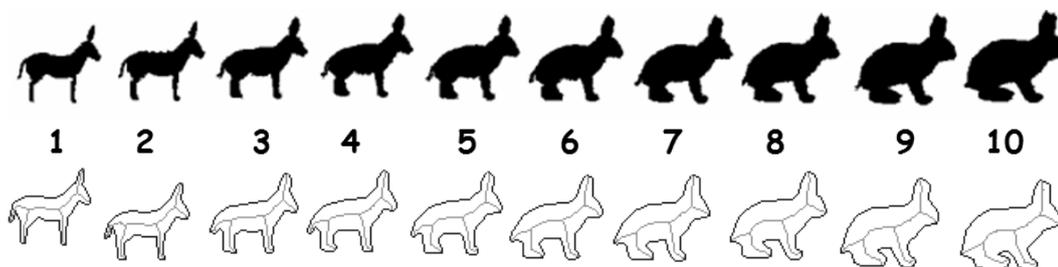


Рис. 4.10. Последовательность ослы-зайцы.

Из графиков видна монотонность расстояний от осла до остальных фигур (4.11). И ”почти” монотонность расстояний от зайца до остальных фигур

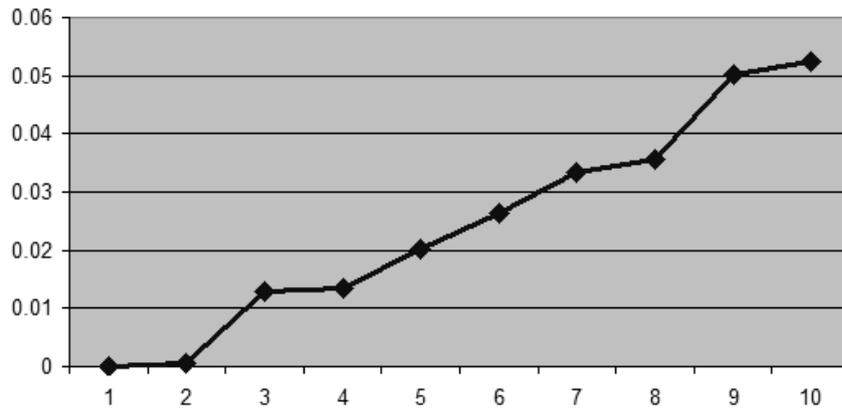


Рис. 4.11. Диаграммы циркулярных расстояний: от осла до остальных фигур.

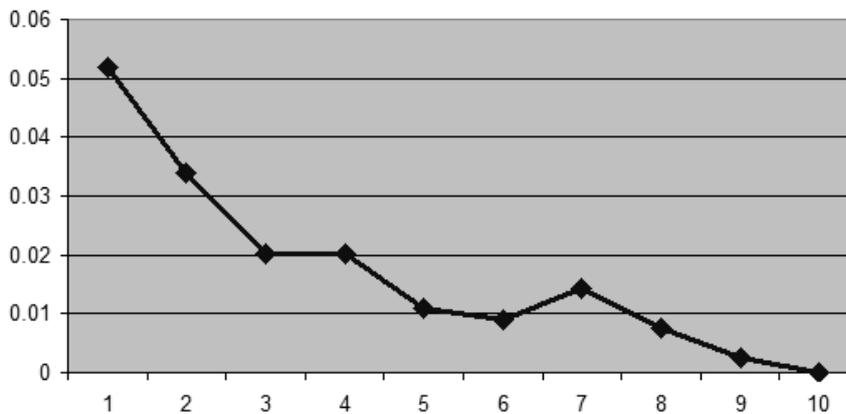


Рис. 4.12. Диаграммы циркулярных расстояний: от зайца до остальных фигур.

(4.12). Таким образом, можно сделать вывод, что предложенная мера сходства хорошо отделяет различные фигуры, даже имеющие незначительные структурные различия. Это преимущество достигается за счет метрической компоненты предложенной меры сходства.

4.3.6. Примеры решения реальных задач. Цель настоящего эксперимента — проверка различия похожих фигур на реальных данных. Рассмотрим эксперимент, предложенный [69]. Имеется множество, состоящее из двух классов инструментов: разводные ключи и плоскогубцы. Основная проблема при работе с реальными данными — это так называемые окклюзии — элементы перекрытия частей фигуры. В примере с инструментами часть плоскогубцев может

быть открыта в большей или меньшей степени, что делает их "похожими" на разводные ключи.

Найдем все расстояния от каждого инструмента до остальных и отсортируем (рис. 4.13). Аналогичный эксперимент проведен в работе [69] на основе введенной авторами данной работы нормализованной "производной" скелетной меры сходства.

						
	0.0009	0.00236	0.0077	0.00867	0.0381	0.209
						
	0.0012	0.017	0.023	0.039	0.0516	0.074
						
	0.00048	0.001	0.0015	0.0439	0.0048	0.00926
						
	0.0004	0.0006	0.0019	0.003	0.009	0.10297
						
	0.0002	0.0005	0.0105	0.01388	0.0139	0.1292
						
	0.0176	0.07268	0.1338	0.1338	0.1397	0.1397
						
	0.00005	0.0002	0.0017	0.0032	0.0636	0.0064

Рис. 4.13. Циркулярное расстояние (4.45).

На рисунке 4.13 показано, как отсортировались инструменты по предложенной мере сходства (4.45), а на рисунке 4.14 — по нормализованной "производной" скелетной мере сходства (данные взяты из работы [69]). Видно, что

						
	0.068	0.081	0.108	0.112	0.132	0.187
						
	0.053	0.054	0.069	0.080	0.087	0.112
						
	0.030	0.048	0.054	0.084	0.092	0.108
						
	0.021	0.030	0.054	0.081	0.086	0.110
						
	0.080	0.084	0.086	0.095	0.102	0.132
						
	0.088	0.092	0.095	0.110	0.128	0.186
						
	0.021	0.048	0.068	0.069	0.102	0.128

Рис. 4.14. "Производная" скелетная мера сходства [69].

сортировка при помощи циркулярного расстояния (4.45) не хуже, а в некоторых случаях и лучше сортировки по нормализованной производной скелетной мере 4.14.

Обозначим плоскогубцы: h_1, \dots, h_5 , а разводные ключи: k_1, k_2 .

Посчитаем количественно оценку качества работы методов. Будем считать последовательность сортировки *верной для плоскогубцев*, если разводные ключи оба имеют наибольшие расстояния по сравнению с расстояниями до плоскогубцев. Аналогично будем считать последовательность сортировки *верной для разводного ключа*, если разводной ключ имеет наименьшее расстояние по сравнению с расстояниями до плоскогубцев. То есть

$$\rho(k_1, h_i) > \rho(k_1, k_2), \forall i = 1, \dots, 5$$

Таблица 1. Сортировка инструментов по возрастанию циркулярной и ”производной скелетной” [69] мерам сходства.

Оценка: Количество перестановок	”Производная скелетная” мера сходства [69]	”Циркулярная” мера сходства
Плоскогубцы 1	1	0
Разводной ключ 1	4	4
Плоскогубцы 2	3	6
Плоскогубцы 3	2	0
Плоскогубцы 4	6	0
Разводной ключ 2	0	0
Плоскогубцы 5	1	0
Сумма перестановок	17	10
Оценка ошибки сортировки	0.34	0.2

$$\rho(k_2, h_i) > \rho(k_1, k_2), \forall i = 1, \dots, 5$$

Введем количественную оценку качества работы методов следующим образом:

- (1) Посчитаем количество перестановок при методе сортировки ”пузырьком” [51], которое необходимо сделать для того, чтобы построить верную сортировку для разводного ключа. Максимальное количество таких перестановок для разводного ключа равно **пяти** в случае, когда сортировка максимально неправильная: разводной ключ имеет наибольшее расстояние по сравнению с расстоянием до плоскогубцев.
- (2) Посчитаем количество перестановок при методе сортировки ”пузырьком”, которое необходимо сделать для того, чтобы построить верную сортировку для плоскогубцев. Максимальное количество таких перестановок для плоскогубцев равно **восьми** в случае, когда сортировка

максимально неправильная: оба разводных ключа имеют наименьшее расстояние по сравнению с расстоянием до плоскогубцев.

- (3) Всего сумма максимального количества перестановок для всех инструментов: **пятьдесят**. Так как у нас два разводных ключа: $5 \times 2 = 10$ и пять плоскогубцев: $8 \times 5 = 40$.
- (4) Посчитаем количество перестановок для каждой из последовательностей инструментов ”производной скелетной” меры (рис. 4.14) и ”циркулярной” меры сходства (рис. 4.13). Посчитаем общую сумму всех перестановок для каждой меры и получим количественные оценки ошибки полученных сортировок (1). Разделим на максимальное количество перестановок для всех инструментов — нормированная оценка ошибки. В случае, когда все сортировки абсолютно верные, эта оценка равна нулю. Чем больше эта оценка, тем хуже качество сортировки.

Вывод: ”циркулярная” мера сходства дала лучшую по сравнению с ”производной скелетной” мерой оценку качества сортировки инструментов.

4.4. Задача распознавания на основе скелетной сегментации

В данном разделе рассмотрено приложение основного алгоритма и предложенных метрик к задаче распознавания формы.

Была взята база данных, состоящая из 142 фигур, заданных бинарными изображениями: черные фигуры на белом фоне (рис. 4.15). База данных содержит в себе объекты из трех классов: мыши (69 объектов), руки (22 объекта) и птицы (51 объект).

Для каждого объекта построен вектор признаков на основе сравнения объекта с набором шаблонных объектов. Пусть в наборе шаблонов обязательно

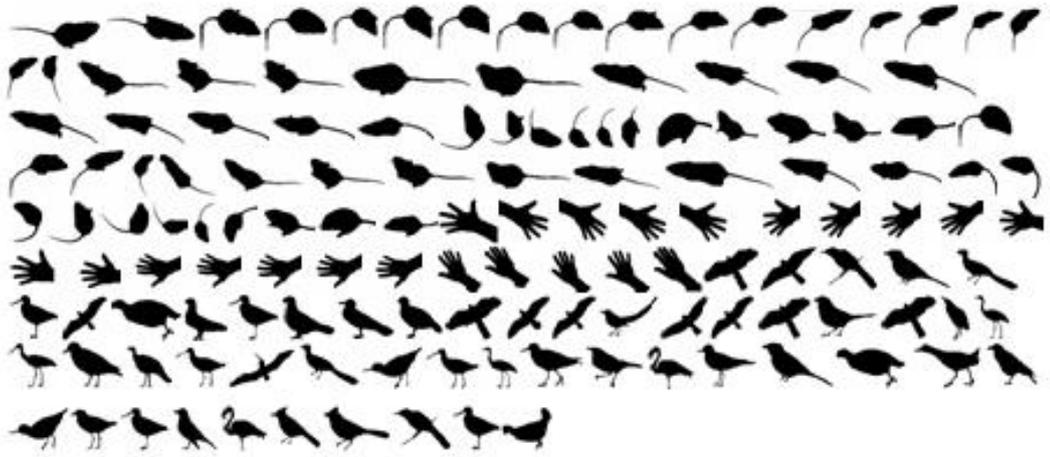


Рис. 4.15. Тестовая база фигур.

присутствует хотя бы один объект каждого класса. Шаблоны могут быть выбраны, к примеру, экспертом.

Для экспериментов были взяты следующие восемь шаблонов: T_1, \dots, T_8 (рис. 4.16)



Рис. 4.16. Набор тестовых шаблонов.

Вектор признаков для фигуры S выглядит следующим образом:

$$\{\rho_c(S, T_1), \dots, \rho_c(S, T_8)\}$$

Где ρ_c — пороговое циркулярное расстояние (4.53).

Рассмотрим классическую задачу распознавания, где имеется набор прецедентов, для которых принадлежность к классу считается известной, и набор контрольных объектов, для которых необходимо определить принадлежность к одному из трех классов.

Поставленная задача решалась следующим образом:

- (1) Построение признакового пространства на множестве всех объектов, т.е. построение всех признаковых векторов.

- (2) Случайное разделение всей выборки на обучающую и контрольную. Использование метода скользящего контроля [12].
- (3) Использование стандартных методов обучения алгоритмов на обучающей выборке и оценка точности работы алгоритма на контрольной выборке.
- (4) Повторение шагов 2 и 3 для получения более точного результата.

Для проведения экспериментов было выбрано несколько стандартных алгоритмов обучения. Их подробные описания можно найти в [12]):

- (1) Метод k-ближайших соседей.
- (2) Алгоритмы голосования по логическим закономерностям классов.
- (3) Метод опорных векторов.
- (4) Комбинированный комитетный метод.

Таблица 2. Метод k-ближайших соседей: результаты распознавания.

Номер класса	Верно (%) распознаны	Ошибки (%)	Распознавание по классам (%)		
			1	2	3
1	93.2	6.8	98.6	0.0	9.8
2	100.0	0.0	0.0	100.0	0.0
3	97.9	2.1	1.4	0.0	90.2
Всего	95.8	4.2			

В результате всего один объект был классифицирован неверно: мышь, отнесенная к классу птиц. Таким образом, подход к сравнению формы с помощью изоморфных непрерывных скелетов был успешно реализован и проверен

Таблица 3. Алгоритмы голосования по логическим закономерностям классов: результаты распознавания.

Номер класса	Верно (%) распознаны	Ошибки (%)	Распознавание по классам (%)		
			1	2	3
1	95.8	4.2	98.6	0.0	5.9
2	91.7	8.3	0.0	100.0	3.9
3	97.8	2.2	1.4	0.0	88.2
Всего	95.1	4.2			

Таблица 4. Метод опорных векторов: результаты распознавания.

Номер класса	Верно (%) распознаны	Ошибки (%)	Распознавание по классам (%)		
			1	2	3
1	94.4	5.6	98.6	9.1	3.9
2	100.0	0.0	0.0	90.9	0.0
3	98.0	2.0	1.4	0.0	96.1
Всего	96.5	3.5			

на приложении распознавания формы. Проведенные эксперименты показали очень хорошие результаты.

4.5. Сравнение формы: эксперименты с запросами

На расширенной по сравнению с (4.15) базе изображений (рис. 4.17), состоящей из 181 фигуры, проведен ряд экспериментов. По запросам фигур из этой базы данных ближайшие 6 фигур к запрашиваемой показаны на рисунке 4.18. Расстояние между запрашиваемой фигурой и каждой из фигур базы данных

Таблица 5. Комбинированный комитетный метод: результаты распознавания.

Номер класса	Верно (%) распознаны	Ошибки (%)	Распознавание по классам (%)		
			1	2	3
1	100.0	0.0	98.6	0.0	0.0
2	100.0	0.0	0.0	100	0.0
3	98.1	1.9	1.4	0.0	100.0
Всего	99.3	0.7			

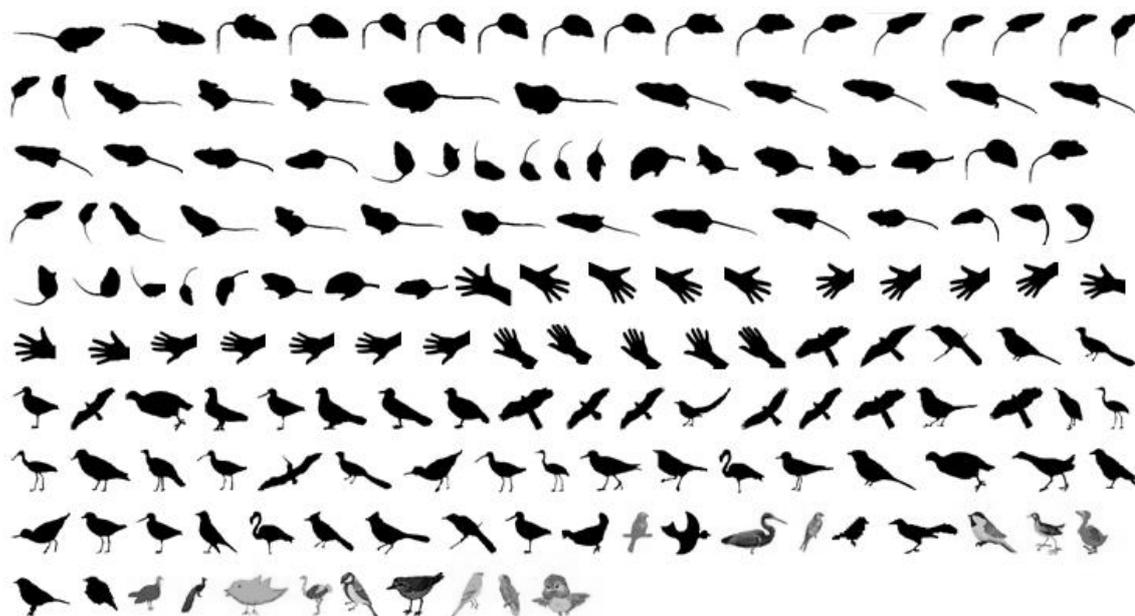


Рис. 4.17. База данных 181 плоская фигура.

рассчитывалось на основе циркулярного расстояния (4.45), которое вычислялось для всех пар фигур.

							
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Рис. 4.18. 6 ближайших по циркулярному расстоянию (4.45) фигур из базы

4.6. Выводы главы

Определенные с помощью циркулярной морфологии критерии качества и функции штрафа могут быть успешно использованы для задач сравнения формы. Применение данных функций позволяет избежать многих известных проблем при использовании скелета для сравнения формы. Например, его регуляризацию.

Циркулярные функции штрафа и оптимальной проекции с априорным условием изоморфизма позволяют генерировать метрики:

- циркулярное расстояние;
- пороговое циркулярное расстояние.

Эксперименты с циркулярным расстоянием на модельных и реальных данных подтверждают его эффективное применение к задачам распознавания формы плоских фигур и запросам по базе изображений.

Вычислительные эксперименты показывают достоверность и эффективность предложенного подхода.

Заключение

В работе развивается непрерывный подход к анализу формы плоских изображений. Данный подход основывается на идее немедленного перехода от растрового изображения к непрерывной модели изображения без использования растровых преобразований. Это позволяет применять признаки формы без их адаптации к растровым изображениям.

В работе предлагается использовать модель циркулярного представления изображений, в которой фигура представлена в виде осевого графа (скелета) с шириной. Несмотря на кажущуюся избыточность такой гранично-скелетной модели, ее применение представляется целесообразным, поскольку такая модель позволяет связать границу и скелет фигуры и исследовать их совместно.

В целом данное представление позволяет решать задачу интеллектуальной сегментации и декомпозиции фигур на составляющие части. И в частности, такое комплексное исследование позволяет для пар плоских фигур использовать топологические (изоморфизм скелетов) и метрические (расстояние Хаусдорфа) характеристики для определения оптимальной пары сегментаций фигур. В работе предложен проектор с априорным условием изоморфизма на базе математических морфологий, с помощью которого можно эффективно находить наилучшую аппроксимацию пары фигур. Проектор определяется как минимум функции штрафа, заданной на специальных подмножествах циркуляров. Описаны условия, при которых наилучшая пара циркуляров существует и единственна. Описан эффективный алгоритм, находящий оптимальную пару.

Данная идея имеет приложение к задаче сравнения формы. В работе представлен и исследован метод сравнения формы плоских фигур на основе циркулярного расстояния, которое вычисляется при помощи наилучшей аппроксимации пары фигур. Применение этого метода дает возможность распознавания плоских односвязных изображений. С помощью предложенного метода можно эффективно сравнивать изображения достаточно сложной формы. Метод устойчив к незначительным деформациям гибких объектов, к их пространственной ориентации и к незначительным шумам на границах.

Задачами на будущее остаются:

- (1) формулировка и решение задачи поиска проекции на паре произвольных циркуляров (не только уникальной проекции) и применение предложенной меры сходства на реальных данных;
- (2) развитие теории циркулярной морфологии, помимо пар циркуляров, для конечного множества циркуляров.

Литература

1. *Болтянский В. Г. , Ефремович В. А.* Наглядная топология //выпуск 21 серии «Библиотечка квант» М., Наука, 1982.
2. *Болтянский В. Г. , Гохберг И. Ц.* Разбиение фигур на меньшие части. // Популярныe лекции по математике, выпуск 50, Издательство "Наука главная редакция физико-математической литературы Москва 1971.
3. *Васильев Н.* Метрические пространства. // Квант. — 1990. — № 1.
4. *Виноградов И. М.* Устойчивости теория // Математическая энциклопедия. Том 5, 1977, с. 551-553.
5. *Виноградов И. М.* Метрика // Математическая энциклопедия. Том 3, 1977, с. 658.
6. *Визильтер Ю.В.* Критериальные проективные морфологии. // Труды 14 Всероссийской конф. Математические Методы Распознавания Образов (ММРО-14), Суздаль 2009, с. 317-320.
7. *Визильтер Ю.В.* Обобщенная проективная морфология. // Компьютерная Оптика, Институт систем обработки изображений РАН, том 32, номер выпуска 4, с. 384-399, 2008.
8. *Визильтер Ю.В., Желтов С.Ю., Бондаренко А.В., Ососков М.В., Моржин А.В.* Обработка и анализ изображений в задачах машинного зрения. // Курс лекций и практических занятий.- М: Физматкнига, с. 384-389, 2010.
9. *Домахина Л.Г.* Об одном методе сегментации растровых объектов для задач преобразования формы // Труды 13 Всероссийской конф. Математические Методы Распознавания Образов (ММРО-13),Москва 2007, с. 311-314.
10. *Домахина Л.Г., Охлопков А.Д.* Изоморфные скелеты растровых изображений // Труды 18 международной конференции ГРАФИКОН-2008, 2008 г.
11. *Жукова К., Рейер И.* Параметрическое семейство гранично-скелетных моделей формы. // Математические методы распознавания образов: 14-я Всероссийская конференция. Владимирская обл., г. Суздаль, 21-26 сентября 2009 г.: Сборник докладов.
12. *Журавлев Ю.И., Рязанов В.В., Сенько О.В.* Распознавание. Математические методы. Программная система. Практические применения. // М.: ФАЗИС, 2006.
13. *Кольцов П.П.* РАЗРАБОТКА МЕТОДОЛОГИИ СРАВНИТЕЛЬНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ МЕТОДОВ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ. // Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, Москва, 2012.
14. *Мацевский С.В.* Математическая культура. // Библ. тип: Учебник, учебное пособие. Ч.1: Учебное пособие. Изд. 2-е, перераб. и доп. Год издания: 2002.

15. *Местецкий Л. М.* Непрерывная морфология бинарных изображений. Фигуры. Скелеты. Циркуляры // Москва, ФИЗМАТЛИТ 2009 г.
16. *Местецкий Л. М.* Непрерывный скелет бинарного растрового изображения // Труды 8 международной конференции ГРАФИКОН-1998, 1998 г.
17. *Местецкий Л. М., Рейер И. А.* Непрерывное скелетное представление изображения с контролируемой точностью // Труды 15 международной конференции ГРАФИКОН-2003, 2003 г., с. 246–249
18. *Местецкий Л.М., Семенов А. Б.* Преобразование цветных изображений на основе жирных Б-сплайновых кривых // Труды 14 международной конференции ГРАФИКОН-2003, Москва.
19. *Петрова Л.Г., Местецкий Л.М.* Расчет гомеоморфизма односвязных многоугольных областей с изоморфными базовыми скелетами // Сборник "Искусственный интеллект Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, г. Симферополь, Украина, 2006, с. 192-197.
20. *Препарата, М. Шеймос.* Вычислительная геометрия: // Введение. — М.: Мир, 1989. Стр. 295
21. *Пытьев Ю.П.* Морфологический анализ изображений, // Доклады АН СССР, 1983.—Т.269, №5, с.1061-1064.
22. *Рейер И.А.* Сегментация штрихов и их соединений при распознавании рукописного текста // Труды 9-й международной конференции по компьютерной графике и машинному зрению "Графикон-99", Москва, 1999, С. 151-155.
23. *Самарский А.А.* Введение в численные методы // Учебное пособие. Издательство: Наука. 1982
24. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач //1979.
25. *Харари Ф.* Теория графов. // — М.: УРСС, 2003. — 300 с.
26. *Харинов М.В.* Аппарат адаптивной дихотомической сегментации изображения. // ММРО-15.
27. *Abidi M. A. and Gonzalez R. C.* Shape Decomposition Using Elliptic Fourier Descriptors // Proc. 18th IEEE Southeast Sympo. Sys. Theory, pp. 53-61, Knoxville, TN, April 1986.
28. *O. Aichholzer and F. Aurenhammer.* Straight skeletons for general polygonal figures in the plane // In Proceedings of the 2nd International Computing and Combinatorics Conference COCOON '96, Hong Kong, pages 117.126, 1996. LNCS 1090.
29. *Aslan C. and Tari S.,* An axis based representation for recognition // ICCV (2005), pp. 1339–1346.
30. *Bai X. , Latecki L. J. and Liu W.-Y.,* Skeleton pruning by contour partitioning with discrete curve evolution // IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell. 29(3) (2007) 449–462.
31. *Bai X., Yang X., Yu D. and Latecki L. J.* Skeleton-Based Shape Classification Using Path Similarity // International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence Vol. 22, No. 4 (2008) 733–746
32. *H. Blum* Biological shape and visual science (part I), // J. Theor. Biol. 38 (1973) 205–287
33. *Blum H.* A transformation for extracting new descriptors of shape // In W. Wathen-Dunn, editor, Models for the Perception of Speech and Visual Form. MIT Press, 1967.pp. 362-380.
34. *Chin F., Snoeyink J., Wang C. A.* Finding the Medial Axis of a Simple Polygon in Linear Time //Discrete Comput Geom 21 , p.405-420, 1999.

35. *Choi Hyeong In and Choi Sung Woo and Moon Hwan Pyo* Mathematical theory of medial axis transform // Pacific.J. of Math,1997, volume 181, HierHier number 1, pages 57-88.
36. *Choi W.-P., Lam K.-M. and Siu W.-C.*, Extraction of the Euclidean skeleton based on a connectivity criterion // Patt. Recogn. 36(3) (2003) 721-729.
37. *S.-W. Cheng and A. Vigneron*. Motorcycle graphs and straight skeletons. // In Proceeding of the 13th ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, pages 156.165, 2002.
38. *Domakhina L.* Skeleton-Based Shape Segmentation // The Proceedings of the Second International Workshop on Image Mining. Theory and Applications (IMTA 2009), Lisbon, Portugal, 2009
39. *Domakhina L. ,Okhlopkov A.* SHAPE COMPARISON BASED ON SKELETON ISOMORPHISM // The Proceedings of the the fourth International Conference on Computer Vision Theory and Applications (VISAPP), Lisbon, Portugal, 2009
40. *Домахина Л.Г.*, Регуляризация скелета для задачи сравнения формы // Труды 14 Всероссийской конференции Математические Методы Распознавания Образов (ММРО-14), Суздаль, 2009, с. 342-346
41. *Domakhina L.G.* Skeleton Segmentation and Decomposition for Pairs of Shapes // Pattern Recognition and Image Analysis, No. 1, 2010, p...
42. *D. Eppstein and J. Erickson*. Raising roofs, crashing cycles, and playing pool: applications of a data structure for finding pairwise interactions. // Discrete and Computational Geometry, 22(4):569.592, 1999. Special issue for SCG 1998.
43. *Geiger D., Liu T-L, and Kohn Robert V.* Representation and Self-Similarity of Shape // IEEE Transactions on Pattern Recognition Analysis and Machine Intelligence, vol.25, no. 1, 2003, p.86-99.
44. *Golland P., Grimson E.L.* Fixed topology skeletons // Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition, vol. 1, June 2000, pp. 10-17.
45. *Gonzalez, R. and Woods, R.* Digital image processing // Addison-Wesley Reading, Mass, 1987.
46. *Hubbard P.M.* Collision Detection for Interactive Graphics Applications // IEEE Transactions on Vizualization and Computer Graphics, p.218-230, 1995.
47. *Keisler, H. Jerome* Elementary calculus. An infinitesimal approach. Boston, Massachusetts: Prindle, Weber & Schmidt. ISBN 0-87150-911-3. <http://www.math.wisc.edu/keisler/calc.html>, 1986.
48. *Klein P., Tirthapura S. , Sharvit D. , Kimia B. B.* A tree-edit-distance algorithm for comparing simple, closed shapes // ACM-SIAM Symp. on Discrete Algorithms, 1999.
49. *Klein Philip N. and Sebastian Thomas B. and Kimia Benjamin B.* Shape Matching Using Edit-Distance: An Implementation // The twelfth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms, p. 781 - 790, 2001.
50. *Klein R., Lingas A.* Fast Skeleton Construction // Proceedings of the 3rd European Symposium on Algorithms, 1995.
51. *D. E. Knuth*, The Art of Computer Programming, // Volume 3: Sorting and Searching.1998. Addison-Wesley Professional, ISBN 0-201-89685-0.

52. *Laika A., Taruttis A. and Stechele W.* SEGMENTATION THROUGH EDGE-LINKING //Proc. Int. Conf. on Imaging Theory and Applications (IMAGAPP'09), Pages 43-49, Lisbon, Portugal, February 2009.
53. *Latecki L. J. and Lakaemper R.* Convexity Rule for Shape Decomposition Based on Discrete Contour Evolution // Computer Vision and Image Understanding Vol. 73, No. 3, March, pp. 441–454, 1999
54. *Lien J.-M. and Amato Nancy M.* Simultaneous Shape Decomposition and Skeletonization // Technical Report TR05-015 Parasol Lab. Department of Computer Science Texas AM University, 2005
55. *Liu T. and Geiger D.* Approximate tree matching and shape similarity // ICCV, 1999.
56. *Pach, János, ed.* Towards a theory of geometric graphs; // Contemp. Math. Vol. 342. Ed. Amer. Math. Soc, 2004.
57. *Pelillo M., Siddiqi K., Zucker S.W.* Matching hierarchical structures using association graphs // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 21(11),1999,1105–1120.
58. *Reingold Edward M., Nievergelt J., Deo N.* Combinatorial Algorithms, Theory and Practice // Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632, 1977, c. 396-402
59. *Rosin Paul L.* Shape Partitioning by Convexity //Proc. of British Machine Vision Conference, 2000.
60. *Sebastian Thomas B., Kimia B. B.* Curves vs skeletons in object recognition // Proceedings of 2001 International Conference of Image Processing(ICIP-2001), Thessaloniki, Grece,vol.3, c. 22-25
61. *Sebastian T. S. , Klein P. N. , Kimia B. B.* Recognition of shapes by editing shock graphs // Internat. Conf. on Computer Vision, vol. I, 2001, pp. 755–762.
62. *Sebastian T. S. , Klein P. N. , Kimia B. B.* Shock-based indexing into large shape databases // Eur. Conf. on Computer Vision, vol. III, 2002, pp. 731–746.
63. *Sharvit D. , Chan J. , Tek H. , and Kimia B. B.* A Symmetry-Based Generative Model for Shape // Journal of Visual Communication and Image Representation, vol. 9, pp. 366-380, December 1998.
64. *Siddiqi K. , Shokoufandeh A., Dickinson S. J., Zucker S. W.* Shock graphs and shape matching // Int. J. Comput. Vision 35 (1) (1999) 13–32.
65. *Simmons M. and Sequin C. H.* 2D Shape Decomposition and the Automatic Generation of Hierarchical Representations //International Journal of Shape Modelling, 1998.
66. *Tanase M.* Shape Decomposition and Retrieval //PhD Thesis, Utrecht University 2005 r.
67. *Tanase M., Veltkamp R. C.* Polygon Decomposition based on the Straight Line Skeleton //SoCG'03, 2003.
68. *Tirthapura S., Sharvit D., Klein P.,Kimia B.B.* Indexing based on edit-distance matching of shape graphs // SPIE Internat. Symp. on Voice, Video, and Data Communications, 1998, pp. 25–36.
69. *Torsello A. and Hancock E. R.* A Skeletal Measure of 2D Shape Similarity // Computer Vision and Image Understanding, vol. 95, no. 1, pp. 1-29, 2004.
70. *Vasanthanayaki C.,Annadurai S.* Flexible Search-Based Approach for Morphological Shape Decomposition 1995.
71. *Vasanthanayaki C.,Annadurai S.* Optimal Morphological Shape Decomposition Scheme //ICGST-GVIP Journal, Volume (5), Issue (7), July 2005.
72. *Serra J.* Analisis and Mathematical Morphology. // London: Academic Press INC., 1982.

73. *Yeong-Chyang Shih, F.*, Threshold Decomposition of gray Scale Morphology into Binary Morphology. // IEEE trans. on pattern analysis, machine intelligence, vol, II/ -№1, January 1989.
74. *JingTing Zeng, Rolf Lakaemper, XingWei Yang, Xin Li* 2D Shape Decomposition Based on Combined Skeleton-Boundary Features //ISVC08(II: 682-691).
75. *Zwicky, F. (1969)*. Discovery, Invention, Research - Through the Morphological Approach. // Toronto: The Macmillian Company.