

Домашнее задание 3. Вариационный вывод

Курс: Байесовские методы в машинном обучении, осень 2015

Пусть $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N\}$, $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^D$ – независимая выборка из смеси распределений Стьюдента

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^K w_k \mathcal{T}(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}_k, \Sigma_k, \nu), \quad w_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^K w_k = 1. \quad (1)$$

Рассмотрим следующую вероятностную модель со скрытыми переменными:

$$p(X, T, Z | \mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}, \Sigma, \nu) = \prod_{n,k=1}^{N,K} \left[w_k \mathcal{N}(\mathbf{x}_n | \boldsymbol{\mu}_k, \Sigma_k / z_n) \mathcal{G}(z_n | \nu/2, \nu/2) \right]^{t_{nk}}. \quad (2)$$

Здесь $t_{nk} \in \{0, 1\}$, $\sum_j t_{nj} = 1$ обозначает принадлежность n -го объекта k -ой компоненте смеси. Очевидно, что неполное правдоподобие $p(X | \mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}, \Sigma, \nu)$ для модели (2) совпадает с правдоподобием выборки X для смеси (1). Поэтому оценки максимального правдоподобия $w_{ML,k}, \boldsymbol{\mu}_{ML,k}, \Sigma_{ML,k}$ для смеси (1) можно искать с помощью вариационного EM-алгоритма для модели (2), в котором на E-шаге апостериорное распределение приближается в семействе

$$q_T(T) q_Z(Z) \approx p(T, Z | X, \mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}, \Sigma, \nu).$$

Для выполнения задания требуется:

1. Выписать формулы пересчёта для компонент вариационного приближения $q_T(T)$ и $q_Z(Z)$;
2. Выписать формулы пересчёта параметров $w_k, \boldsymbol{\mu}_k, \Sigma_k$ на M-шаге. Убедиться, что эти формулы переходят в соответствующие формулы из семинара по EM-алгоритму для случая $K = 1$;
3. Расписать функционал $\mathcal{L}(q, \mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ – нижнюю оценку на $\log p(X | \mathbf{w}, \boldsymbol{\mu}, \Sigma, \nu)$;
4. Найти формулы для статистик распределений $q_T(T)$ и $q_Z(Z)$, требуемых в предыдущих трёх пунктах.