Задачи для подготовки к контрольной работе по курсу «прикладная алгебра»

1. Записать таблицу сложения и умножения для
   (a) поля $\mathbb{F}_3^2 = \mathbb{F}_3[x]/(x^2 - x + 2)$;
   (b) кольца $\mathbb{F}_2[x]/(x^3+x^2+x+1)$; по построенным таблицам убедиться, что данное кольцо не является полем.
2. Для всех ненулевых элементов поля построить таблицу соответствий между полиномиальным представлением и степенным представлением для некоторого примитивного элемента α:
   (a) Рассмотреть поле $\mathbb{F}_2^4 = \mathbb{F}_2[x]/(x^4+x^3+1)$. С помощью построенной таблицы вычислить значение полинома $w(x) = \alpha x^{10} + (\alpha^{11} + \alpha^{13})x^6 + \alpha^2 \in \mathbb{F}_2^4[x]$ в точке α;
   (b) Рассмотреть поле $\mathbb{F}_5^2 = \mathbb{F}_5[x]/(x^2 - 2x + 3)$. С помощью построенной таблицы вычислить $\frac{\alpha^{32}+\alpha^{12}}{\alpha^2+\alpha^5}$.
3. Найти порядок элемента $x^3 + x$ в поле $\mathbb{F}_2[x]/(x^4 + x + 1)$ без перебора по всем степеням элемента.
4. В фактор-кольце $\mathbb{F}_2[x]/(x^4 + 1)$ найти все элементы главного идеала:
   (a) идеал $(x + 1)$;
   (b) идеал $(x^2 + x + 1)$.
5. Найти общее число неприводимых многочленов степени n над $\mathbb{F}_p$ для случаев:
   (a) $n = 11, p = 5$;
   (b) $n = 12, p = 3$.
6. Найти все неприводимые многочлены степени 2 над $\mathbb{F}_5$.
7. В поле $\mathbb{F}_5^5 = \mathbb{F}_5[x]/(x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 2)$ с помощью расширенного алгоритма Евклида найти обратный элемент для $x^3 + 4x^2 + 3$.
8. С помощью расширенного алгоритма Евклида решить сравнение
$$(x^4 + x^3 + x^2 + 1)f(x) \equiv x^2 + x \mod x^3 + 1$$
9. В поле $\mathbb{F}_5^3 = \mathbb{F}_5[x]/(x^3 + x^2 + 1)$ решить следующую СЛАУ (найти $a(x), b(x) \in \mathbb{F}_5^3$):
$$\begin{aligned}&(x^2 + x)a(x) + b(x) = 4x^2 + 1,\\ &(2x^2 + x + 1)a(x) + (3x^2 + 1)b(x) = x + 1.\end{aligned}$$
10. В поле $\mathbb{F}_2^3 = \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ найти общее решение для СЛАУ
$$\begin{aligned}&(x^2 + 1)a(x) + (x + 1)b(x) + (x^2 + x)c(x) = x^2,\\ &(x + 1)a(x) + b(x) + (x^2 + x + 1)c(x) = x.\end{aligned}$$
    Записать три частных решений данной СЛАУ.

11. Разложить на неприводимые множители следующие многочлены:

    (a) $f(x) = x^5 + x^4 + 1$ над $\mathbb{F}_2$;

    (b) $f(x) = x^5 + 3x^3 + 2x^2 + 1$ над $\mathbb{F}_5$;

    (c) $f(x) = x^{26} - 1$ над $\mathbb{F}_3$.

12. Построить изоморфизм между полями $F_1 = \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x + 1)$ и $F_2 = \mathbb{F}_2[x]/(x^3 + x^2 + 1)$. С помощью найденного изоформизма найти образы для $x^2 + x + 1 \in F_1$ в F_2 и $x^2 + 1 \in F_2$ в F_1.

13. Найти минимальное поле характеристики p, в котором многочлен разлагается на линейные множители:

    (a) $p = 3$, $f(x) = x^2 + 2x + 2$;

    (b) $p = 2$, $f(x) = x^{21} + 1$;

    (c) $p = 2$, $f(x) = x^5 + x^4 + 1$.

14. Найти минимальное поле характеристики 3, в котором многочлен $x^3 + x + 2 \in \mathbb{F}_3[x]$ раскладывается на линейные множители. В данном поле найти все корни этого многочлена.

15. Линейный код задан своей проверочной матрицей

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

    Требуется найти минимальное расстояние кода d, построить порождающую матрицу кода G для систематического кодирования, а также осуществить систематическое кодирование для векторов $\boldsymbol{u}_1 = [1\ 1\ 0]^T$, $\boldsymbol{u}_2 = [1\ 0\ 1]^T$.

16. Доказать, что линейный (9, 3)-код, заданный порождающим многочленом $g(x) = x^6 + x^3 + 1$, является циклическим. С помощью данного кода осуществить систематическое кодирование для полиномов $u_1(x) = x^2 + 1$ и $u_2(x) = x + 1$.

17. Рассмотрим код Хэмминга с параметрами $n = 7, k = 4$ с порождающим многочленом $g(x) = x^3 + x^2 + 1$. Требуется декодировать принятый полином $w(x) = x^6 + x^3 + x^2$:

    (a) с помощью алгоритма декодирования для кодов Хэмминга;

    (b) с помощью общего алгоритма декодирования БЧХ кода.