

Домашняя работа 2: Выпуклые множества и функции

Срок сдачи: 20 октября 2018 (суббота), 23:59

- 1 Пусть K — конус в вещественном векторном пространстве¹. Покажите, что конус K является выпуклым, если и только если он замкнут относительно суммирования, т. е. $x + y \in K$ для всех $x, y \in K$.
- 2 Пусть C — выпуклое множество в вещественном нормированном векторном пространстве. Покажите, что замыкание \bar{C} и внутренность $\text{int}(C)$ множества C также являются выпуклыми.
- 3 Пусть V — вещественное векторное пространство, и пусть $P : V \times \mathbb{R}_{++} \rightarrow V$ — перспективное преобразование $P(x, t) := x/t$. Покажите, что:
 - (a) Если множество $Q \subseteq V \times \mathbb{R}_{++}$ выпуклое в пространстве² $V \oplus \mathbb{R}$, то его образ $P(Q) := \{P(x, t) : (x, t) \in Q\}$ является выпуклым множеством в пространстве V .
 - (b) Если C — выпуклое множество в пространстве V , то его прообраз $P^{-1}(C) := \{(x, t) \in V \times \mathbb{R}_{++} : P(x, t) \in C\}$ является выпуклым конусом в пространстве $V \oplus \mathbb{R}$. (Подсказка: Покажите, что $P^{-1}(C) = \mathbb{R}_{++}Q$ для некоторого выпуклого множества Q .)
- 4 Пусть C и D — множества в вещественном векторном пространстве. Покажите, что:
 - (a) $\text{Conv}(C \cup D) = \text{Conv}(\text{Conv}(C) \cup \text{Conv}(D))$.
 - (b) $\text{Conv}(C \cap D) \subseteq \text{Conv}(C) \cap \text{Conv}(D)$, причем равенство может не достигаться (приведите пример).
- 5 Пусть V и W — вещественные векторные пространства, $A : V \rightarrow W$ — аффинное преобразование, и пусть S — множество в пространстве V . Покажите, что $\text{Conv}(A(S)) = A(\text{Conv}(S))$, т. е. операции взятия выпуклой оболочки и аффинного преобразования коммутируют. Установите отсюда в частности, что если $c \in \mathbb{R}$, то $\text{Conv}(cS) = c \text{Conv}(S)$, и если $b \in V$, то $\text{Conv}(S + b) = \text{Conv}(S) + b$.
- 6 Пусть V и W — вещественные векторные пространства, S и T — множества в пространствах V и W соответственно. Покажите, что $\text{Conv}(S \times T) = \text{Conv}(S) \times \text{Conv}(T)$. Используя это и коммутативность операций взятия выпуклой оболочки и аффинного преобразования, установите, что если $V = W$, то $\text{Conv}(S + T) = \text{Conv}(S) + \text{Conv}(T)$.
- 7 Покажите, что $\text{Conv}\{xx^T : x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\} = \{A \in \mathbb{S}_+^n : \text{Tr}(A) = 1\}$.
- 8 Пусть $n \geq 2$, и пусть $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция $f(X) := \sigma_{\min}(X)$ (наименьшее сингулярное число). Покажите, что функция f не является ни выпуклой, ни вогнутой.
- 9 Пусть E — выпуклое множество в вещественном нормированном векторном пространстве, и пусть $f : \bar{E} \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, определенная на замыкании множества E . Покажите, что если f непрерывная, то из выпуклости сужения $f|_E : E \rightarrow \mathbb{R}$ следует выпуклость f .
- 10 Опираясь на стандартные примеры выпуклых функций и утверждение об операциях, сохраняющих выпуклость, объясните, почему каждая из следующих функций f является выпуклой:
 - (a) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \max\{0, \langle a, x \rangle - b\}$, где $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.
 - (b) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \sum_{i=1}^n c_i \ln(1 + e^{a_i x}) + \frac{\mu}{2} \|x\|^2$, где $\mu, c_1, \dots, c_n \geq 0$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$.
 - (c) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \max_{1 \leq i \leq n} c_i \ln(1 + e^{|x_i|})$, где $c_1, \dots, c_n \geq 0$.
 - (d) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \ln(\sum_{i=1}^n e^{\max\{0, x_i\}})$.
 - (e) $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ — функция $f(x) := -\ln \text{Det}(B - x_1 A_1 - \dots - x_n A_n)$, где $A_1, \dots, A_n, B \in \mathbb{S}^n$, $E := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 A_1 + \dots + x_n A_n \prec B\}$.

¹Напомним, что множество K в вещественном векторном пространстве называется конусом, если $tx \in K$ для всех $x \in K$ и всех $t > 0$.

²Здесь и далее для двух пространств V и W символ $V \oplus W$ обозначает прямое произведение этих пространств, т. е. множество $V \times W$ с естественными операциями суммы, нормы и т. д.

- 11 Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \sum_{i=1}^k x_{[i]}$, где $1 \leq k \leq n$, а символ $x_{[i]}$ обозначает i -ую компоненту отсортированного по убыванию вектора x . Покажите, что функция f выпуклая. (Подсказка: Представьте f в виде максимума линейных функций.)

Бонусные задачи

- 1 Пусть V и W — вещественные векторные пространства. Пусть $A : V \rightarrow W$ и $\lambda : V \rightarrow \mathbb{R}$ — аффинные преобразования, $E := \{x \in V : \lambda(x) > 0\}$, и пусть $F : E \rightarrow W$ — дробно-аффинное преобразование $F(x) := A(x)/\lambda(x)$. Покажите, что если $Q \subseteq E$ и S — выпуклые множества в пространствах V и W соответственно, то их образ $F(Q) := \{F(x) : x \in Q\}$ и прообраз $F^{-1}(S) := \{x \in E : F(x) \in S\}$ также являются выпуклыми множествами. (Подсказка: Используйте ранее доказанное свойство про перспективное преобразование и тот факт, что образ и прообраз при аффинном преобразовании переводят выпуклое множество в выпуклое.)
- 2 Пусть C — множество в вещественном нормированном векторном пространстве V , и пусть $x_0 \in C$. Направление $d \in V$ называется *рецессивным направлением множества C в точке x_0* , если $x_0 + td \in C$ для всех $t > 0$. Множество всевозможных рецессивных направлений C в точке x_0 называется *рецессивным конусом множества C в точке x_0* и обозначается $\text{Rec}_{x_0}(C)$. Покажите, что если множество C выпуклое и замкнутое, то рецессивный конус множества C является одинаковым в любой точке, т. е. $\text{Rec}_x(C) = \text{Rec}_{x_0}(C)$ для всех $x \in C$. (Таким образом, можно говорить о *рецессивном конусе $\text{Rec}(C)$ множества C* без необходимости указания точки x_0 .)
- 3 Покажите, что множество $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle Px, x \rangle \leq \langle c, x \rangle^2; \langle c, x \rangle \geq 0\}$, где $P \in \mathbb{S}_{++}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, является выпуклым. (Подсказка: Используйте свойство о том, что прообраз выпуклого множества при аффинном преобразовании является выпуклым множеством.)
- 4 Покажите выпуклость функции

$$f(x) := \frac{1}{x_1 - \frac{1}{x_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{x_n}}}}$$

определенной на подмножестве \mathbb{R}^n , где каждый знаменатель строго положительный. (Подсказка: Используйте индукцию и утверждение об операциях, сохраняющих выпуклость.)

- 5 Пусть E — множество в вещественном векторном пространстве V , и пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Пусть $G := \{(x, t) \in V \times \mathbb{R}_{++} : x/t \in E\}$, и пусть $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ — перспективная функция $g(x, t) := tf(x/t)$. Покажите, что g выпуклая. (Подсказка: Рассмотрите надграфик функции g .)
- 6 Пусть V и W — вещественные векторные пространства, E — непустое множество в пространстве $V \oplus W$, пусть $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ — ограниченная снизу выпуклая функция. Пусть $G := \{x : (x, y) \in E\}$ — проекция множества E на пространство V , и пусть $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ — маргинальная функция $g(x) := \inf_{y \in W : (x, y) \in E} f(x, y)$. Покажите, что g выпуклая.