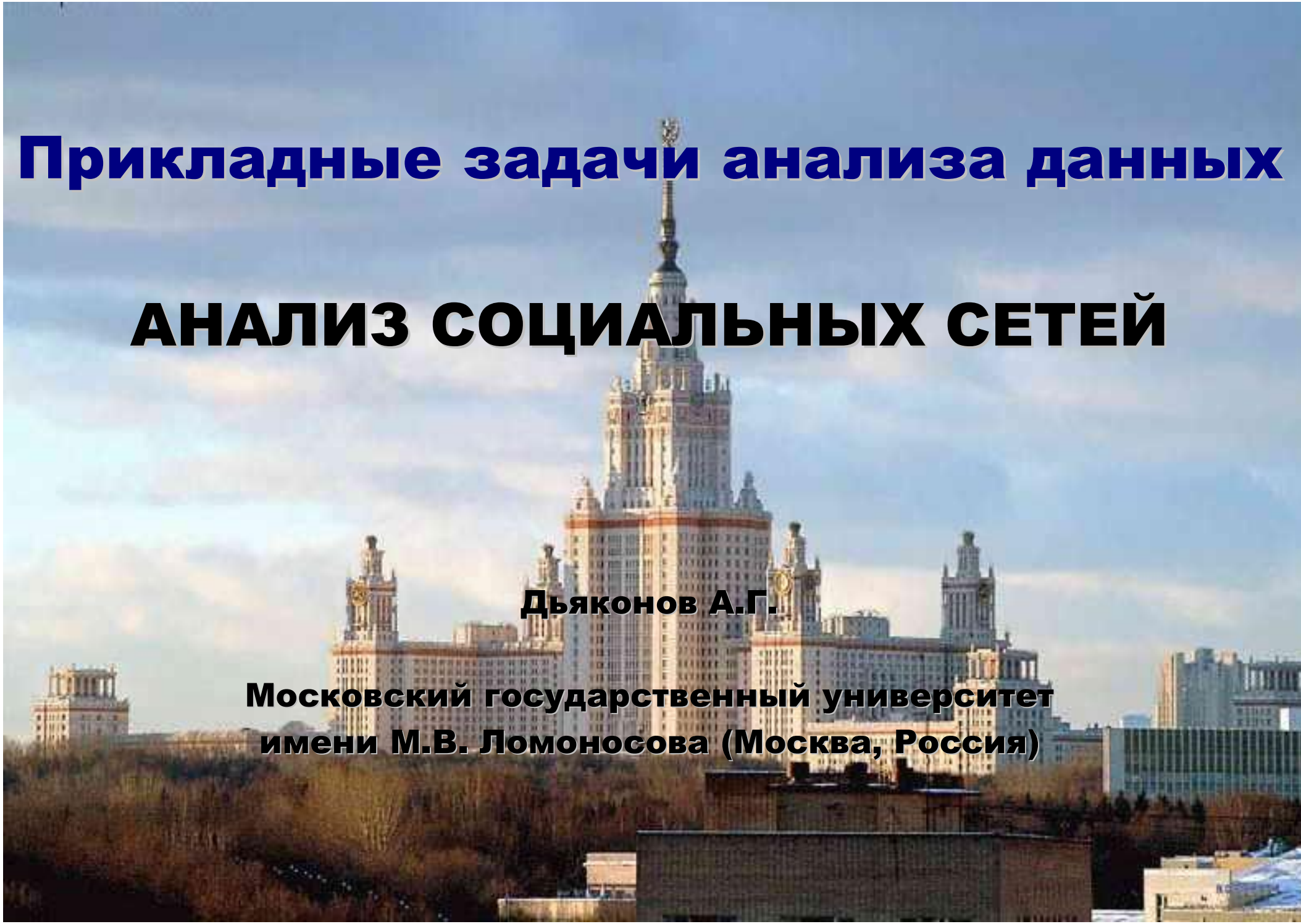


Прикладные задачи анализа данных

АНАЛИЗ СОЦИАЛЬНЫХ СЕТЕЙ

Дьяконов А.Г.

Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)

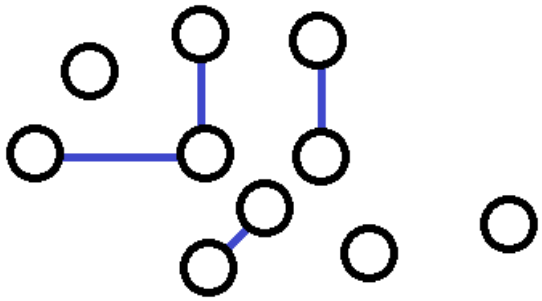
Исследование социальных сетей

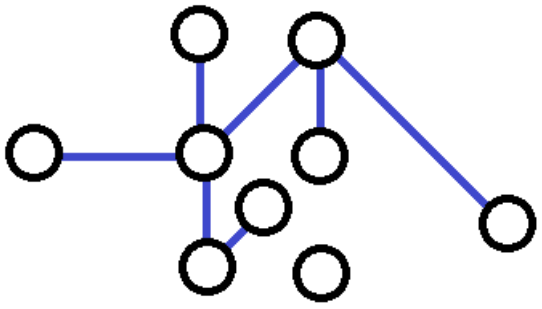
Социальная сеть – динамический граф (пример: мобильная сеть)

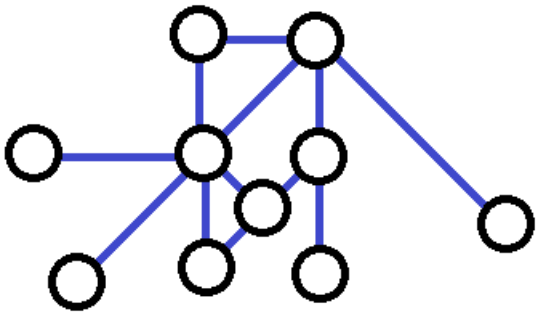
Вершины – пользователи (и группы)

Рёбра – дружба (членство) / связи, отношения

Кластеры – сообщества







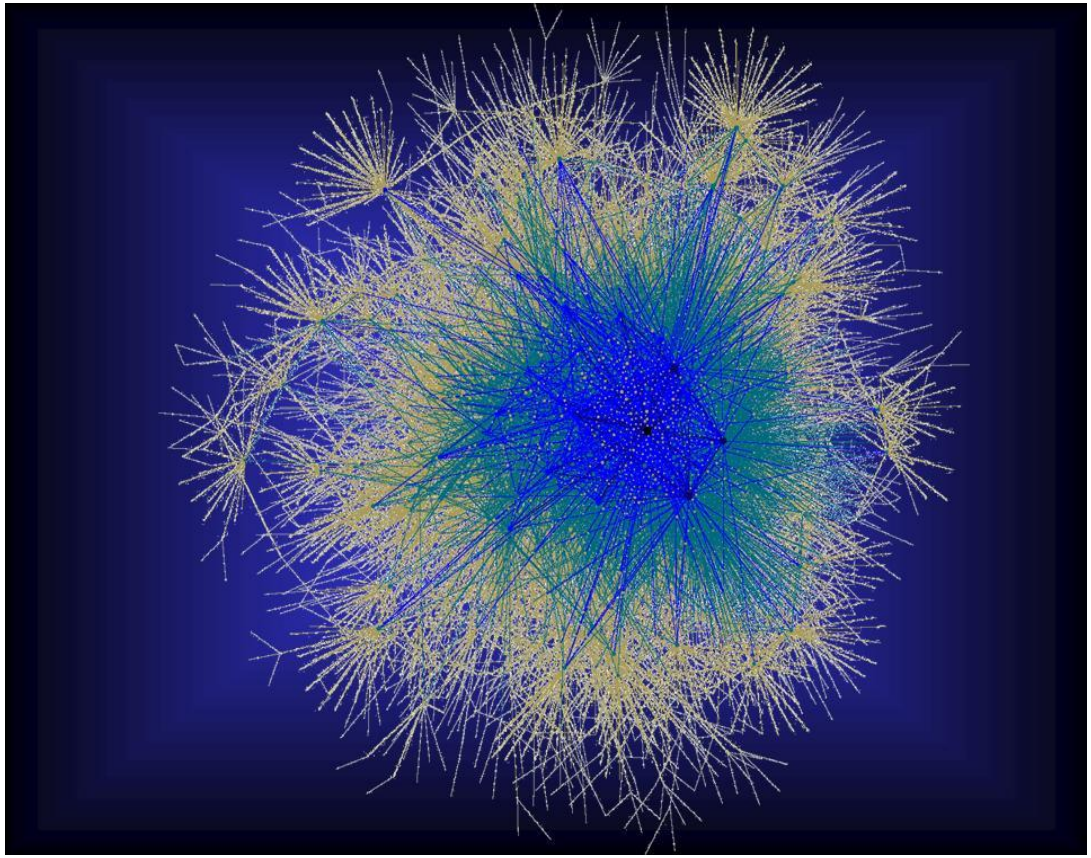
Примеры соцсетей:

- «классические» (Facebook, vk, Одноклассники)
- мобильные сети
- научные сообщества (связь по публикациям)
- почтовые (связь по отправке писем)
- интернет-магазин (связь по одинаковым купленным товарам)
- даже сам интернет

Какие здесь графы?

Какие задачи здесь актуальны (возможны)?

Картинки с графами

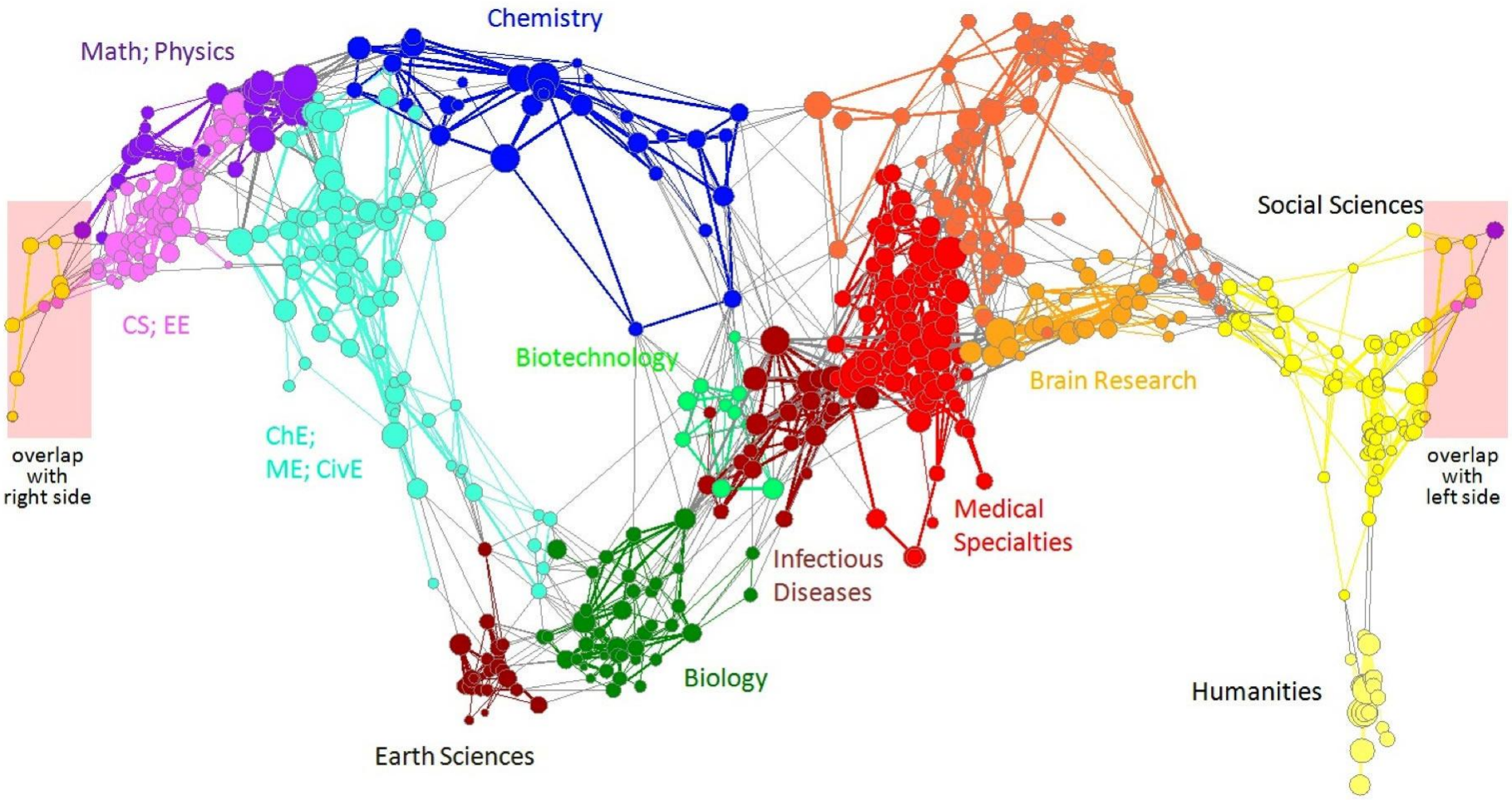


graph of the BGP (Gateway Protocol) web graph, consisting of major Internet routers (6400 вершин, 13000 рёбер)

Ross Richardson, Fan Chung Graham

Примеры графов

Граф цитирований



Börner и др.

Задачи с социальными сетями

- **Анализ поведения пользователей**
  - выявление аккаунтов-дубликатов
  - пользователей нарушающих, склонных нарушать правила, не похожих на других
- **Прогнозирование**
  - поведения пользователей (когда будет пользоваться услугами, в какую группу вступит, с кем подружится)
  - предсказание и предотвращение ухода пользователей
  - предсказание трафика (в каком объёме будет скачивать/закачивать)
- **Рекомендация**
  - предсказание эффективности действия рекламы для конкретного пользователя
  - формирование таргетированных предложений (рекламы, по вступлению в группы, заполнению профиля и т.п.)

Задачи с социальными сетями

- **Кластеризация**
  - разбиение пользователей на группы (для более корректного A/B-тестирования, разработки стратегий под группы, более тщательного анализа аудитории)
  - выявление «кругов общения пользователей» (друзей, которых объединяет некоторая сущность, например «друзья по вузу»)
  - выделение сообществ
  - выделение базисов источников информации в блогосфере
- **Взаимодействие с другими соцсетями/ресурсами**
  - матчинг сетей/графов (установление соответствия между пользователями одной сети и другой)
  - использование данных соцсети для решения задач других заказчиков
    - скоринг (оценка заёмщика) - в банках
    - персональные рекомендации - в интернет-магазинах
    - таргетированная реклама - в рекламе, СМИ (таргетированные новости)

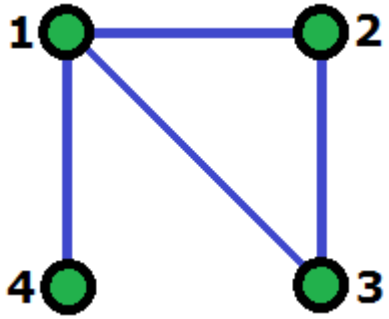
Задачи с социальными сетями

- **Анализ текстов**
  - обнаружение недопустимых текстов (оскорблений, рекламы, нарушения закона и т.п.)
  - анализ общественного мнения по постам
  - анализ лояльности к брендам по постам
- **Визуализация**
  - поиск закономерностей в данных соцсети и их представление анализ общественного мнения по постам
  - научные исследования графов соцсетей

ДЗ: придумать свои задачи!

Основные понятия теории графов

Граф



матрица сопряжённости

	1	2	3	4
1		1	1	1
2	1		1	
3	1	1		
4	1			

как правило разреженная

диагональная матрица степеней

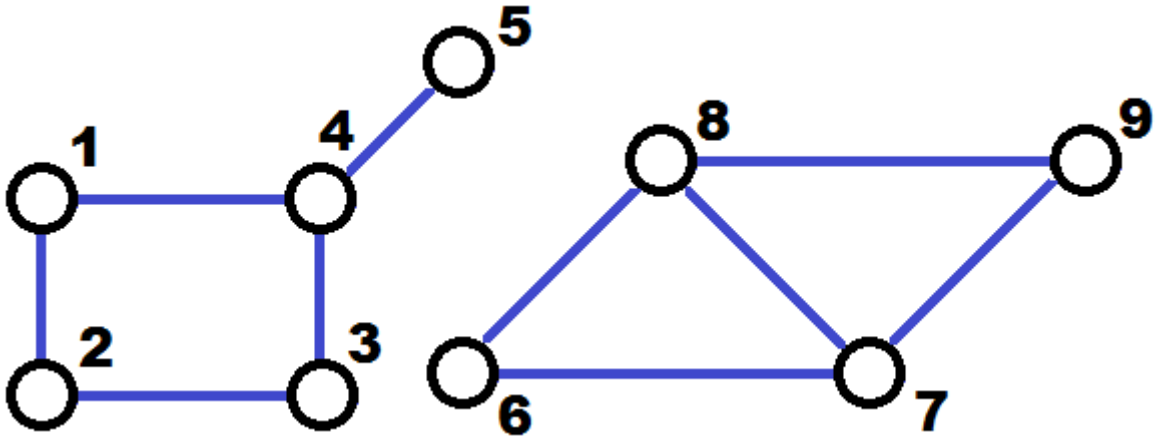
	1	2	3	4
1	3			
2		2		
3			2	
4				1

матрица Лапласа

	1	2	3	4
1	3	-1	-1	-1
2	-1	2	-1	
3	-1	-1	2	
4	-1			1

Основные понятия теории графов

Неориентированные



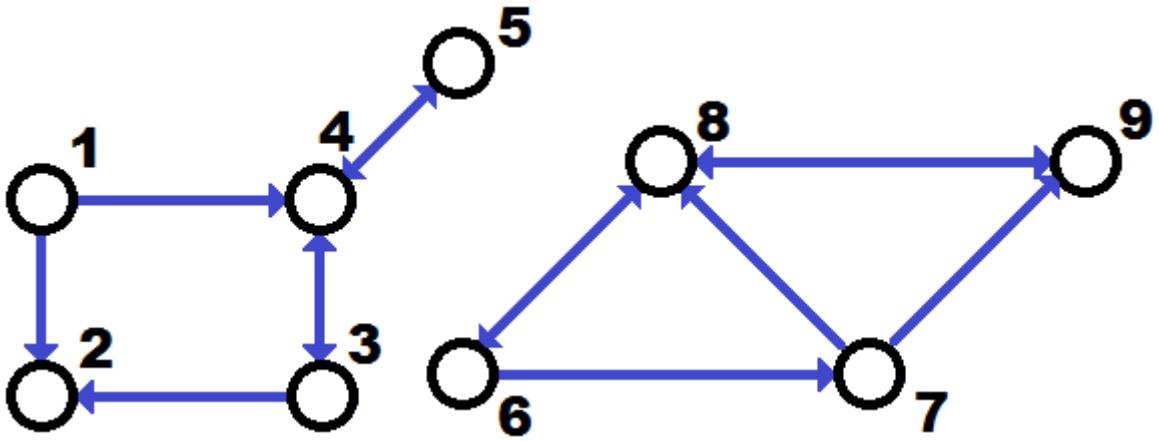
соседство

окрестности

степень

входящая/исходящая степень

Ориентированные (где они возникают?)



связные компоненты

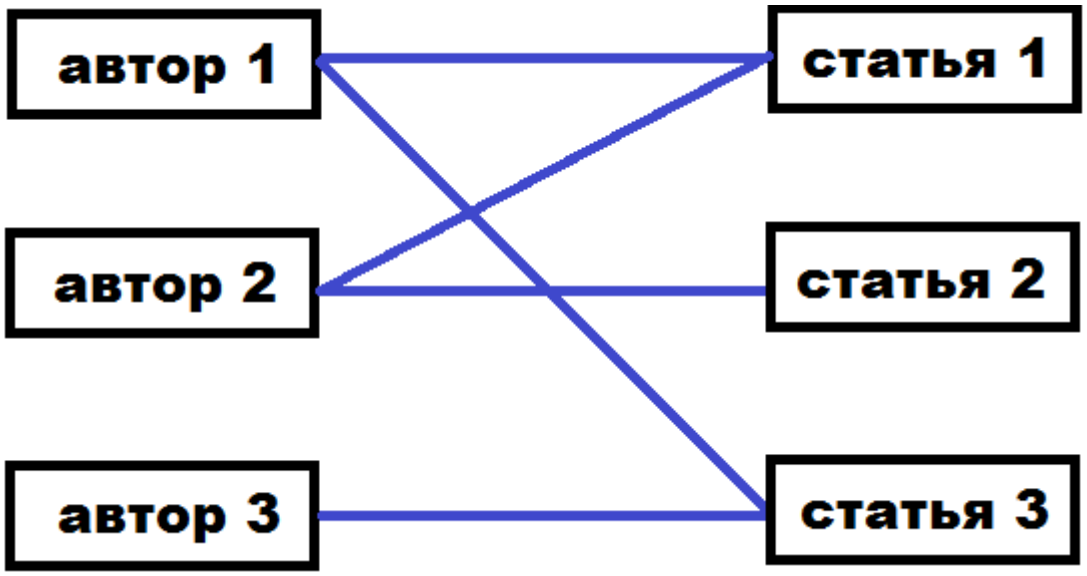
клика

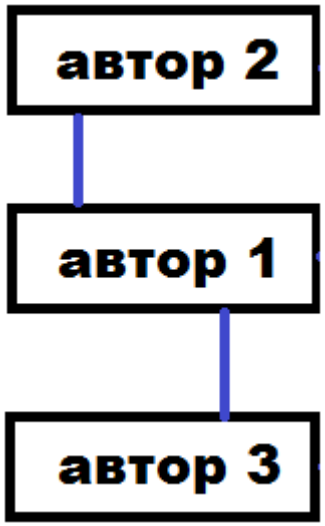
максимальная клика

+ взвешенные графы

Основные понятия теории графов

Двудольные графы





Научные сообщества

Граф цитирования (ориентированный)

Граф соавторства (неориентированный/двудольный)

Граф сходства статей (с весами)

Понятие сложной сети

1. Специальные распределения (степеней вершин)
2. Модель «малого мира» (малый диаметр и т.п.)
3. Высокий коэффициент кластеризации
4. Разреженность

Complex network

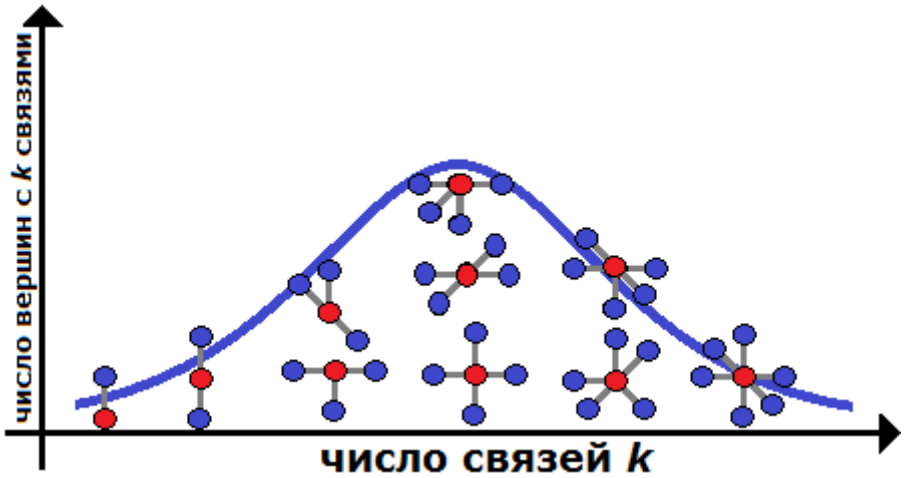
1. Power law degree distribution
2. Small diameter and average path length: "small world"
3. Hight clustering coefficient
4. Sparcity

1. Распределение вершин

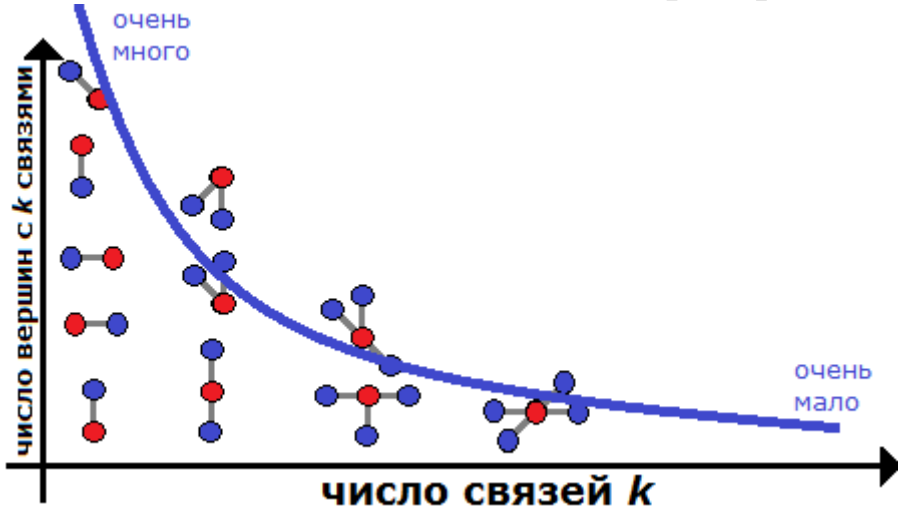
Безмасштабные (scale-free) сети – сети, в которых степени вершин распределены по степенному закону:

доля вершин с k связями ~ $k^{-\gamma}$, обычно $2 < \gamma < 3$.

Случайный граф

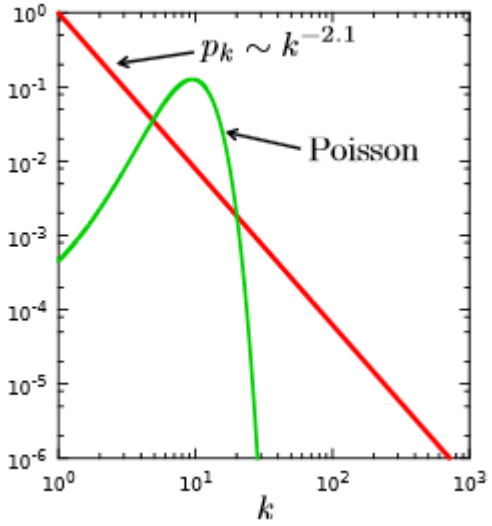


Безмасштабный граф



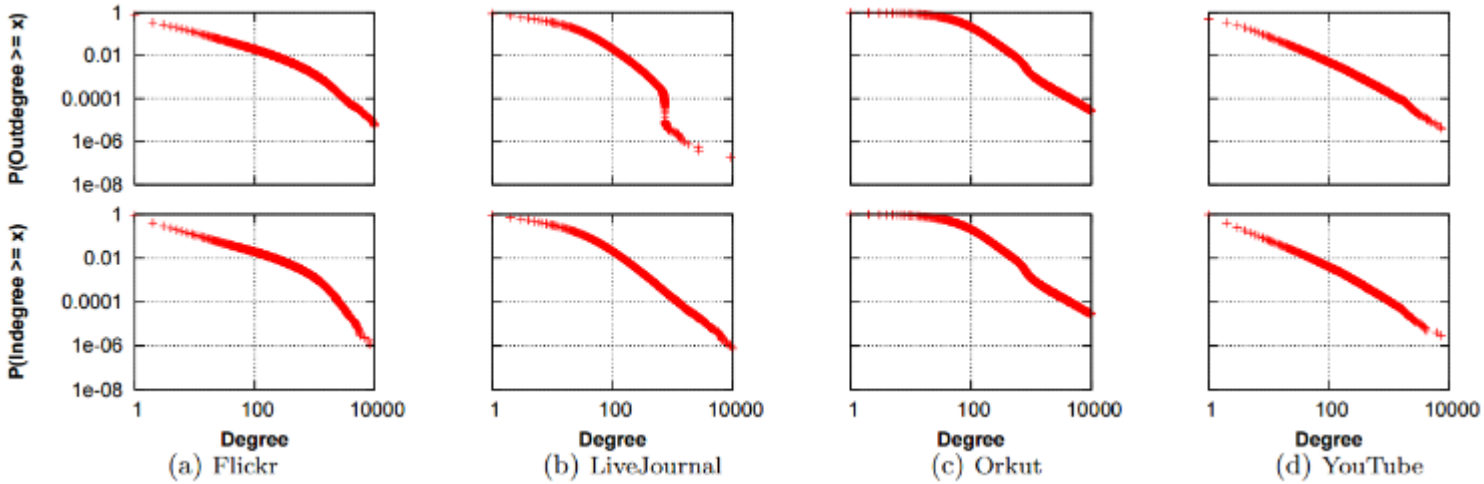
M.E.J. Newman Power laws, Pareto distributions and Zipf's law // Contemporary Physics, pages 323–351, 2005

1. Распределение вершин



http://barabasi.com/networksciencebook/

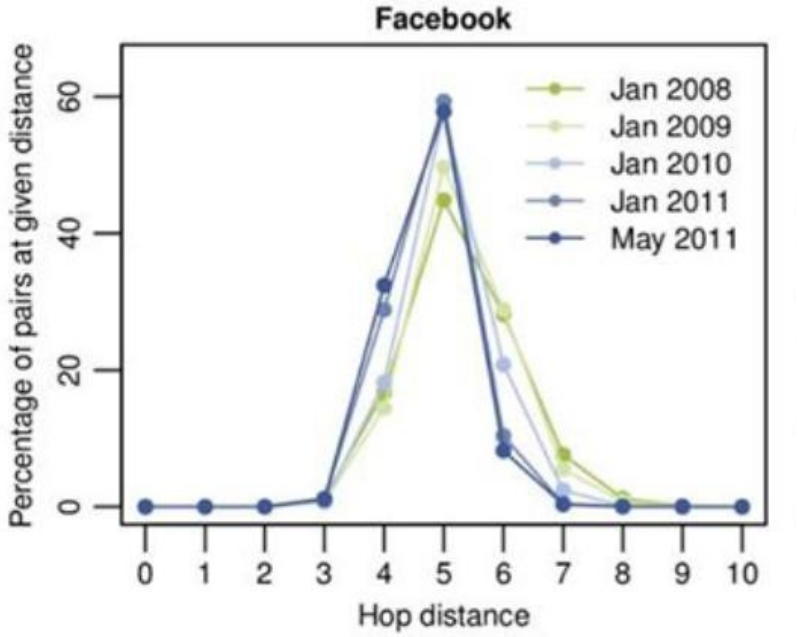
В логарифмической шкале



источник?

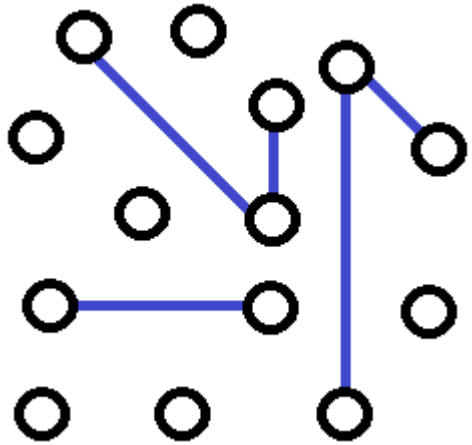
2. Модель малого мира

Граф	Среднее расстояние между вершинами
Граф почтовых рассылок (D. Watts, 2001, 48000 вершин)	6
Граф сообщений в MSN Messenger (J. Lescovec и др. 2007, 240 млн. вершин)	6.6
Граф Фейсбука (L. Backstrom и др. 2012, 720 млн. вершин)	4.74

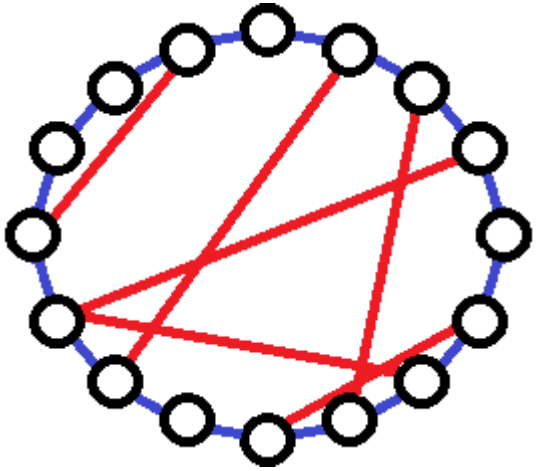


2. Модель малого мира

Генерация случайных графов: модель Эрдёша–Реньи



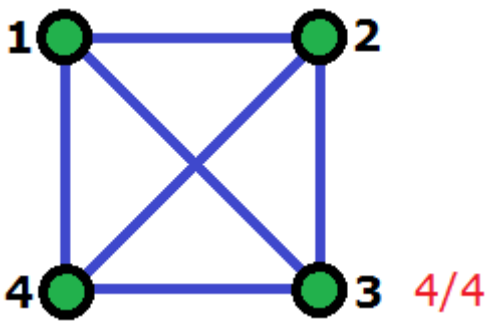
Генерация случайных графов: модель малого мира



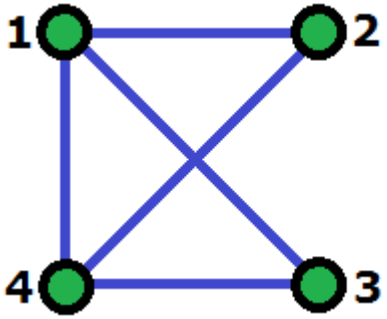
3. Коэффициент кластеризации (полноты)

1. Глобальный

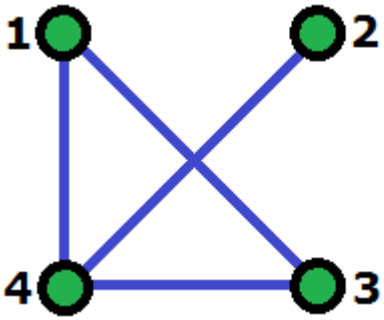
1.1. число треугольников / возможное число (число линий из трёх точек)



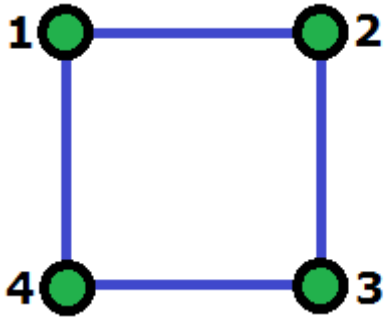
4/4



2/4



1/4



0/4

1.2. Среднее локальных коэффициентов

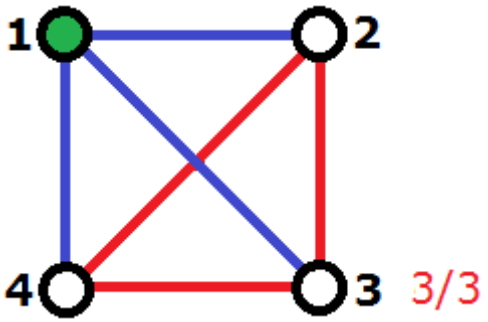
Внимание! Это признак;)

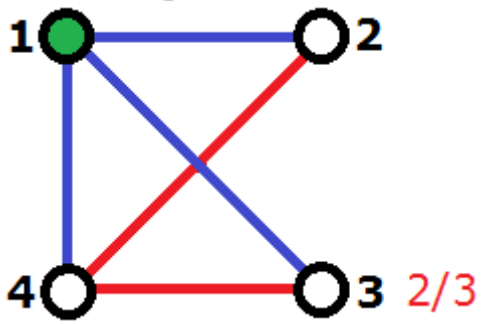
3. Коэффициент кластеризации (clustering coefficient)

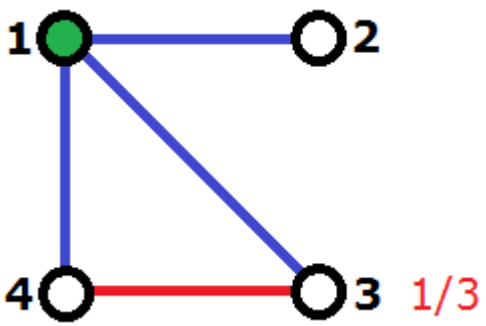
2. Локальный

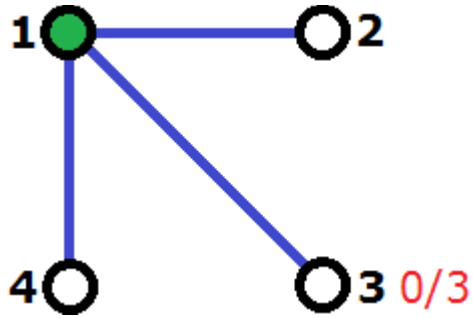
для вершины = насколько её соседи близки к образованию клики

число связей у соседей / число возможных связей

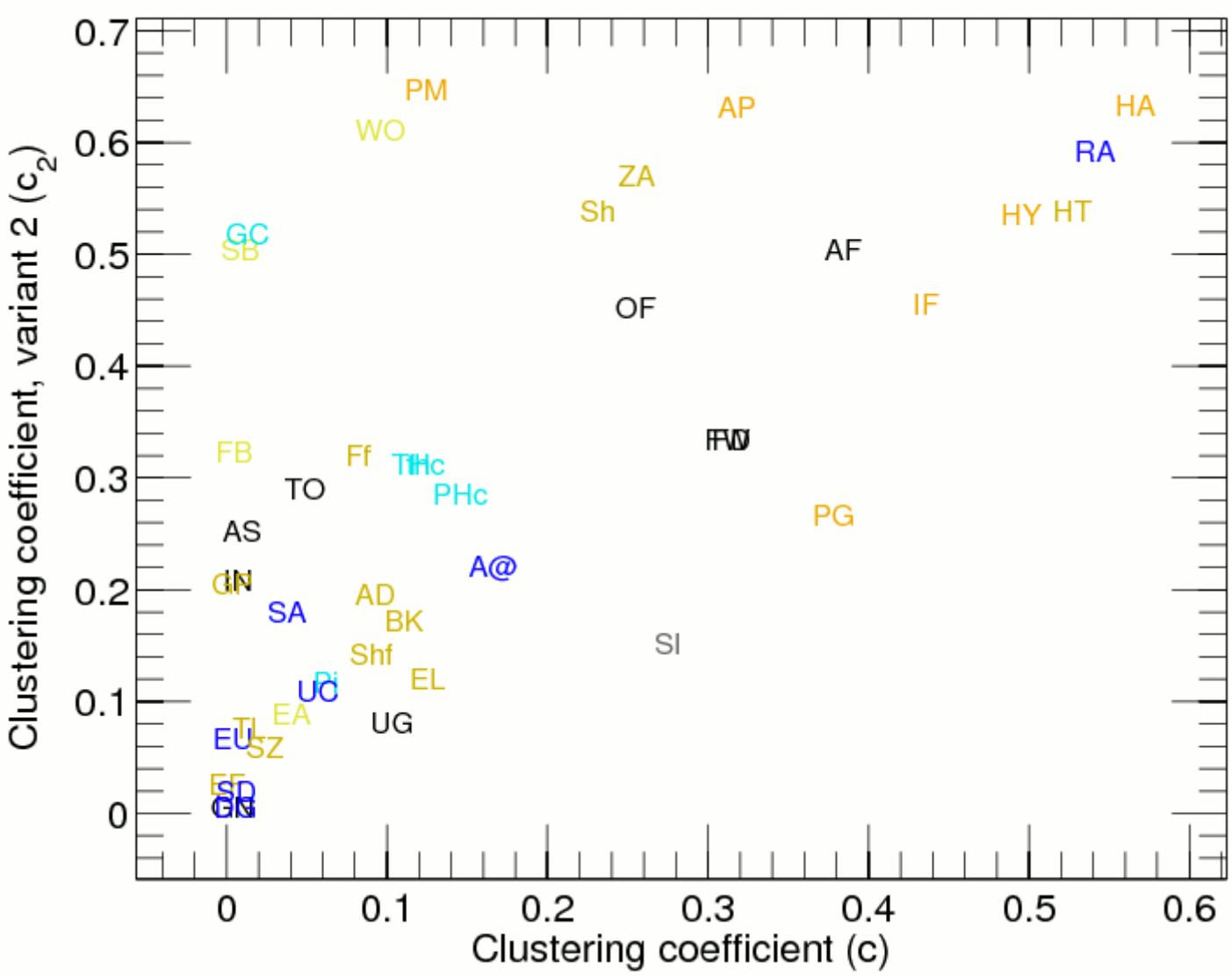








3. Коэффициент кластеризации



Два способа определения коэффициента кластеризации

https://networkscience.wordpress.com/

4. Разреженность

Большинство реальных графов – разреженные (sparse).

Данные	Число вершин	Средняя степень
WWW (Stanford-Berkeley)	319,717	9.65
Social networks (LinkedIn)	6,946,668	8.87
Communication (MSN IM)	242,720,596	11.1
Coauthorships (DBLP)	317,080	6.62
Internet (AS-Skitter)	1,719,037	14.91
Roads (California)	1,957,027	2.82
Proteins (S. Cerevisiae)	1,870	2.39

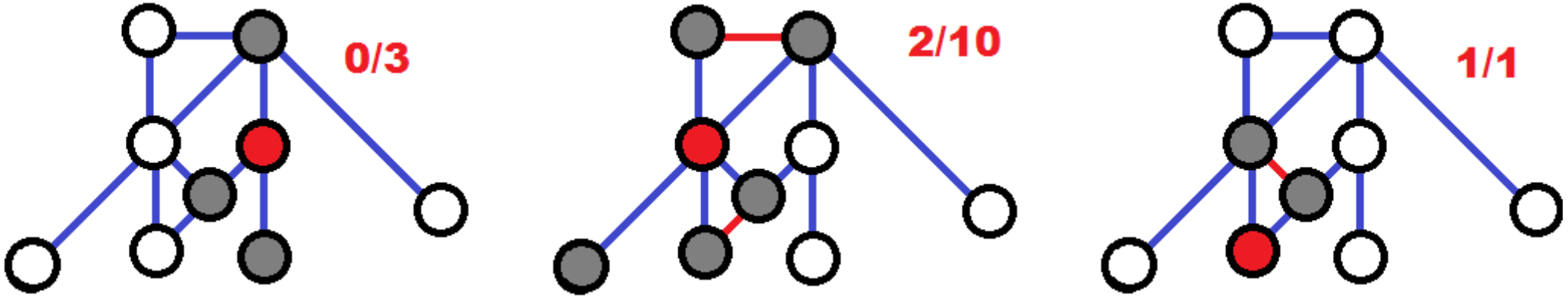
из Leskovec et al., Internet Mathematics, 2009

Часто графы просто погружают в признаковое пространство...

и граф превращается в вектор

Пример признака (уже был)

Коэффициент полноты (clustering coefficient)



что такое 10?

характеризует полноту его-графа одной вершины

(~ окрестность первого порядка)

Как интерпретировать?

В чём недостаток?

Как исправить?

Недостатки

лучше использовать в сочетании с другими признаками (например, число соседей)

Это типично для признаков на графе!

Как придумать признак для всего графа (а не отдельной вершины)?

Как придумать признаки для всего графа

Признак графа – функция от признаков вершин (рёбер, …)

Любая функция!

- **сумма**
- **среднее**
- **максимум**
- **минимум**
- **медиана**
- **сумма квадратов**

и т.п.

Сходство вершин

Часто надо измерить сходство двух вершин/рёбер/подграфов

Какие бывают похожести?

Что значит, что вершины похожи?

Важность вершин

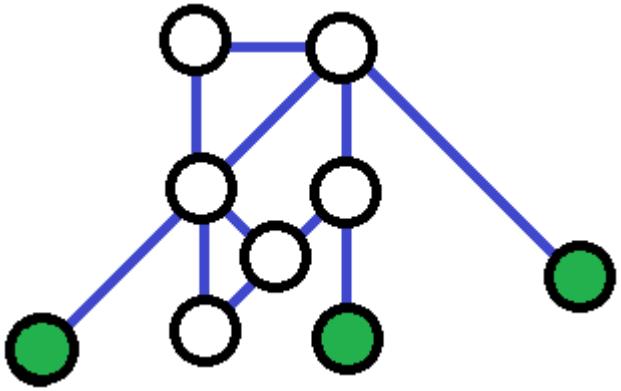
Часто надо измерить особенность вершины/ребра/подграфа

Например, для поиска непохожих вершин, влиятельных блогеров

Какие вершины считать «важными»?

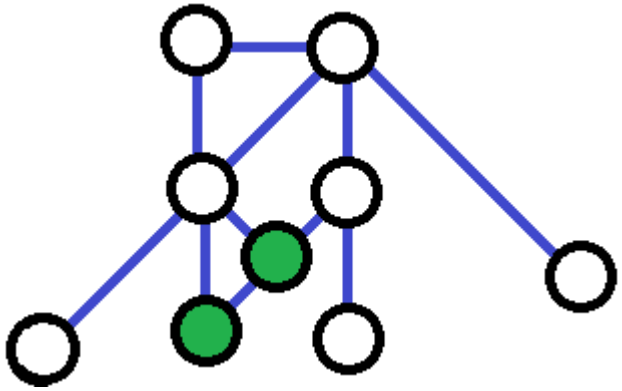
Сходство вершин

1. Формальная (по характеристикам)



По информации о членах соцсети: в одной группе института, одни интересы, участвовали в одном мероприятии

2. По близости

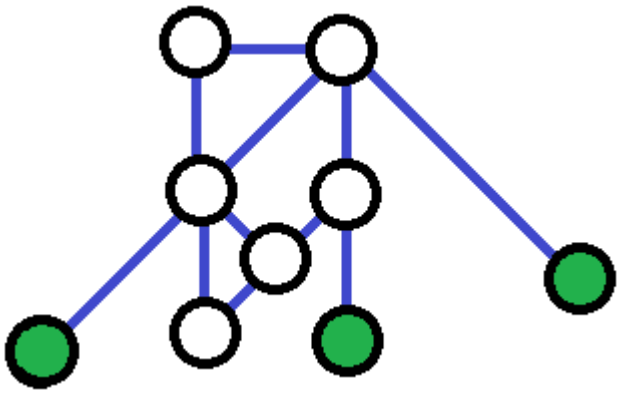


Два близких друга, близнецы

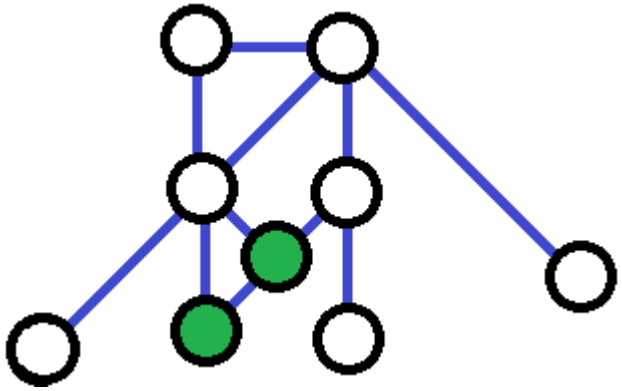
Как определить эти похожести на практике?

Сходство вершин

1. Формальная (по характеристикам)



2. По близости



Как измерить?

Погружение в признаковое пространство

Вычисление сходства в нём

Оценка расстояния на графе

Важность

Какие вершины считать важными?

- **По отдельным признакам (например, много соседей)**
- **По рекурсии (важная вершина соединена с важными)**

Пример важности – центральность вершины (сейчас рассмотрим)

Кстати, а что такое граф? С точки зрения реализации

Очень полезно

Любой объект имеет много представлений (подпространство, многогранник и т.п.)

1. **С точки зрения определения**

2. **С точки зрения реализации**

Разреженная матрица

Объекты (пользователи) – строки/столбцы

Аппарат линейной алгебры

3. **С точки зрения сути**

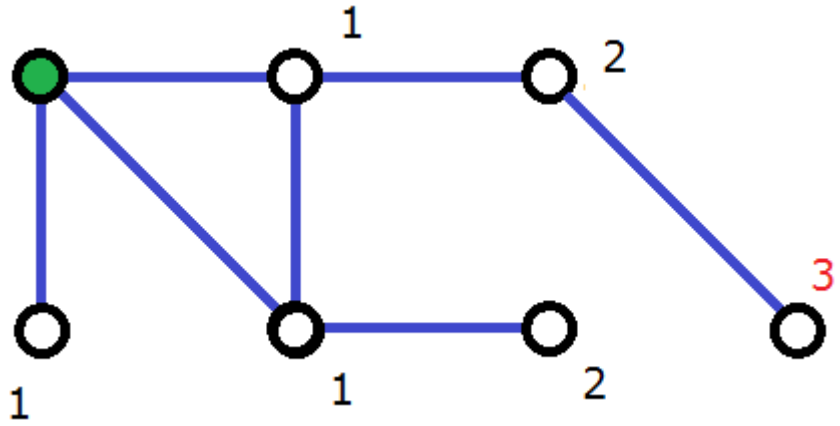
Это формализация отношений

Важны окрестности большого порядка, их свойства, связи, не всё может быть отражено в графе

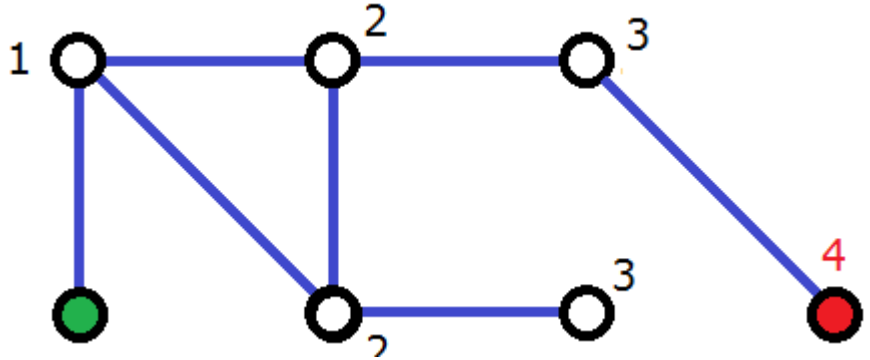
Центральность вершины в графе

Эксцентриситет – вершины v

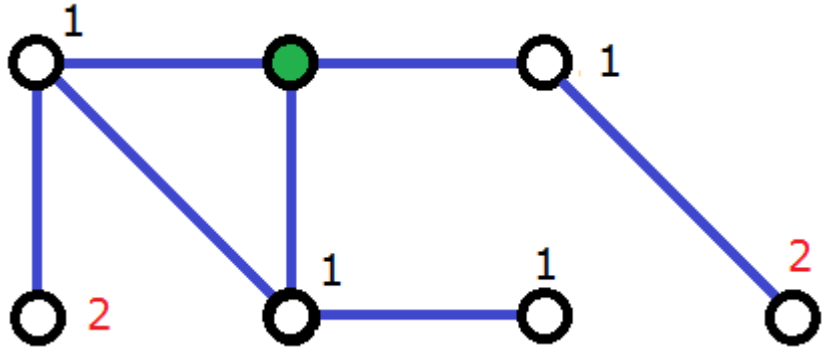
$$\varepsilon(v) = \max_{u \in V} d(u,v)$$



Диаметр – максимальный эксцентриситет



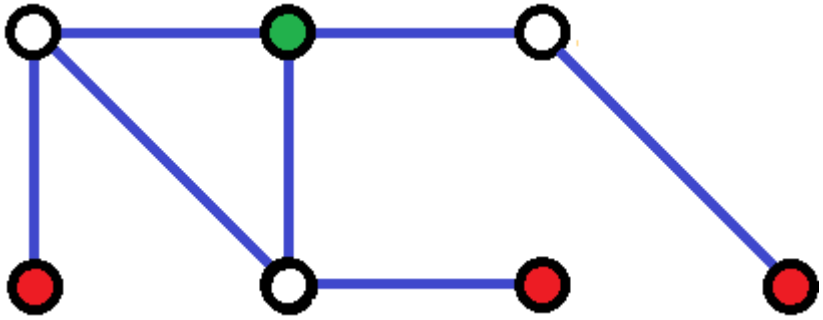
Радиус – минимальный эксцентриситет



Вершина графа центральная,
если её эксцентриситет равен радиусу графа.

Центр – множество центральных точек

Периферия – множество точек с максимальным эксцентриситетом



Интересная терминология

Степенная центральность (Degree centrality) – число соседей

$$k_{\text{in}} = A\tilde{1}$$
$$k_{\text{out}} = A^{\text{T}}\tilde{1}$$
$$a_{ij} \sim (j \to i)$$

ij-й элемент ~ дуга из j в i

Центральность по близости (Closeness centrality) – $\sum_{u \neq v} \frac{1}{d(u,v)}$

Центральность по путям (Betweenness centrality) – число (доля) кратчайших путей, проходящих через эту вершину

Собственная центральность (Eigenvector centrality) –

центральность вершины зависит от центральности соседей

$$c_i = \sum_j a_{ij} c_j$$

$$N = AD^{-1}$$

$$Nx = x$$

max с.з. = 1

собственный вектор ~ max с.з.

Метод:

- **вычисление собственных векторов**
- **взятие вектора с максимальным собственным значением**
- **его значения – центральности вершин**

дальнейшая модификация ~ см. PageRank

Katz

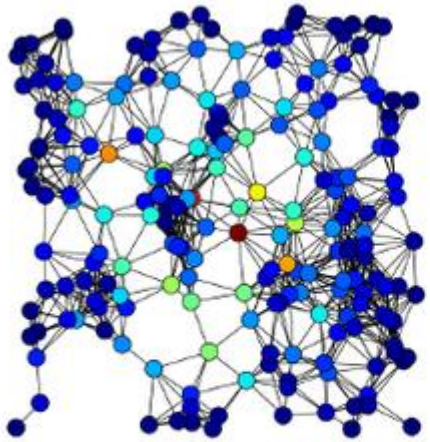
взвешенная сумма путей, приходящих в вершину.

Путь длины k берём с коэффициентом β^k, $\beta \in [0,1]$

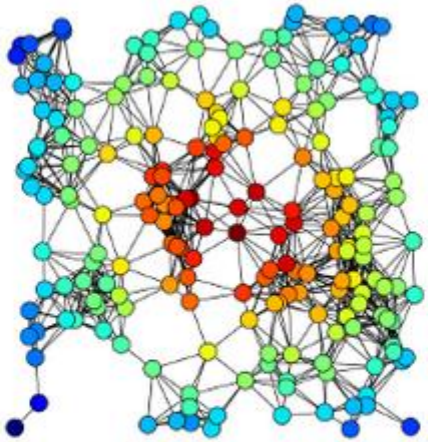
$$(\beta A + \beta^2 A^2 + \beta^3 A^3 + \ldots)\tilde{1} =$$
$$(\beta A + \beta^2 A^2 + \beta^3 A^3 + \ldots)(I - \beta A)(I - \beta A)^{-1}\tilde{1} =$$
$$(\beta A + \beta^2 A^2 + \beta^3 A^3 + \ldots - \beta^2 A^2 - \beta^3 A^3 - \ldots)(I - \beta A)^{-1}\tilde{1} =$$
$$\beta A (I - \beta A)^{-1}\tilde{1}$$

На основе этого вычисляется центральность.

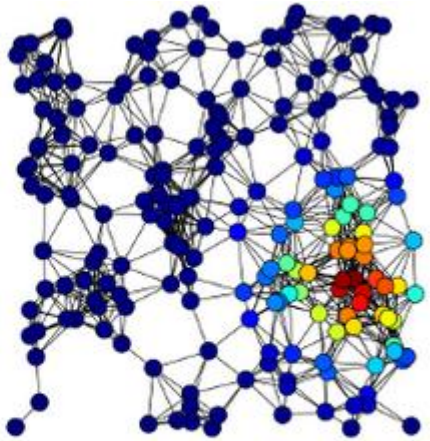
Разные виды центральности



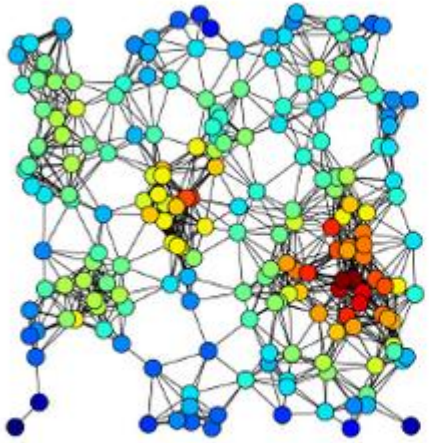
Betweennes centrality



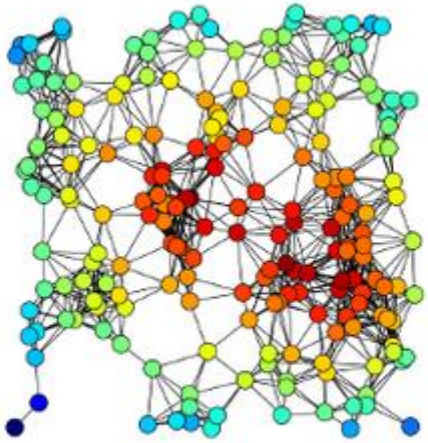
Closeness centrality



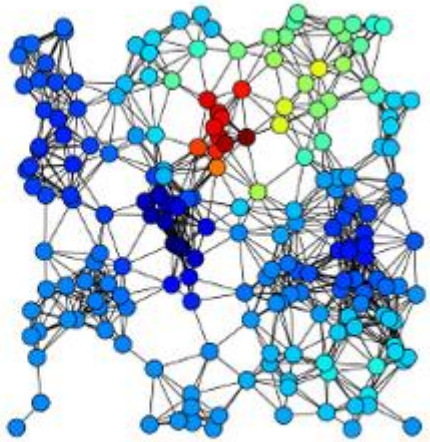
Eigenvector centrality



Degree centrality



Harmonic centrality



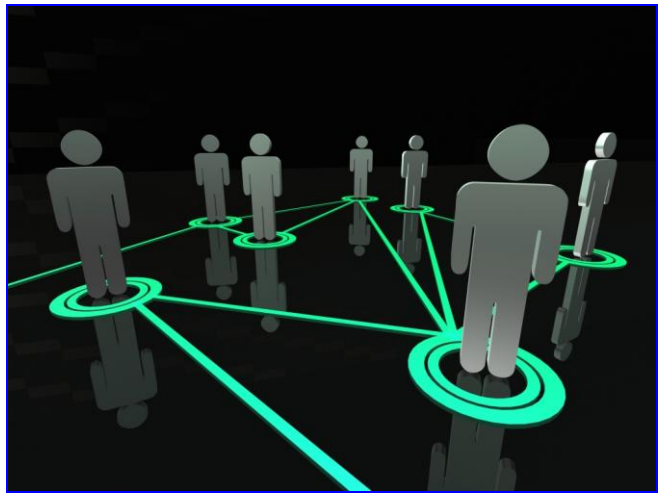
Katz centrality

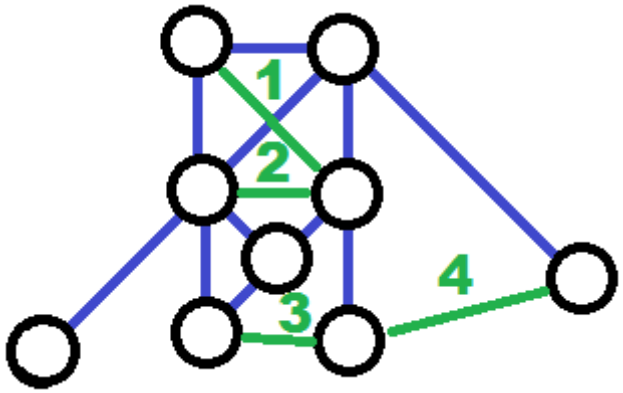
Прогнозирование появления ребра в динамическом графе (Link Prediction Problem)

Международное соревнование «IJCNN Social Network Challenge»

http://www.kaggle.com/c/socialNetwork/

Приложения: социальные сети, сотовые операторы, мобильные операторы и т.д.





Дан граф,
Список потенциальных рёбер

Необходимо ранжировать список по вероятности появления

Как решать?

Методы решения LPP

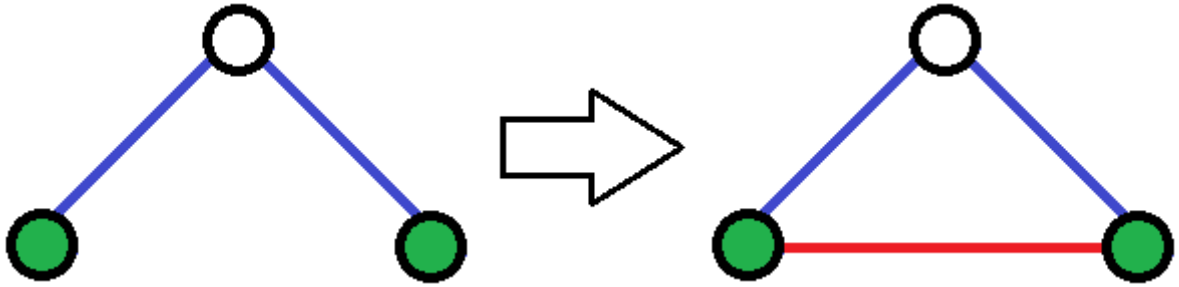
Формирование признакового пространства

Признаки строятся для пар вершин (i, j)

Все признаки «логичные» + описательные

Первая идея – принцип «друг моего друга»:

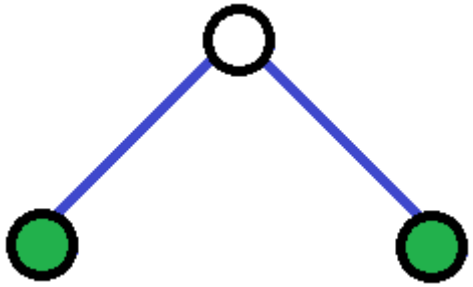
если Иван дружит с Сергеем, а Сергей с Петром,
то Иван подружится (дружит) с Петром

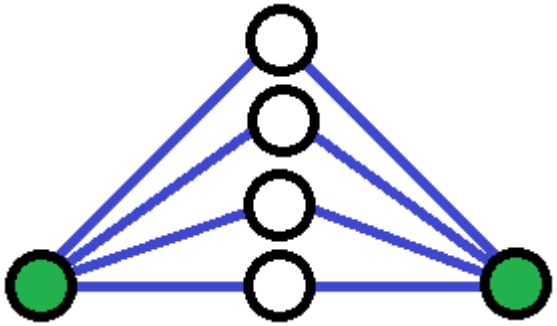


если (x, z) – ребро, (z, y) – ребро,
то (x, y) – ребро или станет ребром.

Пример признака на этом принципе? В его чём недостатки?

признак №1 – число соседей





Чем больше общих друзей имеют Иван и Пётр, тем более вероятней, что они подружатся.

$|\Gamma(x) \cap \Gamma(y)|$ **– хорошая мера сходства вершин, где** $\Gamma(x)$ **– множество соседей вершины** x

признак №2

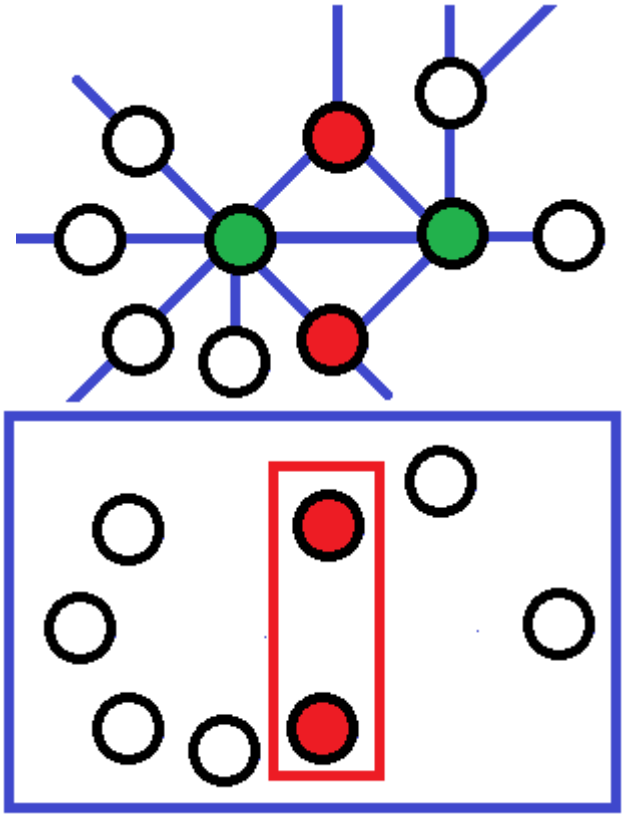
$|\Gamma(x)| \cdot |\Gamma(y)|$ **– коэффициент предпочтительности**

Чем более общительны, тем скорее подружатся

признак №3

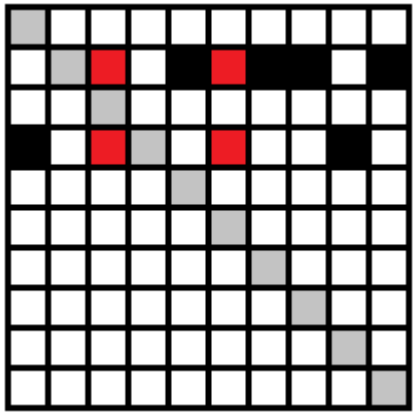
Или наоборот: чем больше процент общих друзей

$$\frac{|\Gamma(x)\cap\Gamma(y)|}{|\Gamma(x)\cup\Gamma(y)|}$$ – коэффициент Жаккара



обычные признаки
для сравнения множеств

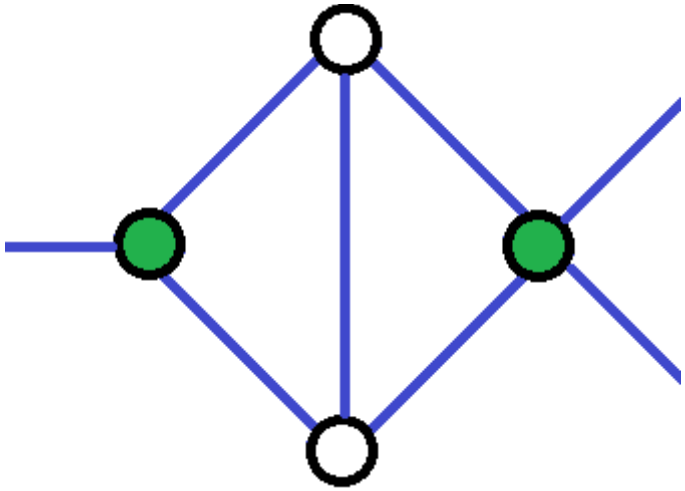
просто сравнение строк матрицы смежности

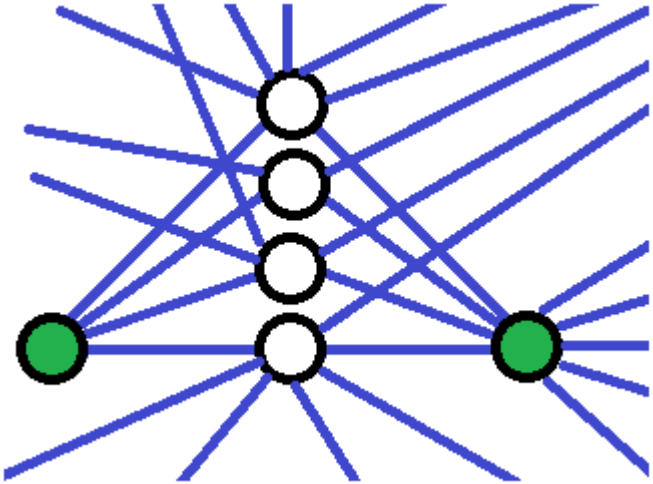


Полезно: разный подход к описанию смысла (множества, строки)

признак №4

не все друзья одинаковые!

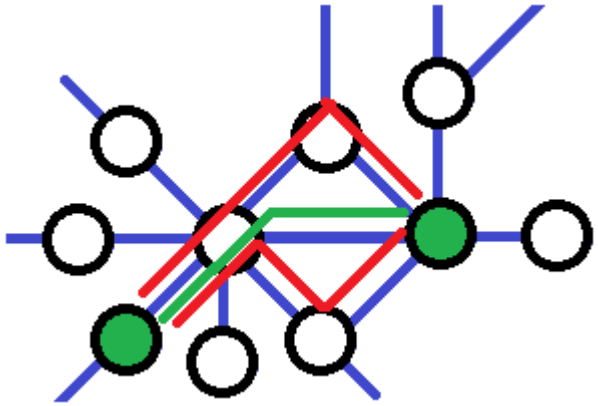




$$\sum_{z \in \Gamma(x) \cap \Gamma(y)} \frac{1}{\log |\Gamma(z)|}$$ **– коэффициента Адамик/Адара**

признак №5

Учитывать целые цепочки друзей-друзей



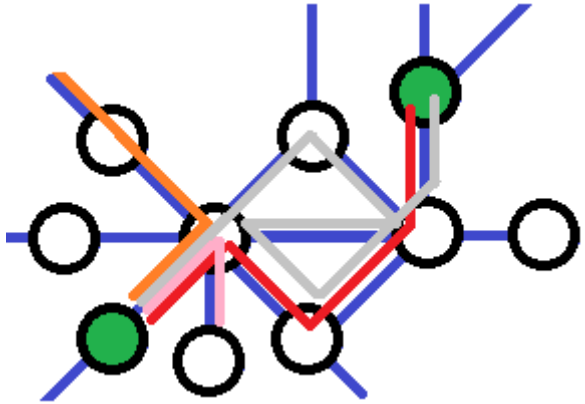
$$\sum_{l=1}^{\infty} \beta^l \, \mathrm{path}_l(x, y)$$ **– признак Katz**

равен xy-му элементу матрицы

$$(I - \beta M)^{-1} - I,$$

Признаки на основе случайных блужданий

Вершины близки, если из одной легко попасть во вторую



Пример: среднее время достижения вершины

Часто используют не матрицу смежности, а её k-SVD-аналог

Признаки на основе рекуррентных вычислений

$$\mathrm{sim}(x,y) = \frac{\gamma}{|\Gamma(x)| \cdot |\Gamma(y)|} \sum_{a \in \Gamma(x)} \sum_{b \in \Gamma(y)} \mathrm{sim}(a,b)$$

Вероятностные методы

Пусть вершина i порождается с вероятностью $\mathrm{P}(i)$

По ней порождается латентный класс с вероятностью $\mathrm{P}(z \mid i)$

По нему порождается ребро с вероятностью $\mathrm{P}(j \mid z)$

Вероятность появления ребра =

$$\mathrm{P}(i)\mathrm{P}(z \mid i)\mathrm{P}(j \mid z)$$

– это ответ, вероятности здесь оцениваются EM-алгоритмом, максизизируя логарифм правдоподобия

$$\sum_{\{i,j\}\in E} \log(\mathrm{P}(i,j))$$

Алгоритм PageRank (подробнее про случайные блуждания)

Что такое важные страницы в интернете

1. На них ссылаются (есть входящие ссылки)
2. На них ссылаются важные страницы

Алгоритм PageRank

Если страница j с важностью r_j имеет n выходных ссылок, каждая ссылка «передаёт» важность r_j / n

Важность страницы = сумма всех входных ссылок

$$r_j = \sum_{i \to j} \frac{r_i}{\deg_{\text{out}}(i)}$$

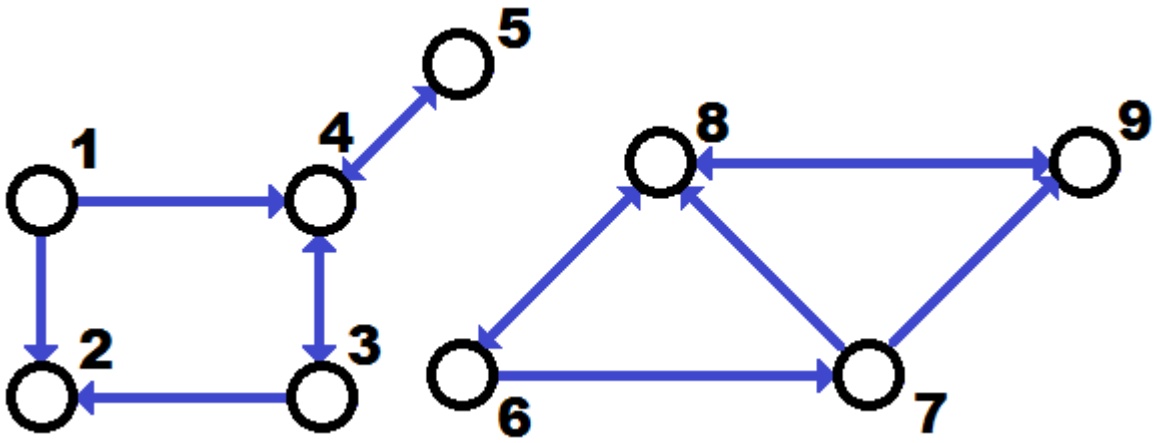
пронормируем матрицу смежности

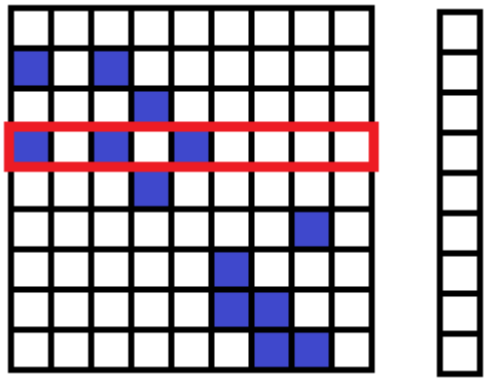
$$N = AD^{-1}$$

тогда вектор важности рекурсивно записывается как

$$r = N \cdot r$$

Алгоритм PageRank





$$r_4 = \frac{r_1}{2} + \frac{r_3}{2} + \frac{r_5}{1}$$

Внимание на построение матрицы смежности!

Решаем задачу на собственные значения

$$Nr = \lambda r$$

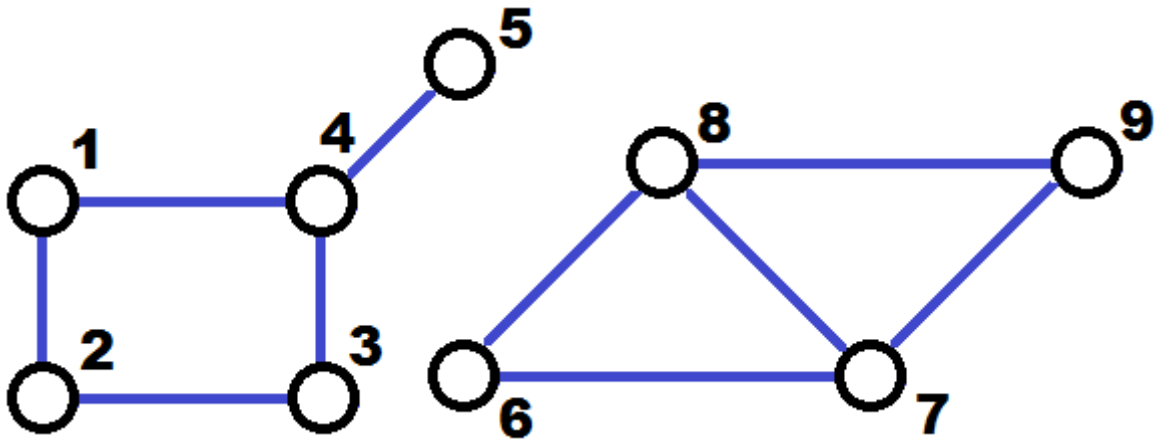
Наибольшее с.з. = 1

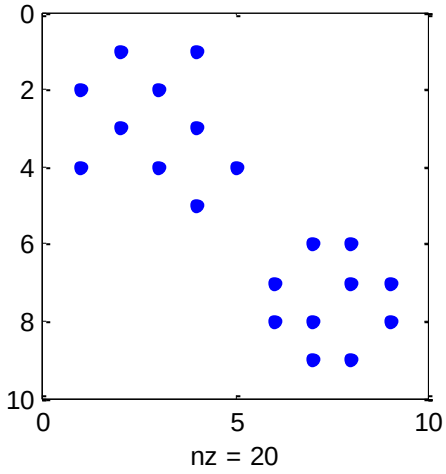
Берём его собственный вектор!

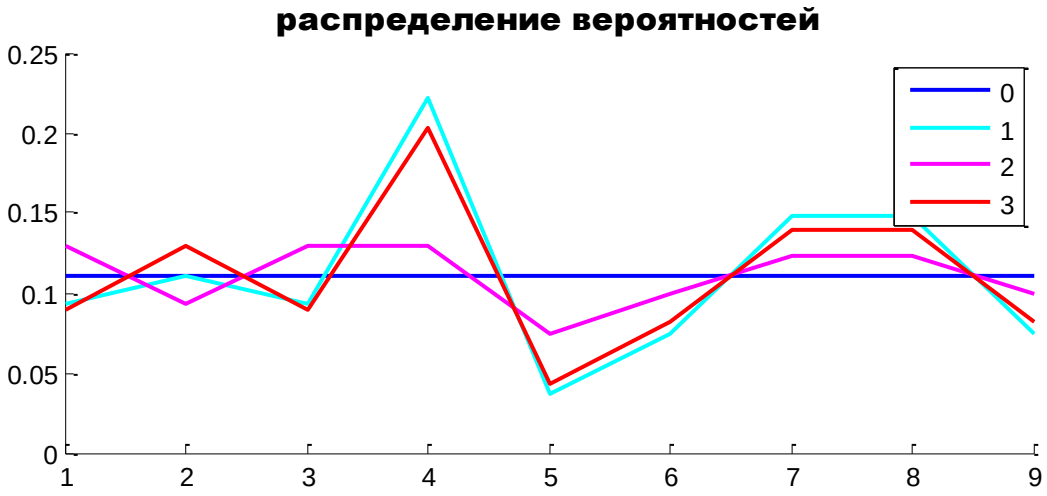
Итерационный метод $r = Nr$

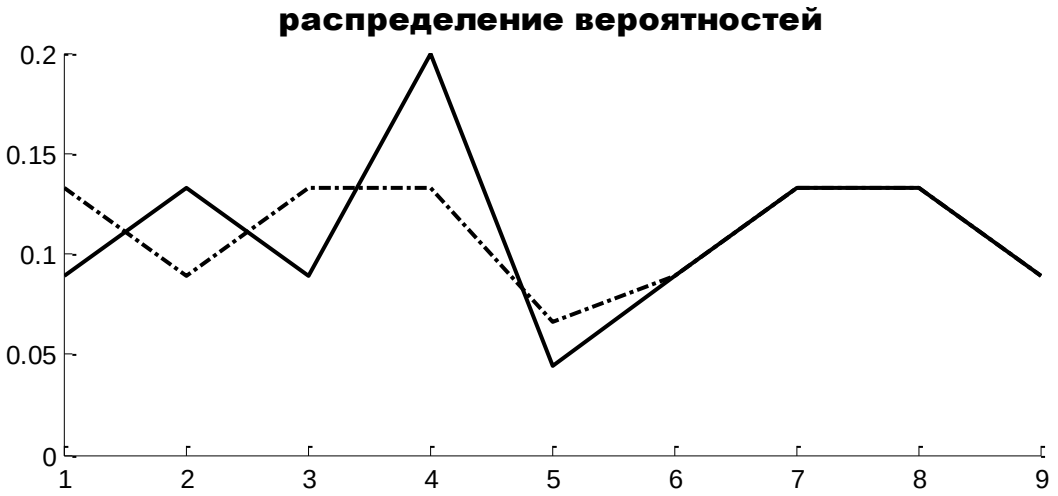
это и находит

Проблема: на практике не всегда получается







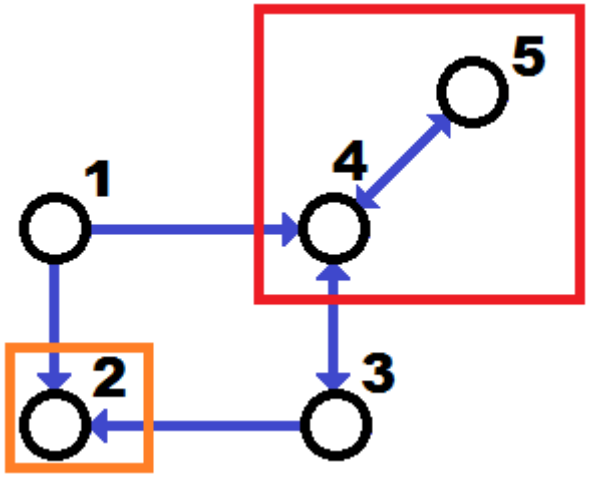


Почему?

Два типа проблем

1. Циклы

2. Мёртвые вершины



Решение: в итерационном алгоритме с вероятностью 0.1-0.2 прыгать в случайную вершину графа (~5 шагов)

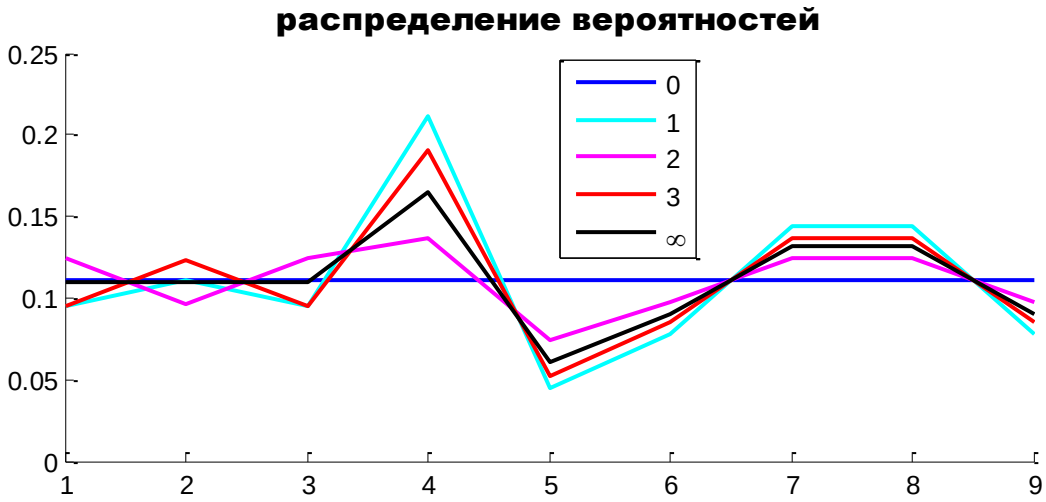
Решение проблем

Брин, Пейдж:

$$r_j = \beta \sum_{i \to j} \frac{r_i}{\deg_{\text{out}}(i)} + (1-\beta)\frac{1}{n}$$

$$M = \beta \cdot N + \frac{(1-\beta)}{n} \tilde{1} \cdot \tilde{1}^{\text{T}}$$

В результате



Практические аспекты

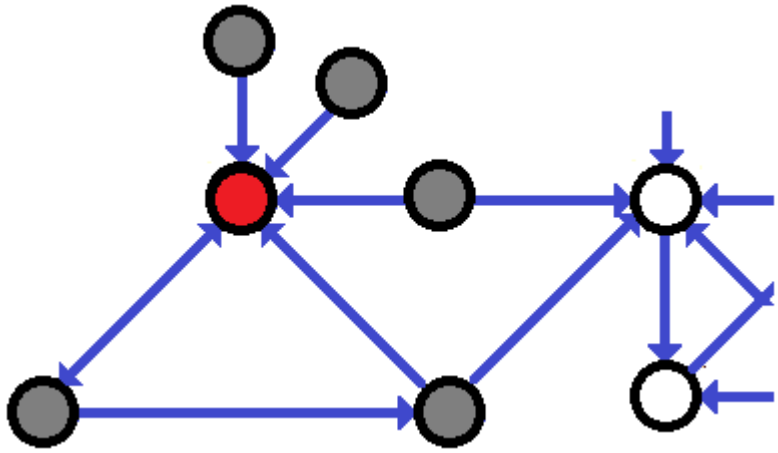
Переход не в произвольную вершину, а

- **в похожую,**
- **из этого топика,**
- **из доверительного множества (анти-спам: *.edu),**
- **в эту вершину (SimRank)**

  и т.п.

Зачем?

Ответ: в случае спама – борьба с фермами спама



– доверенная зона,

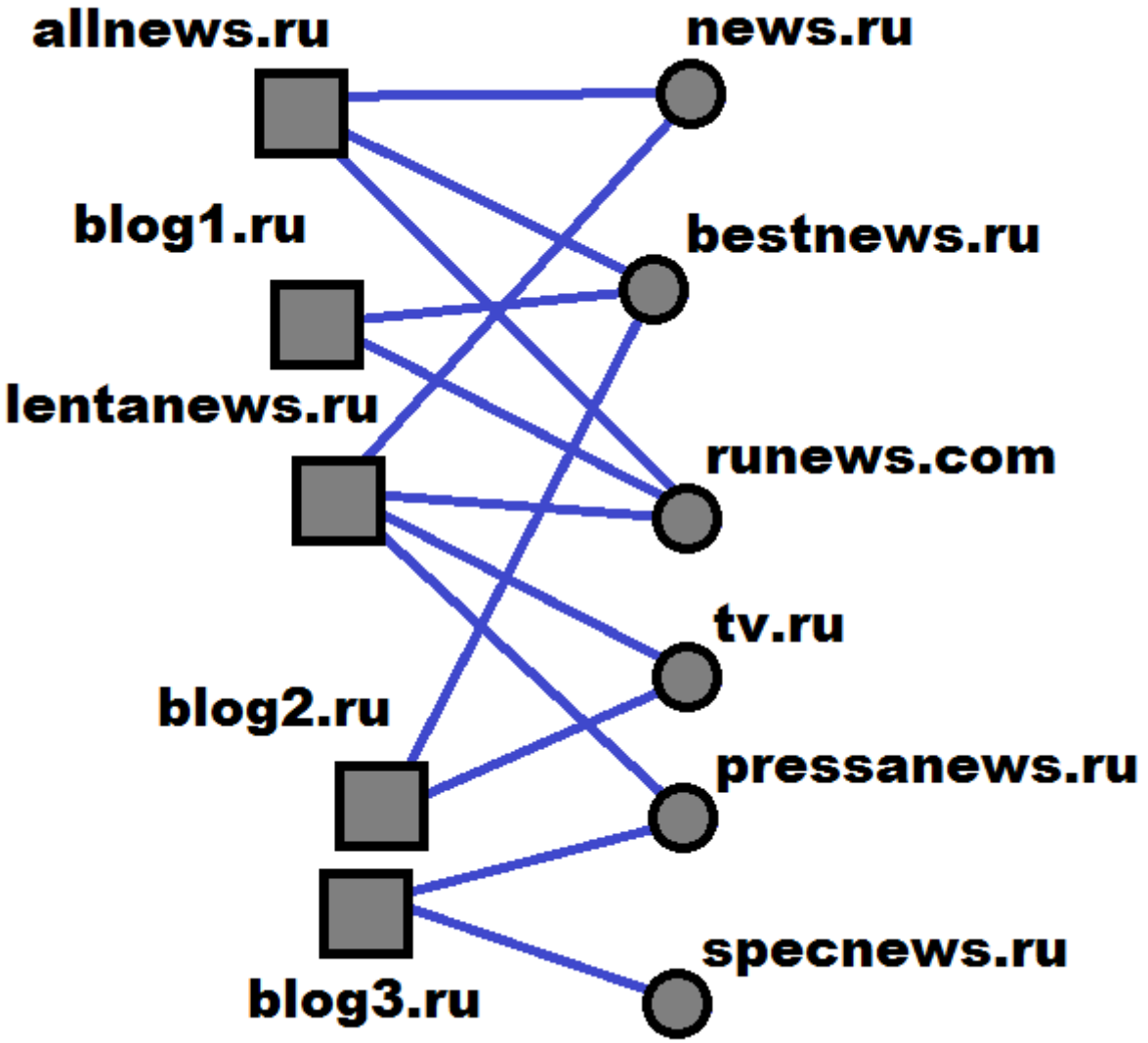
– ферма спама,

– спам

Для формирования доверенной зоны можно использовать эксперта

Ещё итерационные алгоритмы
поиск ценных источников информации

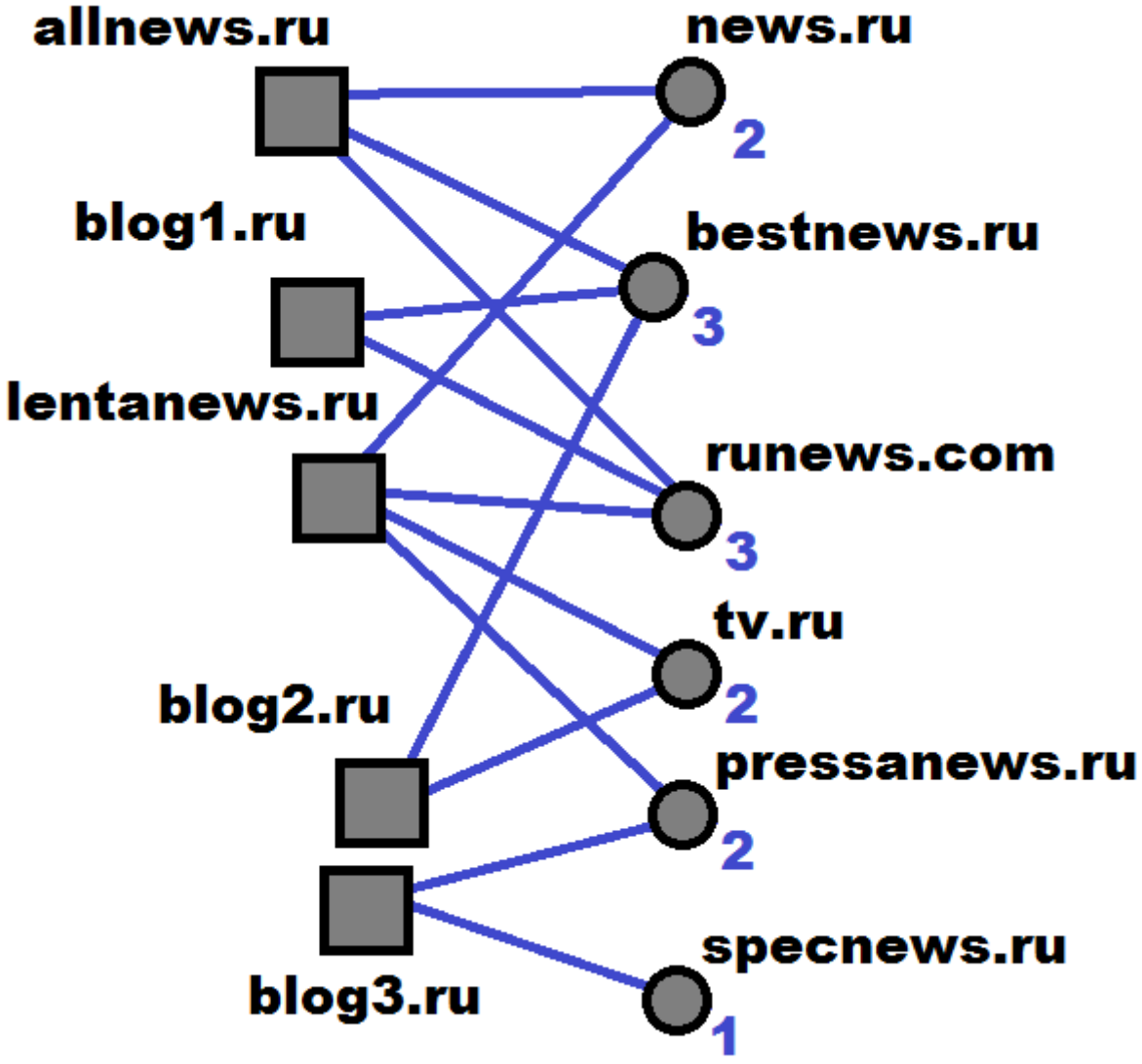
Агрегаторы



Новостные сайты

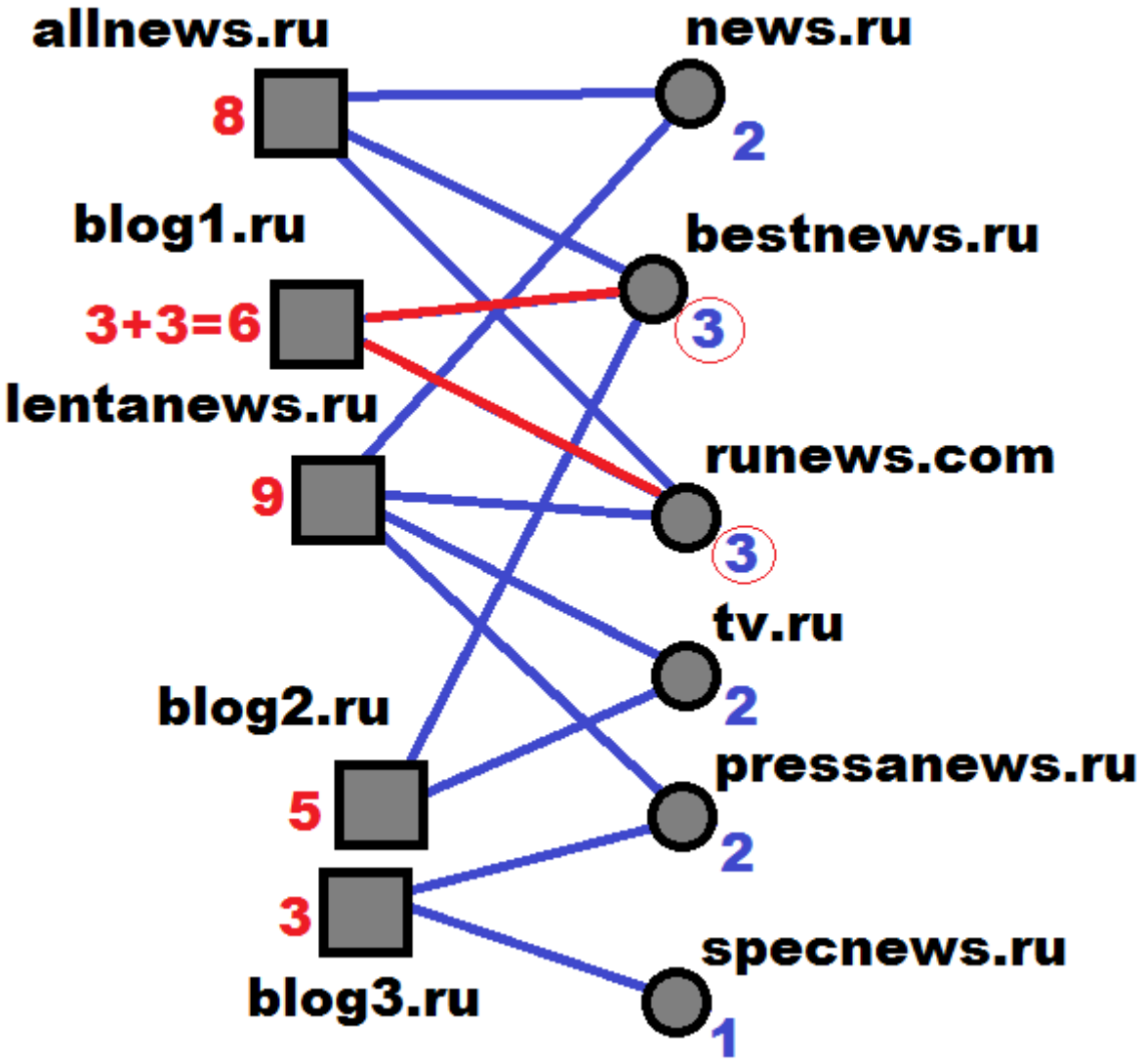
Ещё итерационные алгоритмы

Ценное то – на что ссылаются



Ещё итерационные алгоритмы

Ценное то –что ссылается на ценное



Ещё итерационные алгоритмы

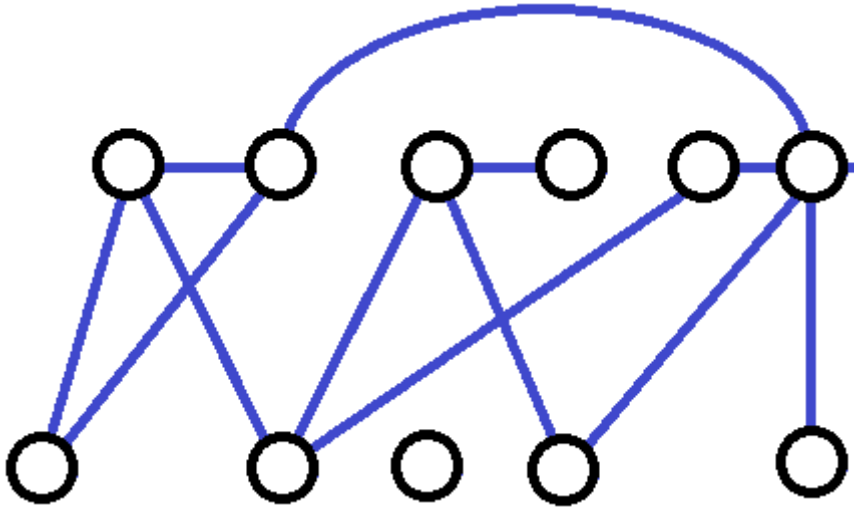
Дальше идея понятна…

К решению какого матричного уравнения всё сводится?

Какая задача здесь возникает?

Соревнование «IJCNN Social Network Challenge»

Задача не в стандартной постановке –
граф почти двудольный, ориентированный!



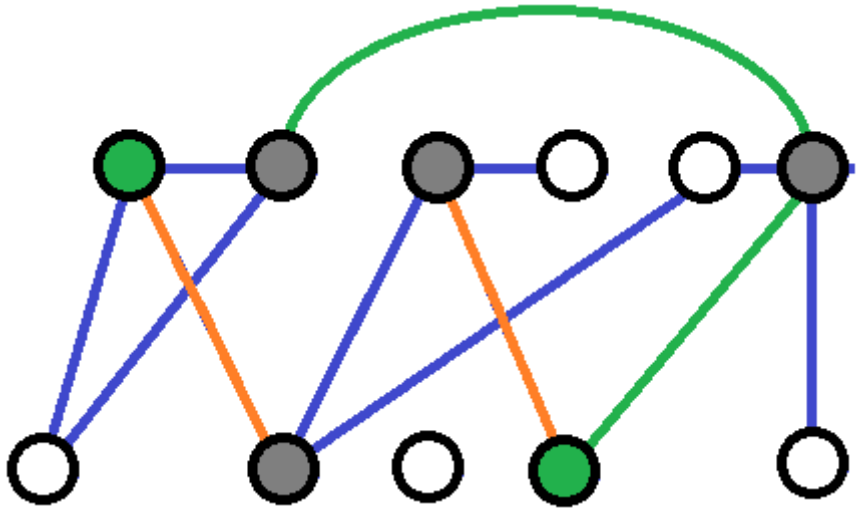
вершин = 1’100’000

рёбер = 7’200’000

Сеть Flickr

Тест = 4480+4480
потенциальных рёбер

Описанные признаки легко обобщаются на двудольный случай



Кстати, тонкости в задаче –

как выбрать обучающую выборку (надо знать как делал заказчик)!

Если не-рёбра = случайные не рёбра,
то задача лёгкая, обобщения нет

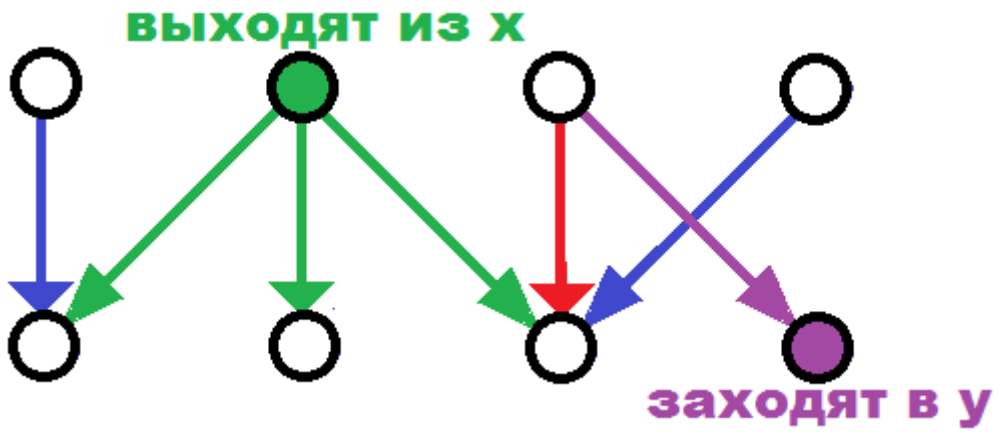
Если не-рёбра = почти рёбра,
то они могут скоро стать рёбрами… а этому мы и должны научиться

Первый подход

друг друга

$$\frac{|(\Gamma(x,*)\times\Gamma(*,y))\cap E|}{|\Gamma(x,*)|\cdot|\Gamma(*,y)|+1}$$

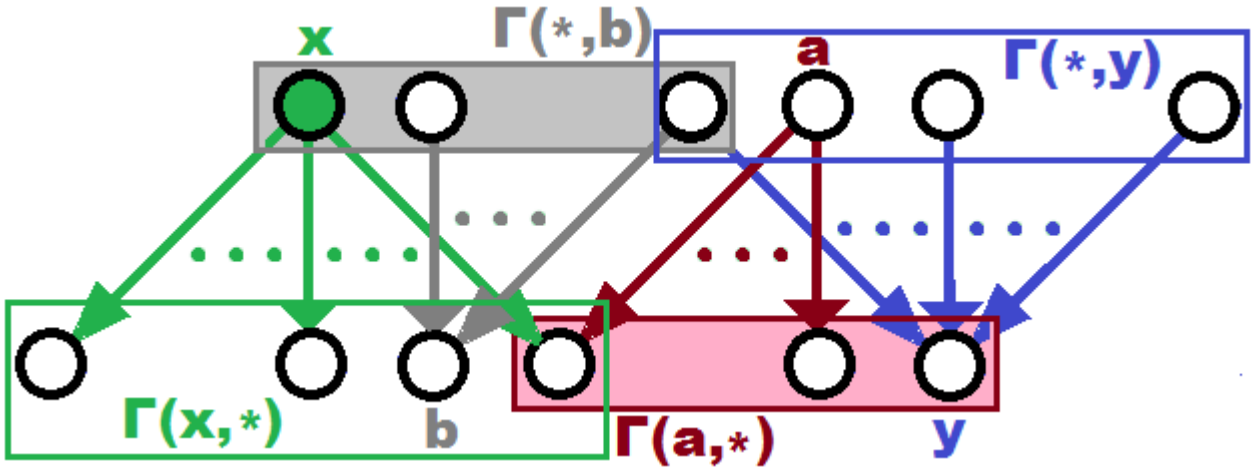
$$\Gamma(x,*)=\{y\in V\,|\,(x,y)\in E\}$$



Улучшение качества при таком признаке

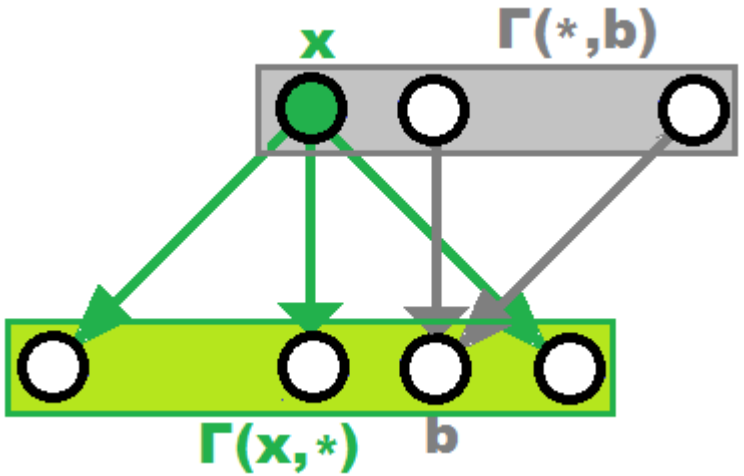
$$\frac{\sum\limits_{\substack{a\in\Gamma(*,y)\\ b\in\Gamma(x,*)}} \frac{|\Gamma(a,*)\cap\Gamma(x,*)|\cdot|\Gamma(*,b)\cap\Gamma(*,y)|}{\sqrt{|\Gamma(a,*)|\cdot|\Gamma(*,b)|}}}{|\Gamma(x,*)|\cdot|\Gamma(*,y)|+1}$$

Какой смысл этого признака?



Признак №2

$$\frac{1}{|\Gamma(x,*)|}\sum_{b\in\Gamma(x,*)}\frac{|(\Gamma(*,b)\cap\Gamma(x,*))\cap E|}{|\Gamma(*,b)|\cdot|\Gamma(x,*)|+1}$$



насколько дружелюбны друзья x

(не зависит от y, хорош в комбинации)

Второй подход

вершины соединены, если соединены похожие

$$\frac{|(X \times Y) \cap E|}{|X| \cdot |Y| + 1}$$

X **– вершины похожие на** x**,**

Y **– вершины похожие на** y**.**

Что такое похожие?

сравниваем как строки в матрице смежности

Лучшее – скалярное произведение с довеском:

$$|\Gamma(x,*) \cap \Gamma(a,*)| - \frac{1}{2 + |\Gamma(a,*)| - |\Gamma(x,*) \cap \Gamma(a,*)|}$$

Оптимальные множества: $|X| = 9$**,** $|Y| = 40$

При разных метриках – некоррелированные признаки

Как учитывать похожесть?

Вместо $\frac{|(X \times Y) \cap E|}{|X| \cdot |Y| + 1}$

весовую схему

$$\frac{1}{|X| \cdot |Y| + 1} \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} w(a) w'(b)$$

Блендинг

I = 87.5

I + II = 90.7

III = 90.7

I + II + III = 92.6

PR = 93.0

I + II + III + PR = 95.0

Сообщество в графе

нет определения

рёбер внутри сообщества много,

рёбер соединяющих сообщество с остальными вершинами мало

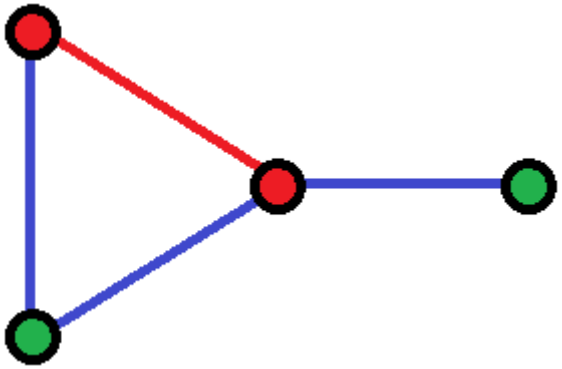
малый радиус сообщества

Какие бывают определения:

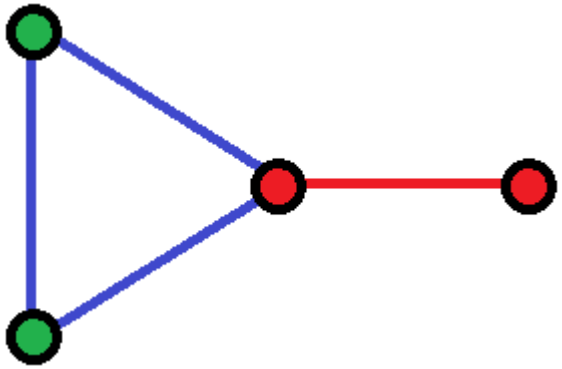
1. **Чёткие**
2. **Нечёткие (не определения, см. выше)**
3. **Алгоритмические (то что получается в результате действия алгоритма)**

Сообщество в графе

Идеальный кандидат – клика

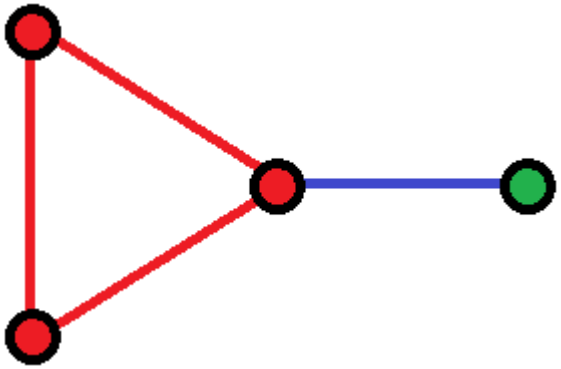


Клика



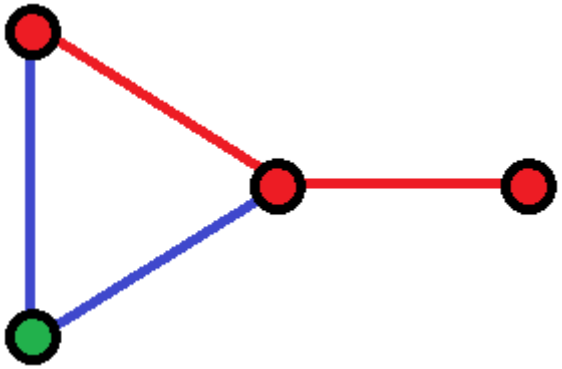
Максимальная клика

Не может быть расширена



Наибольшая клика

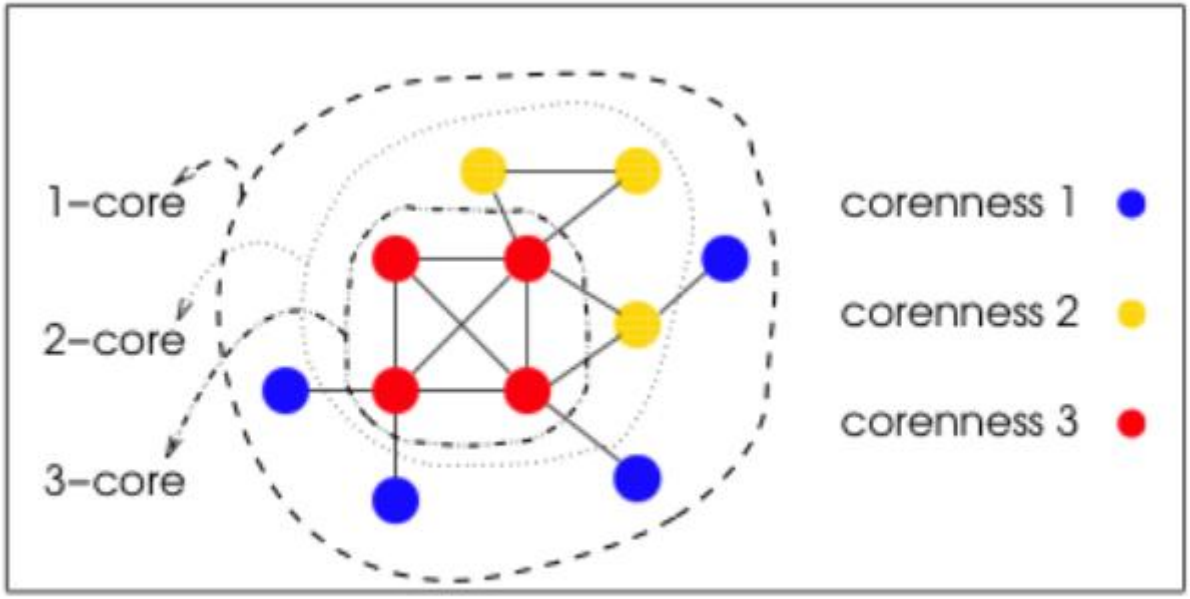
Клика наибольшего размера



Не клика

Но вычислительные сложности…

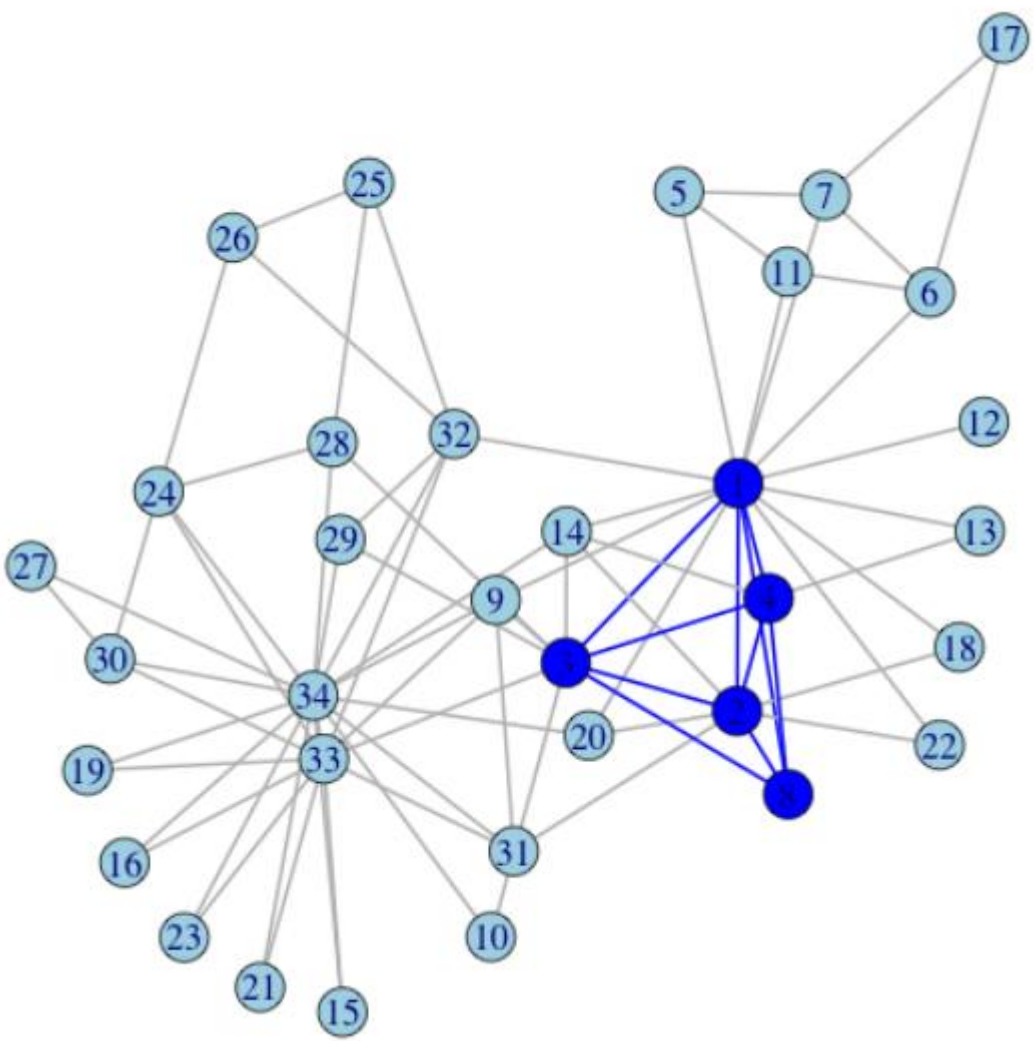
k-ядра

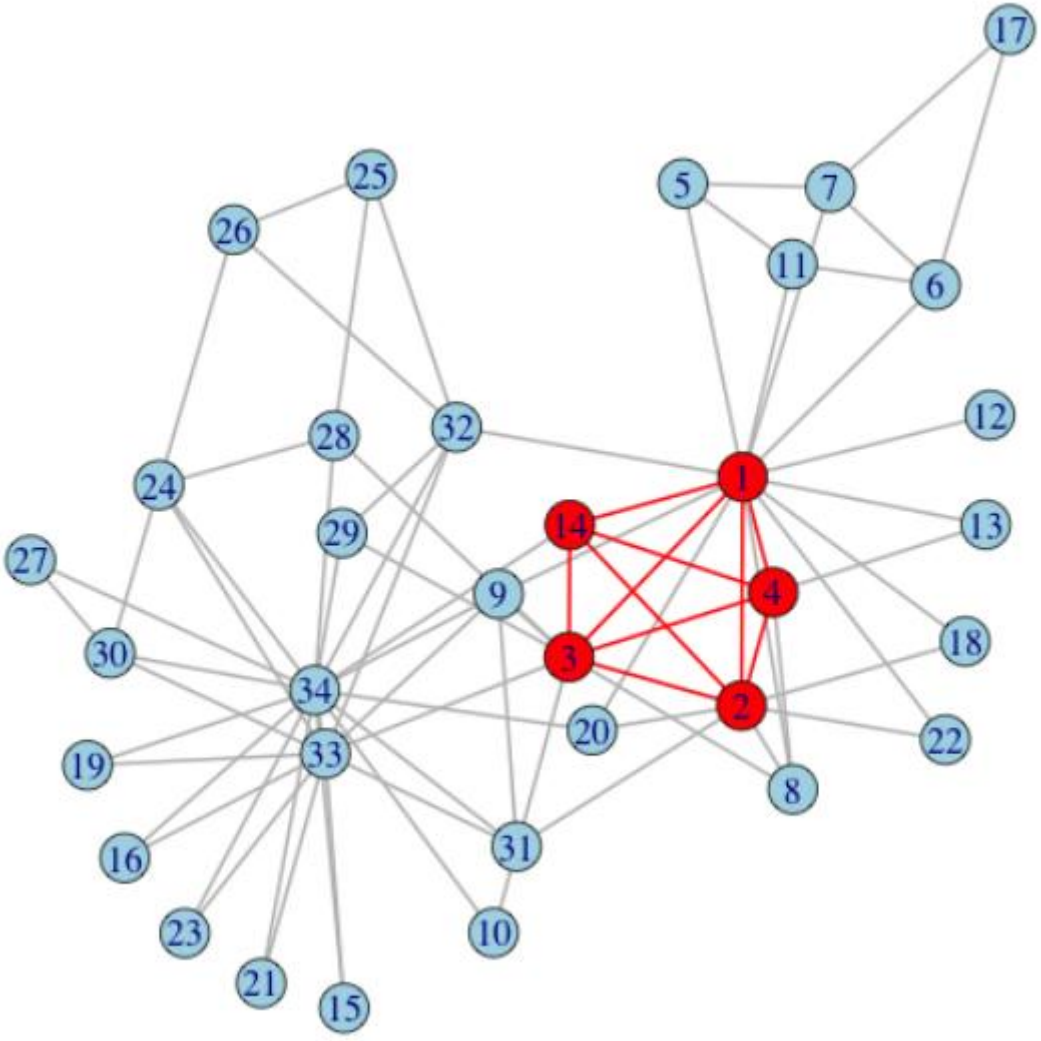


Alvarez-Hamelin et.al., 2005

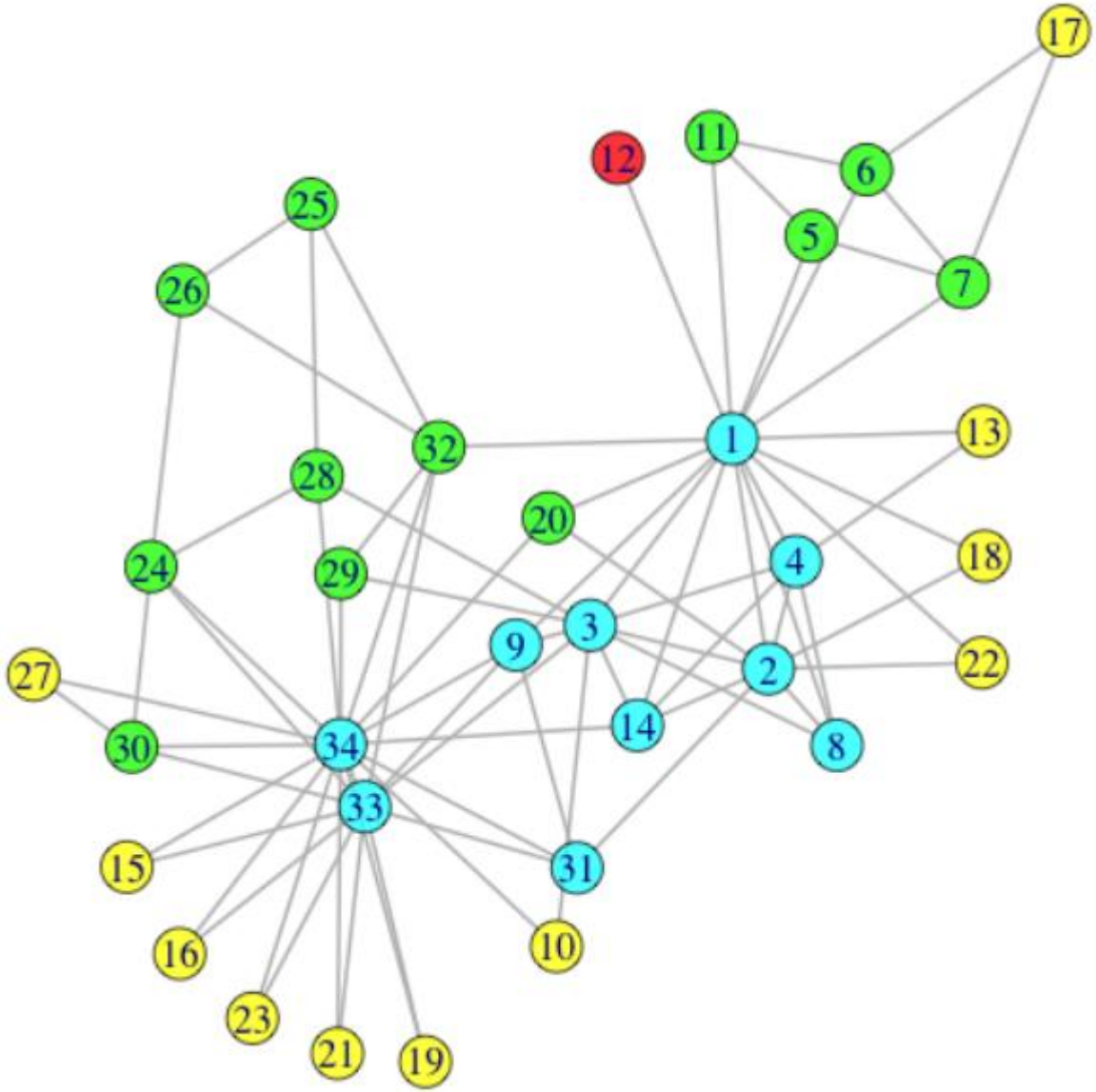
k-ядро = степень каждой вершины >= k

Наибольшие клики (Карате клуб)





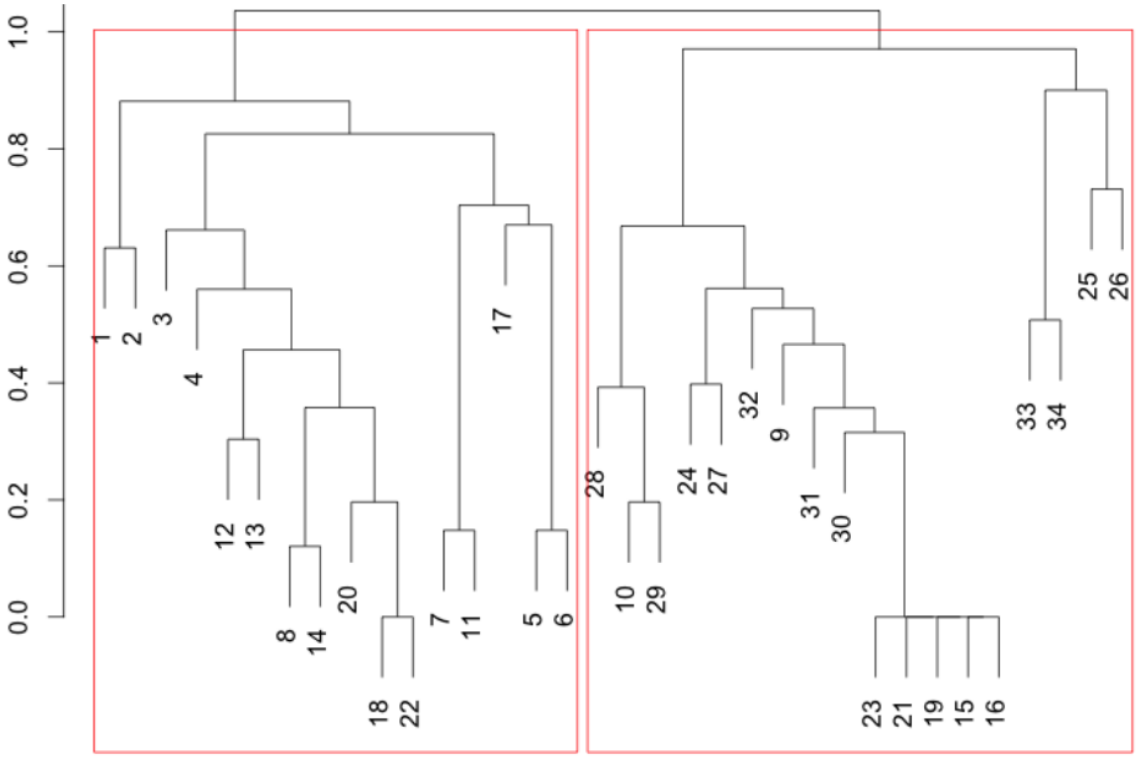
Ядра (Карате клуб)

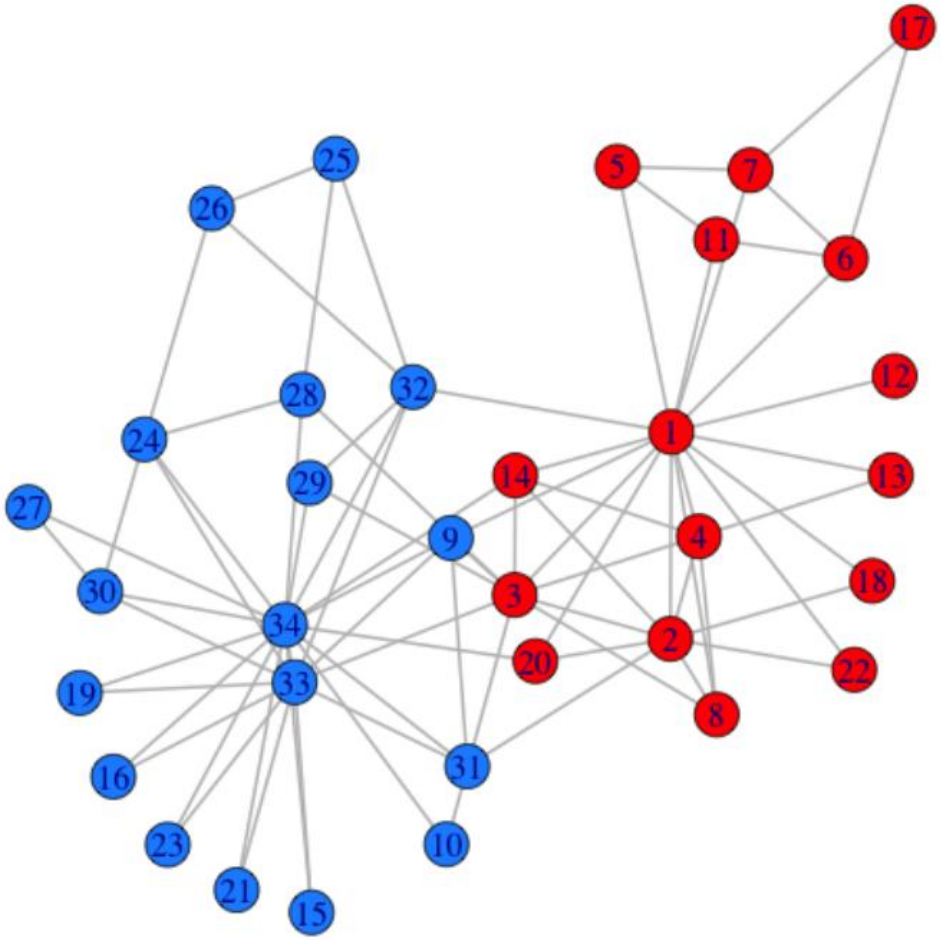


Выделение сообществ

1й способ

Обычная кластеризация с мерой схожести вершин





Выделение сообществ

1й способ - недостатки

Формально не пытаемся выполнить условия «сообщности»:
много рёбер внутри сообщества
слабые связи между сообществами

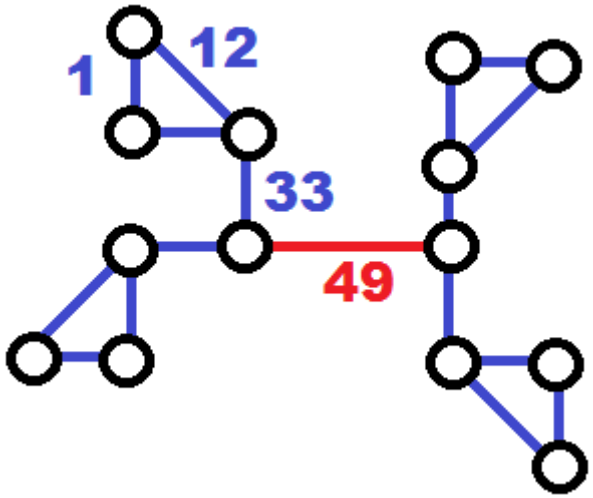
Выделение сообществ

2-й способ (Girvan-Newman)

Edge betweenness – число кратчайших путей, проходящих через ребро

Повторять пока есть рёбра
удаление ребра с максимальным значением EB

Получаем иерархическое разложение графа



На каком этапе останавливаться (в иерархическом делении)

Как в кластеризации:
ввести функционал качества

Число рёбер в группе – ожидаемое число рёбер

Почему не оптимизировать этот функционал напрямую?

3-й способ (модулярность, тоже Girvan и Newman)

Сравниваем число рёбер в сообществе с ожидаемым числом рёбер

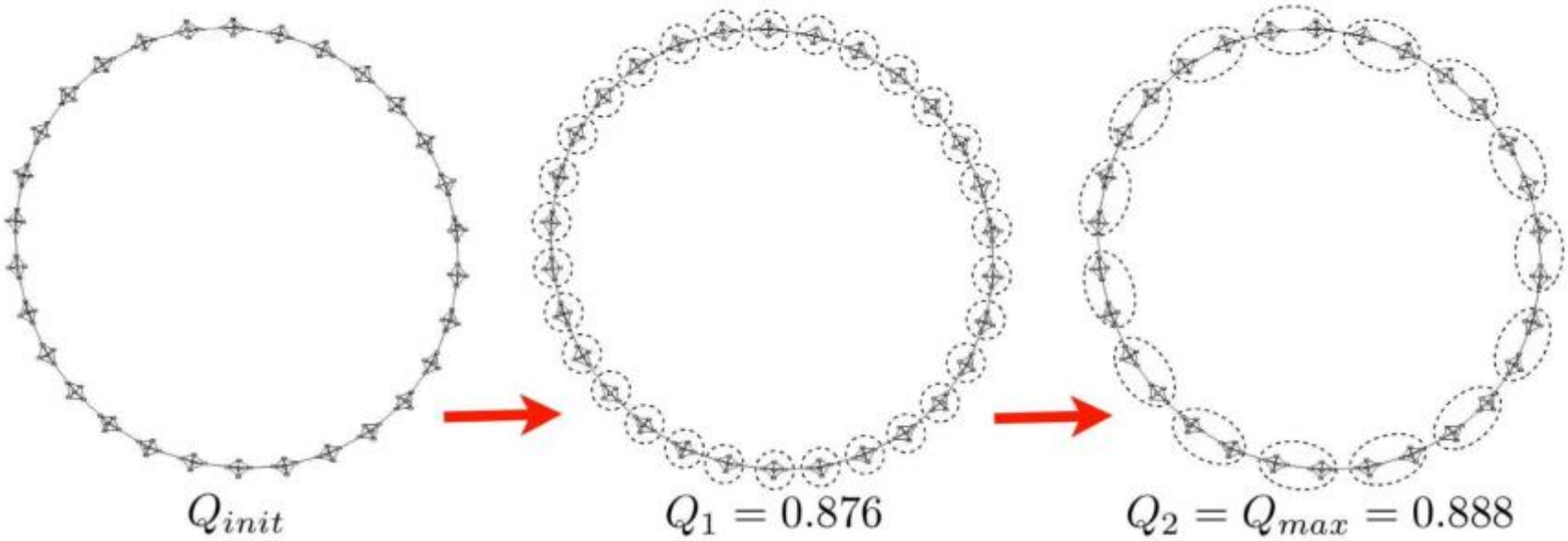
$$Q = \frac{1}{2m}\sum_{ij}\left(a_{ij} - \frac{\deg(i)\deg(j)}{2m}\right)\cdot I[x_i = x_j]$$

x_i – **метка** i**-й вершины**

как минимизируется

- **симуляция отжига**
- **спектральные методы и т.п.**
- **жадные алгоритмы**
- **попытки объединять/перетаскивать сообщества**

Иногда модулярность подводит…

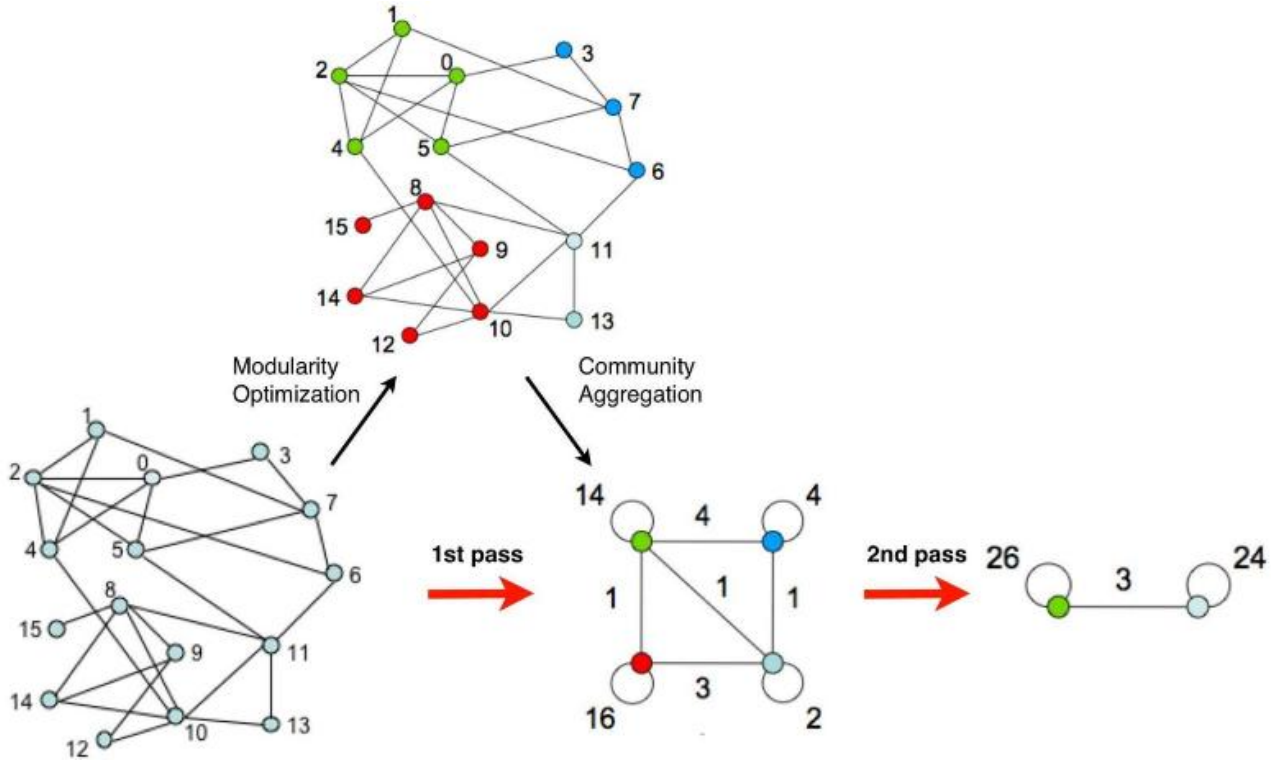


Источник?

Fast community unfolding [Multilevel]

1. Каждая вершина приписывается в своё сообщество
2. Пока возможно:
   a. Для каждой вершины – изменение модулярности при перемещении её в сообщество (каждого) соседа
   b. Максимальное изменение реализуем
3. Пока увеличивается модулярность:

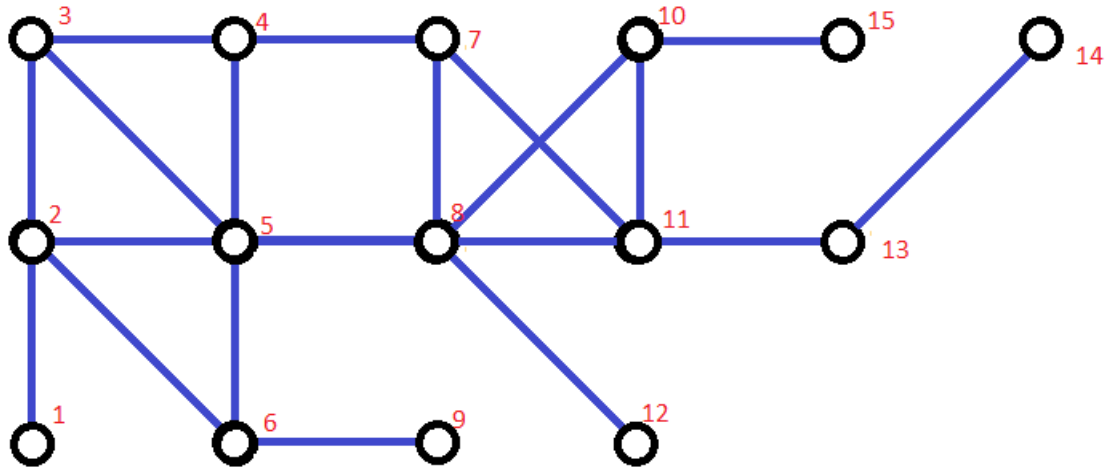
вершины сообществ превращаем в мета-вершины



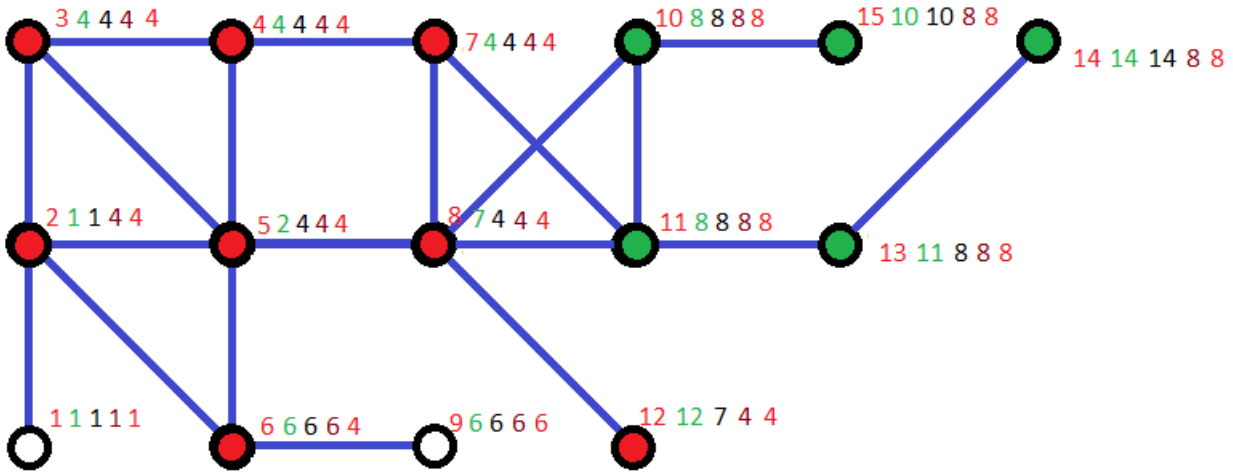
4-й способ: Label Propagation

1. Случайно приписать метки вершинам
2. Цикл по вершинам (в случайном порядке)

a. Метка вершины заменяется на самую частую метку соседей



Label Propagation



5й способ: Walktrap

1. **Приписать каждую вершину к своему сообществу**
2. **Пока нужно: слить 2 самых ближайших сообщества**

Как измеряется близость сообществ

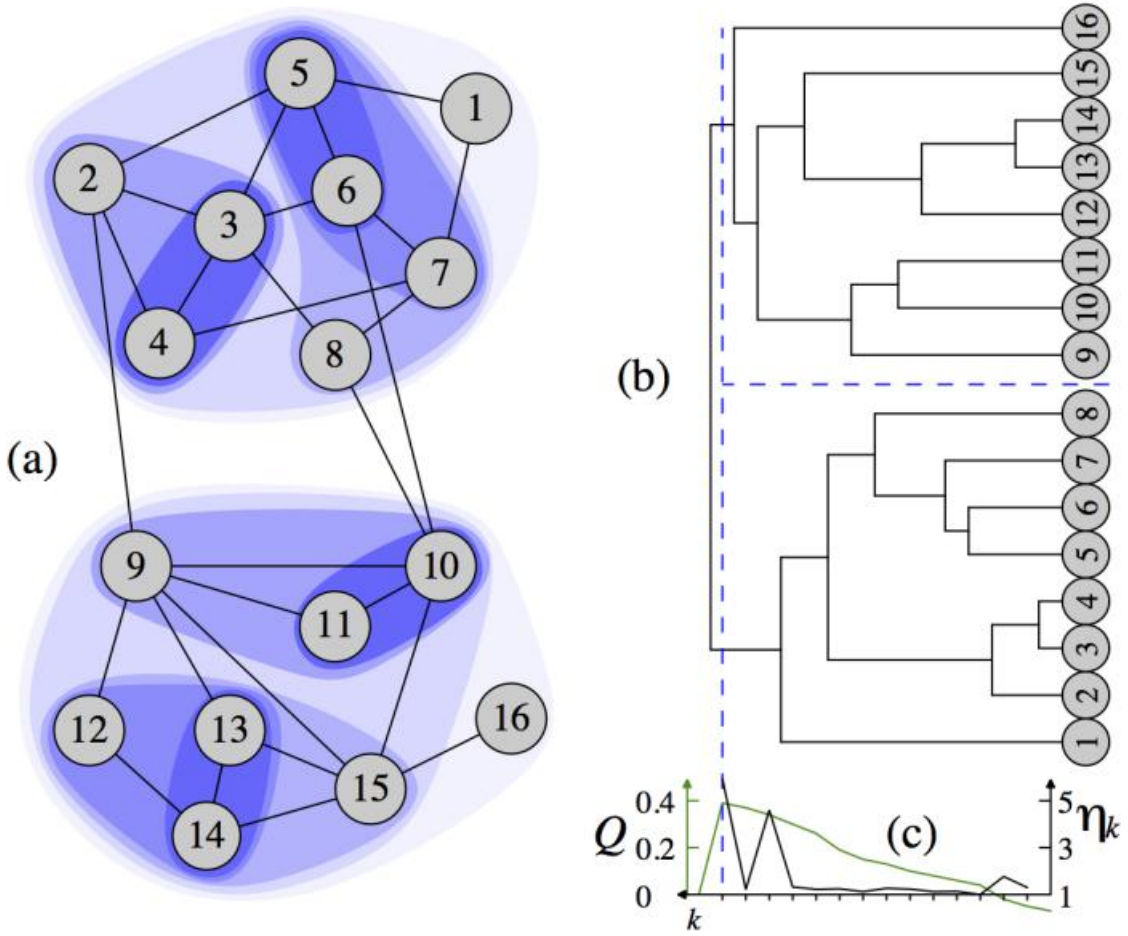
$$r_{A,B}(t)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(P_{A,i}^{t}-P_{B,i}^{t})^{2}}{\deg(i)}}=\| D^{-0.5}P_{A}^{t}-D^{-0.5}P_{B}^{t}\|,$$

$$P_{A,i}^{t}=\frac{1}{|A|}\sum_{j\in A}P_{ij}^{t}$$

P_{ij}^{t} – **вероятность попасть из** i **в** j **за** t **шагов**

(можно вычислить приближённо – случайными блужданиями)

Walktrap



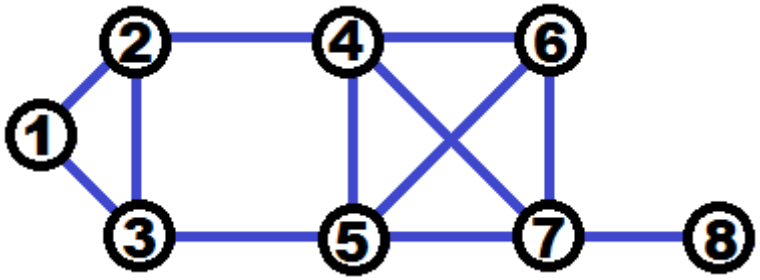
Другая идея выделения сообществ

Разбиение графа!

6-й способ: спектральная теория графов

Матрица смежности

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1	1					
2	1		1	1				
3	1	1			1			
4		1			1	1	1	
5			1	1		1	1	
6				1	1		1	
7				1	1	1		1
8							1	

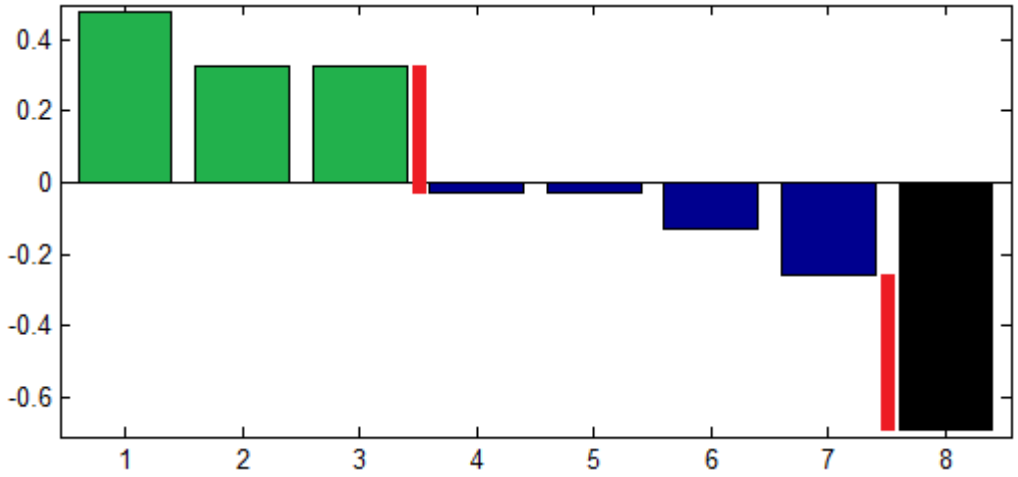


Матрица Лапласа

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	-1	-1					
2	-1	3	-1	-1				
3	-1	-1	3		-1			
4		-1		4	-1	-1	-1	
5			-1	-1	4	-1	-1	
6				-1	-1	3	-1	
7				-1	-1	-1	4	-1
8							-1	1

```
L = full(diag(sum(S))-S);
[X,Y] = eig(L);
bar(X(:,2))
```

```
-0.3536    0.4758    0.4032    0.6744    0.0000    0.1498   -0.0938   -0.0000
-0.3536    0.3271    0.1388   -0.4363    0.6015   -0.1862    0.1540   -0.3717
-0.3536    0.3271    0.1388   -0.4363   -0.6015   -0.1862    0.1540    0.3717
-0.3536   -0.0261   -0.3076   -0.1099    0.3717    0.3132   -0.4117    0.6015
-0.3536   -0.0261   -0.3076   -0.1099   -0.3717    0.3132   -0.4117   -0.6015
-0.3536   -0.1307   -0.4737    0.3524    0.0000   -0.7131    0.0292    0.0000
-0.3536   -0.2583   -0.1846    0.1162    0.0000    0.4336    0.7568    0.0000
-0.3536   -0.6889    0.5926   -0.0506   -0.0000   -0.1244   -0.1767   -0.0000
```



Всё содержится в одном векторе! И на одном слайде!

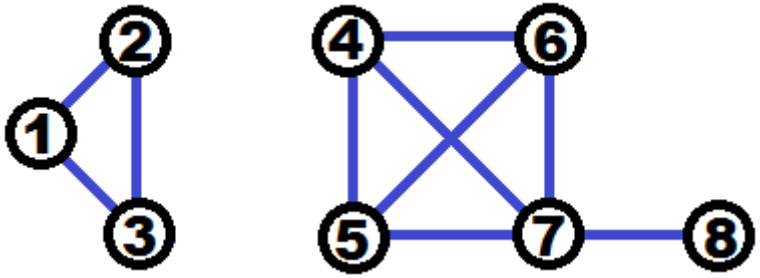
Потом – теоретическое обоснование

Спектральная теория графов

Первый с.в. – константный

Второй с.в. – отражает разбиение графа

Но когда граф несвязный…




```
L =                                0.5774         0         0    0.2673    0.7715         0         0         0
full(diag(sum(S))-S);              0.5774         0         0   -0.8018   -0.1543         0         0         0
                                   0.5774         0         0    0.5345   -0.6172         0         0         0
                                        0   -0.4472   -0.2887         0         0    0.1274   -0.8065    0.2236
[X,Y] = eig(L);                         0   -0.4472   -0.2887         0         0    0.6348    0.5136    0.2236
                                        0   -0.4472   -0.2887         0         0   -0.7621    0.2929    0.2236
                                        0   -0.4472    0.0000         0         0         0         0   -0.8944
                                        0   -0.4472    0.8660         0         0         0         0    0.2236

diag(Y)' =     -0.0000    0.0000    1.0000    3.0000    3.0000    4.0000    4.0000    5.0000
```

Теперь два «константных» вектора!

Проблема разбиения графа [не совсем из теоретической части]

$$x^{\mathrm{T}} Lx = \sum_{(i,j)} (x_i - x_j)^2 \to \min_x,$$

если $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{\pm 1\}^n$**, то минимизация логична для разбиения.**

Избежать очевидного константного решения: $\tilde{1}^{\mathrm{T}} x = 0$**.**

Но это сложная переборная задача, поэтому вместо

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \{\pm 1\}^n, \ \tilde{1}^{\mathrm{T}} x = 0,$$

Решают вещественную задачу с ограничениями

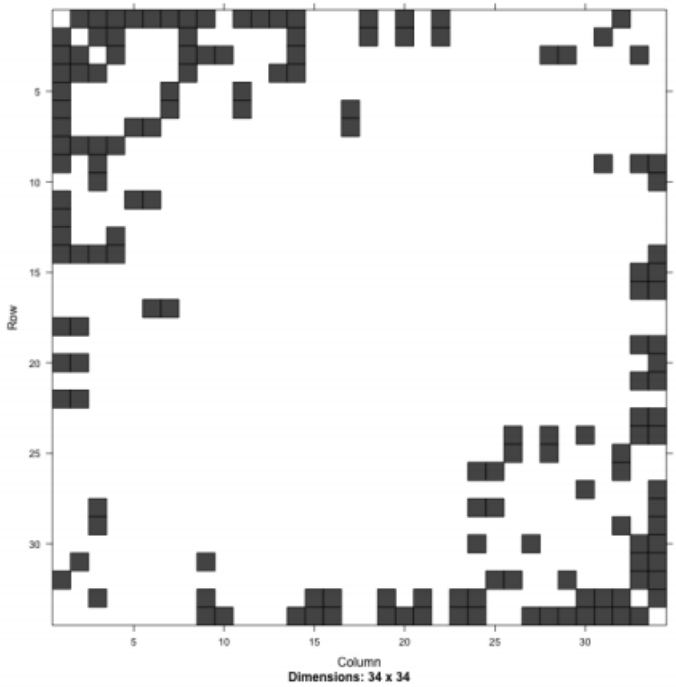
$$\tilde{1}^{\mathrm{T}} x = 0, \ \| x \| = 1.$$

Решение – собственный вектор, соответствующий второму по величине с.з. матрицы Лапласа.

Потом $(\mathrm{sgn}(x_1), \ldots, \mathrm{sgn}(x_n))$**.**

Совмещение идей

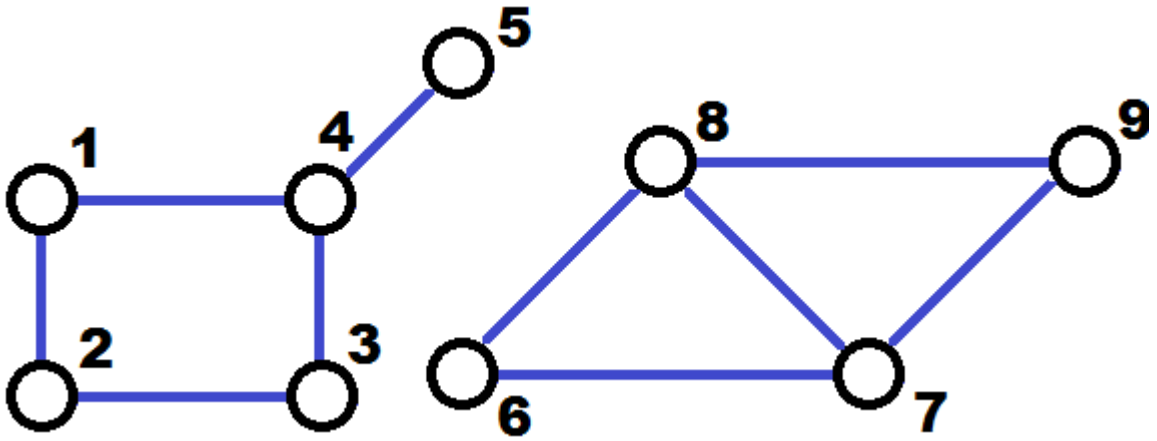
1. Найти второй собственный вектор
2. По его значениям упорядочить вершины



change

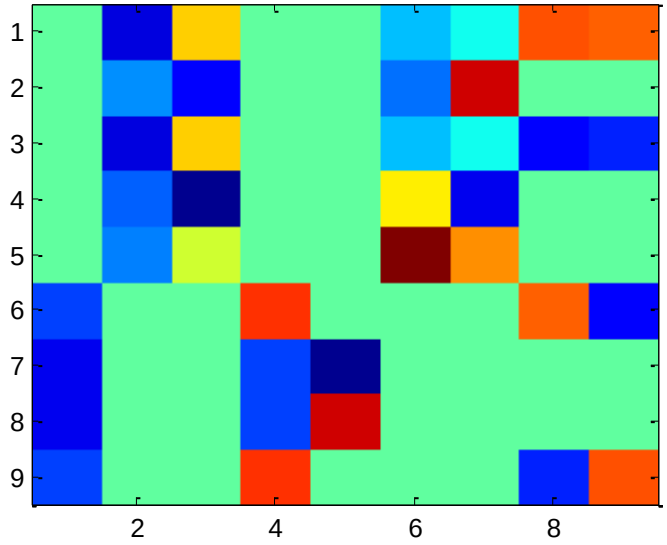
3. Как именно делить решаем по отдельному функционалу (ex: модулярность), надо перебрать всего n-1 деление.

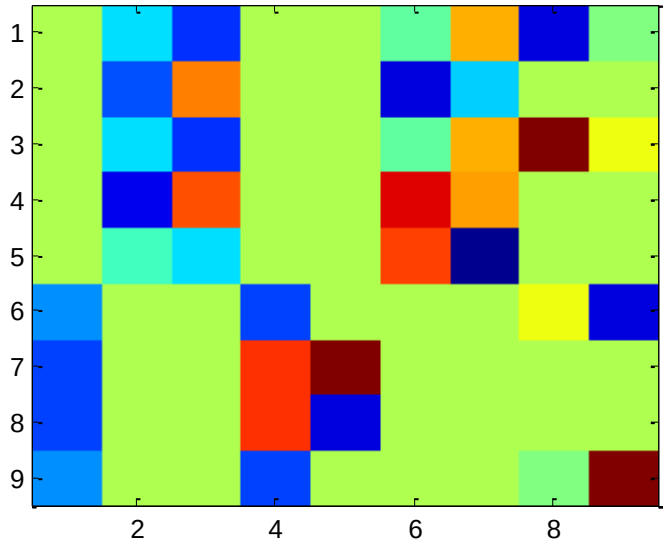
SVD над матрицей смежности



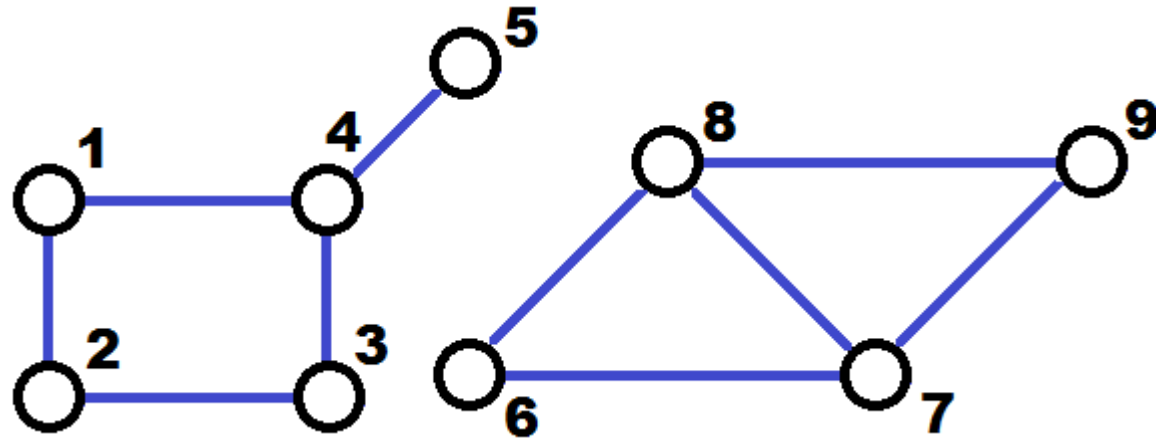

```
S = sparse([1 1 2 2 3 3 4 4 6 6 7 7 8 8 8 9 9 5 4 7], ...
           [2 4 1 3 2 4 1 5 7 8 8 9 6 7 9 8 7 4 3 6], 1)
[U L V] = svds(S,9);
disp(U)
disp(V)
disp(diag(L)')
```

```
    0.0000   -0.5295   -0.3893    0.0000    0.0000   -0.2441    0.0923   -0.2743    0.6518
    0.0000    0.3646   -0.4958   -0.0000   -0.0000   -0.2787   -0.7373   -0.0000   -0.0000
    0.0000   -0.5295   -0.3893    0.0000   -0.0000   -0.2441    0.0923    0.2743   -0.6518
    0.0000    0.4669   -0.6350    0.0000    0.0000    0.2176    0.5757    0.0000    0.0000
    0.0000   -0.2973   -0.2186   -0.0000   -0.0000    0.8694   -0.3286   -0.0000    0.0000
   -0.4352    0.0000   -0.0000   -0.5573    0.0000    0.0000         0    0.6518    0.2743
   -0.5573   -0.0000   -0.0000    0.4352   -0.7071    0.0000   -0.0000    0.0000   -0.0000
   -0.5573    0.0000   -0.0000    0.4352    0.7071         0    0.0000   -0.0000   -0.0000
   -0.4352         0   -0.0000   -0.5573    0.0000   -0.0000         0   -0.6518   -0.2743

    0.0000    0.3893   -0.5295    0.0000    0.0000   -0.0923   -0.2441   -0.7068   -0.0208
    0.0000   -0.4958   -0.3646   -0.0000   -0.0000   -0.7373    0.2787    0.0000   -0.0000
   -0.0000    0.3893   -0.5295   -0.0000    0.0000   -0.0923   -0.2441    0.7068    0.0208
    0.0000   -0.6350   -0.4669    0.0000    0.0000    0.5757   -0.2176    0.0000   -0.0000
   -0.0000    0.2186   -0.2973   -0.0000   -0.0000    0.3286    0.8694   -0.0000   -0.0000
   -0.4352         0   -0.0000    0.5573   -0.0000    0.0000         0   -0.0208    0.7068
   -0.5573         0   -0.0000   -0.4352    0.7071    0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
   -0.5573   -0.0000   -0.0000   -0.4352   -0.7071   -0.0000   -0.0000    0.0000    0.0000
   -0.4352         0   -0.0000    0.5573   -0.0000         0         0    0.0208   -0.7068

    2.5616    2.1358    2.1358    1.5616    1.0000    0.6622    0.6622    0.0000    0.0000
```



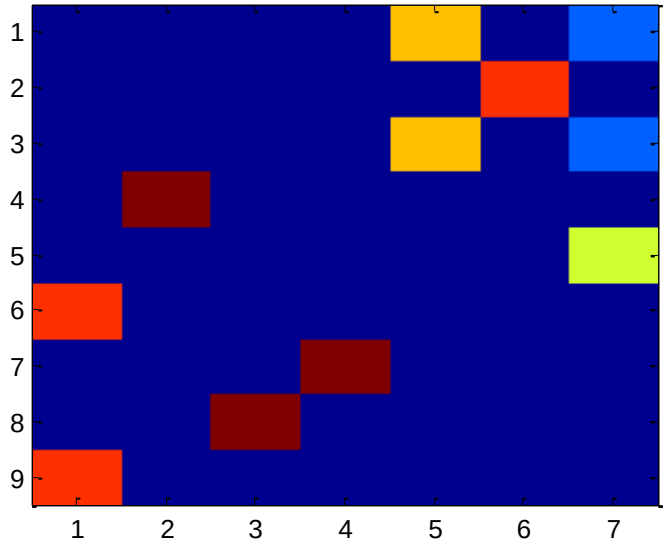


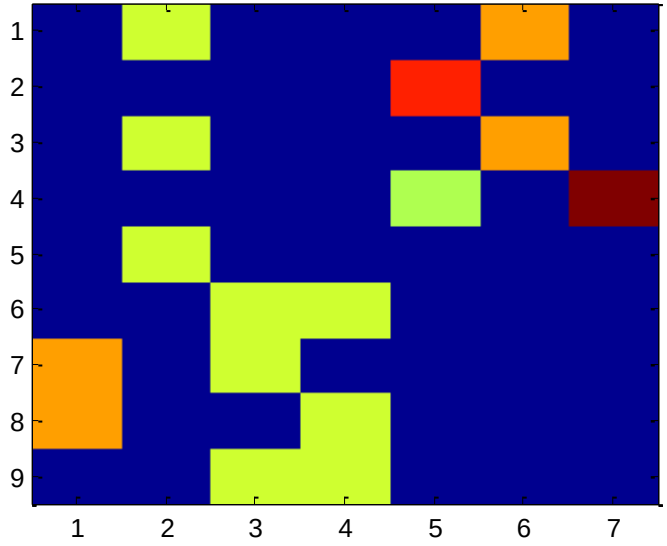
Неотрицательные матричные разложения




```
S = sparse([1 1 2 2 3 3 4 4 6 6 7 7 8 8 8 9 9 5 4 7], ...
           [2 4 1 3 2 4 1 5 7 8 8 9 6 7 9 8 7 4 3 6], 1)
[U,V] = nnmf(S,7);
disp(U)
disp(V')
```

```
         0         0    0.0000         0    1.1234    0.0000    0.4880
         0         0    0.0000    0.0000         0    1.4142    0.0000
         0         0    0.0000         0    1.1234    0.0000    0.4880
         0         0    0.0000    1.7070    0.0000    0.0308         0
    0.0000    0.0000         0         0         0         0    1.0000
    0.0006    1.4145         0         0    0.0000         0         0
    2.8290    1.4145         0    0.0000    0.0000         0         0
    0.0000    0.0000    1.7321         0         0         0    0.0000
    0.0006    1.4145         0         0    0.0000         0         0

    0.0000         0         0    0.5731    0.0000    0.7071         0
    0.0000         0         0         0    0.8901    0.0000    0.0000
    0.0000         0         0    0.5731    0.0000    0.7071         0
    0.0000         0         0         0    0.4557         0    1.0000
         0         0         0    0.5858         0         0         0
    0.7071         0    0.5774         0    0.0000         0         0
         0    0.7072    0.5774         0         0         0         0
    0.0000    0.7070         0         0    0.0000    0.0000         0
    0.7071         0    0.5774         0    0.0000         0         0
```





Spectral modularity maximization

[Newman, 2006]

Если $x_i \in \{\pm 1\}$**, то**

$$Q = \frac{1}{2n}\sum_{ij}\left(A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m}\right)(x_i x_j + 1)\text{, тогда}$$

$$\frac{1}{2n}\sum_{ij}\underbrace{\left(A_{ij} - \frac{k_i k_j}{2m}\right)}_{B_{ij}} x_i x_j \to \min .$$

Вычислить $k = \deg(A)$**,**

$$B = A - \frac{1}{2m} k k^{\mathrm{T}}\text{,}$$

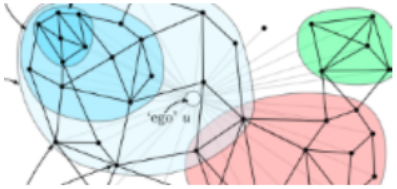
Найти max с.в. $Bv = \lambda v$

$$\mathrm{sgn}(v)$$

т.е. в задаче на с.з. используют разные матрицы…

Задача

Выделение кругов пользователей в эго-подграфах графов социальной сети



Knowledge • 122 teams

Learning Social Circles in Networks

Enter/Merge by

Tue 6 May 2014 Tue 28 Oct 2014 (27 days to go)

Dashboard

Home
- Data
- Make a submission

Information
- Description
- Evaluation
- Rules
- FAQ
- Timeline

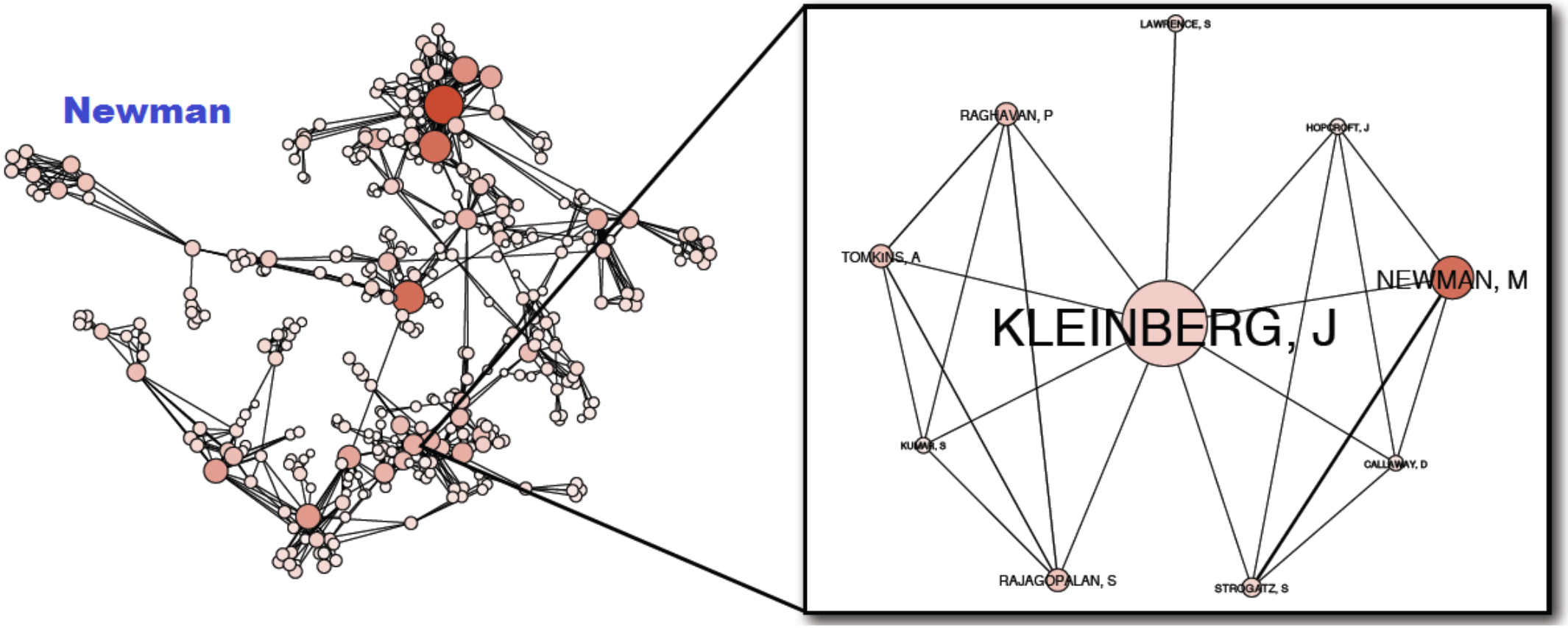
Forum

Competition Details » Get the Data » Make a submission

Model friend memberships to multiple circles

Social Circles help users organize their personal social networks. These are implemented as "circles" on Google+, and as "lists" on Facebook and Twitter. Each circle consists of a subset of a particular user's friends. Such circles may be disjoint, overlap, or be hierarchically nested.

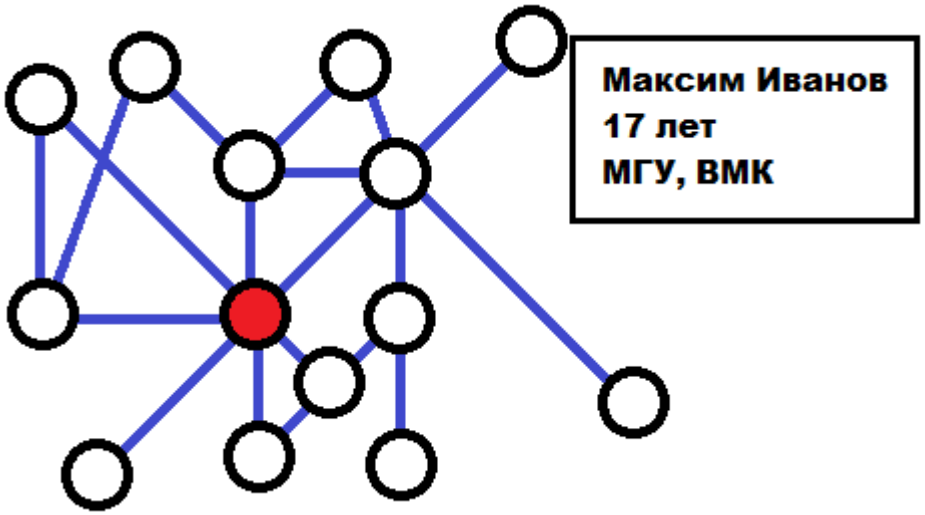
Эго-подграфы



окрестность порядка 1

(не обязательно связный граф – без порождающей вершины)

Задача определения кругов



Здесь: соцсеть =

граф + признаки вершин

Круг – подмножество друзей

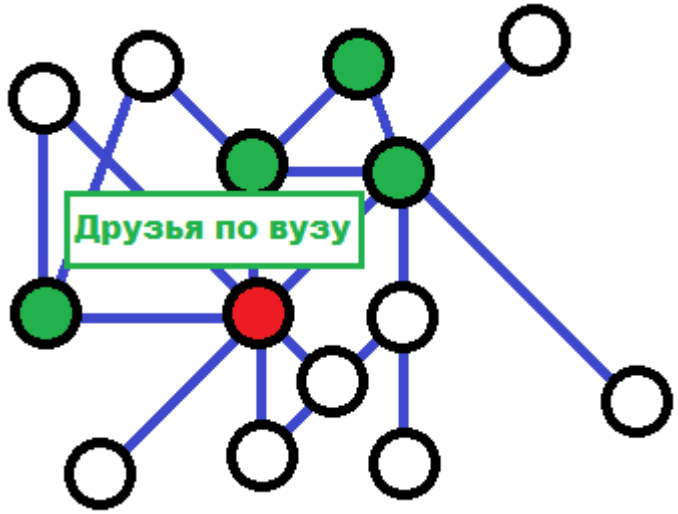
Определяет пользователь

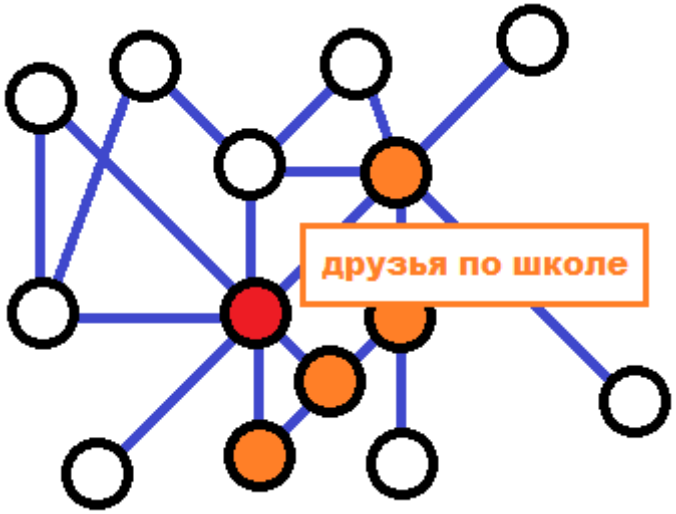
Себя в круг не включает

Круги могут пересекаться

Не все друзья в кругах

Что в данных говорит о круге?





Обучение

для 60 пользователей – круги

всего: 110 эго-сетей

всего: 27520 пользователей (основных + друзей + друзей друзей)

57 признаков для описания этих пользователей

Контроль

50 пользователей

Файл ответа

```
UserId,Predicted
25708,25709 25710;25711 25712
2473,2474 2475 2476 2477;2478 2479
...
```

Качество

«редакторское расстояние»

Качество – редакторское расстояние

операции (стоимость = 1)

добавление к кругу

создание круга с одним «юзером»

удаление из круга

удаление круга с одним «юзером»

```
1 2 3;4 5;6
1 2 3; 4 5   [delC]
2 3; 4 5   [del]
2 3; 4 5; 1   [insC]
2 3; 4 5 6; 1   [ins]
```

4 операции = 1 + 1 + 2

```
% редакторское расстояние
function cost = myeditloss(list1,list2)

n = max(length(list1),length(list2));
M = zeros(n); % матрица отличий кругов

for i = 1:n
    if i<=length(list1)
        set1 = list1{i};
    else
        set1 = [];
    end;
    for j = 1:n
        if j<=length(list2)
            set2 = list2{j};
        else
            set2 = [];
        end;
        M(i,j) = length(setxor(set1, set2));
    end;
end;
% венгерский алгоритм
[assignment,cost] = munkres(M);
```

	2 3	4 5 6	1
1 2 3	1	6	2
4 5	4	1	3
6	3	2	2

Описание метода решения –

сингулярное разложение матрицы смежности

Есть возможность использовать признаковые описания

Просто добавляется признаковая матрица

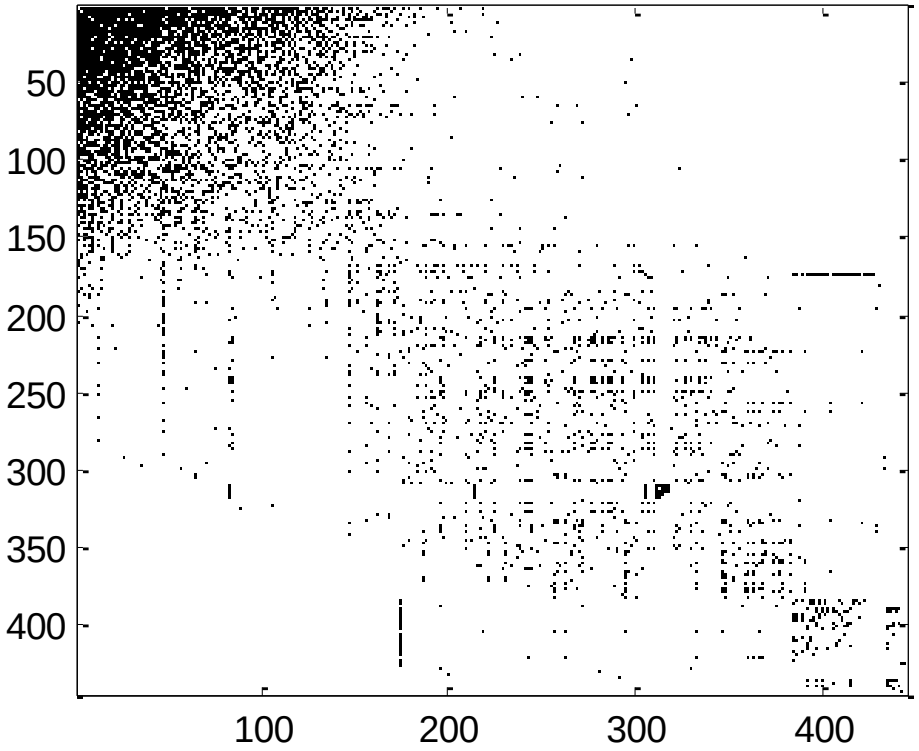

```
[U L V] = svds(M*M' + alpha*X*X', k_svd);
```

К сожалению, нет хорошего эффекта...

Вопрос: какую матрицу раскладывать,

смежности, Лапласа, с нормировками...

Оправдание алгоритма



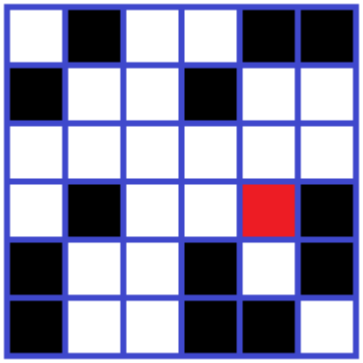
Матрица смежности (упорядоченность вершин по первой компоненте) действительно, есть факторизация

Идея: ввести рейтинг принадлежности к компоненте – значение в векторе сингулярного разложения

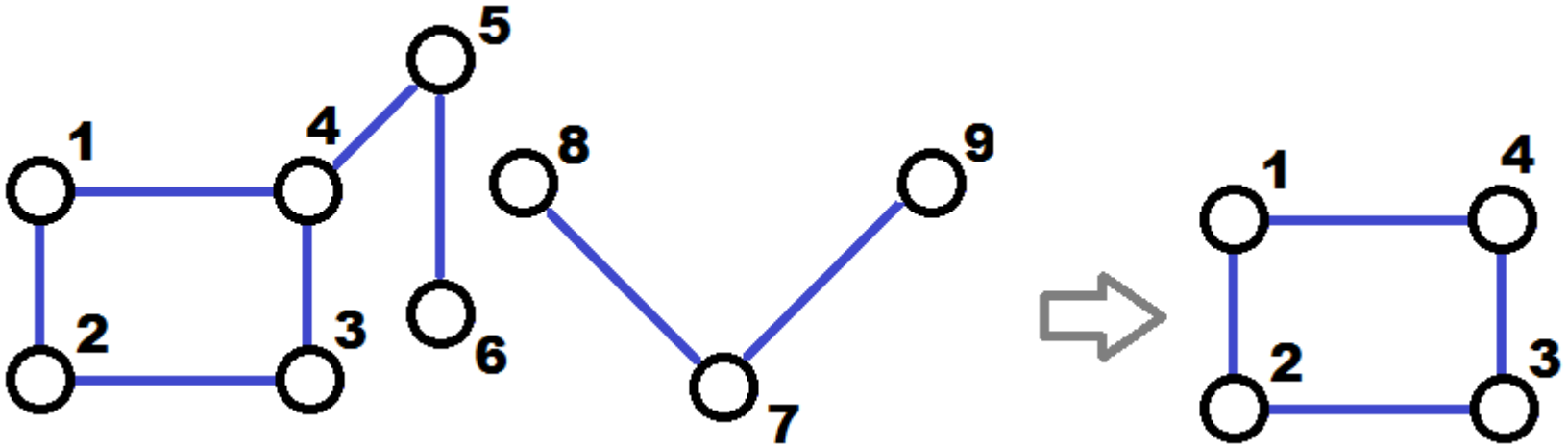
Этапы алгоритма

1. Получение матрицы смежности (симметризация)

не все матрицы были симметричными



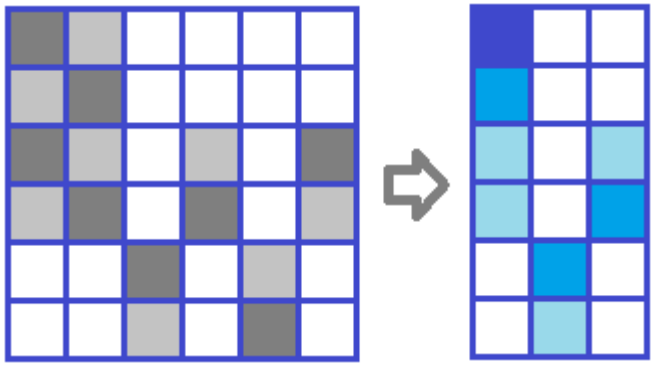
2. Удаление висячих вершин



Этапы алгоритма

3. SVD разложение, k=90

```
[U, ~, ~] = svds(M,min(min(size(M)),ksvd));
U = abs(U);
U = bsxfun(@rdivide,U,sqrt(sum(U.^2)));
RU = U'*U;
RUp = (RU>pcorr);

ans1 = {};
for i=1:size(U,2)
    Irup = RUp(i,:);
    if any(Irup)
        x = mean(U(:,Irup),2);
        circ_4ans = getcircleit2(M, x, fI, gc1, gc2, gc3);
        [ans1, isadd] = addcircle2ans(ans1, circ_4ans, padd);
        RUp(:,Irup) = false;
    end;
end;
ans1 = delintersects(ans1);
```



объединяем похожие компоненты, корреляция > порога = 0.44

Этапы алгоритма

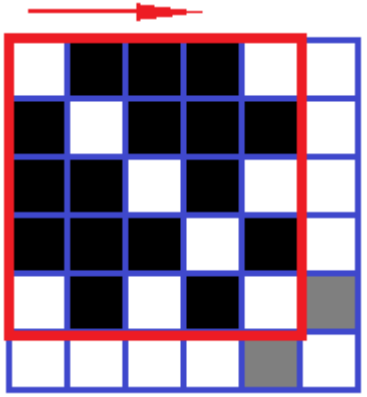
4. Добавление круга

Принадлежность круга > порога = 0.04

Идём по убыванию рейтинга, пока

связь с предыдущими вершинами > порог = 0.15

```
x(x<q) = -Inf;
[my, c] = max(x);
if isinf(my)
    c = [];
    return;
end;

while true
    y = alpha*sum(M(:,c),2) + x;
    y(c) = -Inf;
    [my,j] = max(y);
    if (isinf(my))
        break;
    end;
    if mean(M(c,j))<p
        break;
    end;
    c = [c, j];
end;

c = fI(c);
```



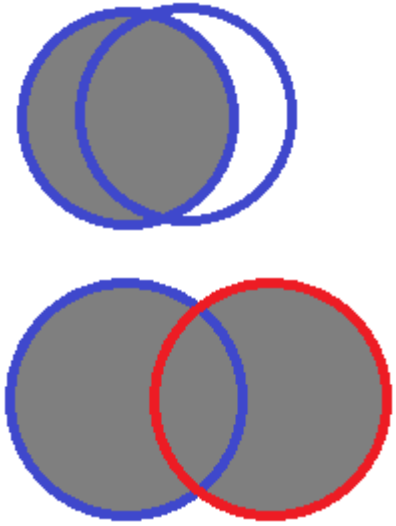
Этапы алгоритма

Рейтинг = лк числа связей с предыдущими вершинами + SVD-коэффициенты

5. Окончательное добавление

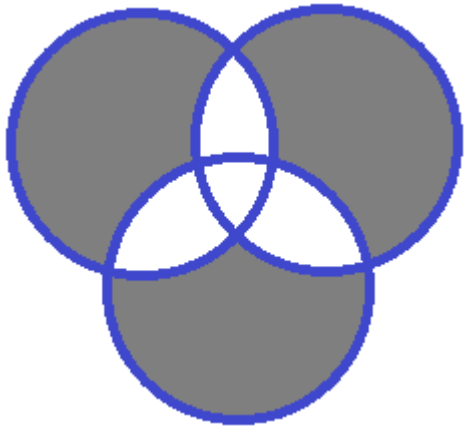
Если большое пересечение с уже существующим – не добавлять

```
function [anss, isadd] = addcircle2ans(anss, circle, p)

if isempty(circle)
    isadd = false;
    return;
end;

for j=1:length(anss)
    a = anss{j};
    p_jac = length(intersect(a,circle))/length(union(a,circle));
    if p_jac > p
        isadd = false;
        return;
    end
end

anss{end+1} = circle;
isadd = true;
```



Этапы алгоритма

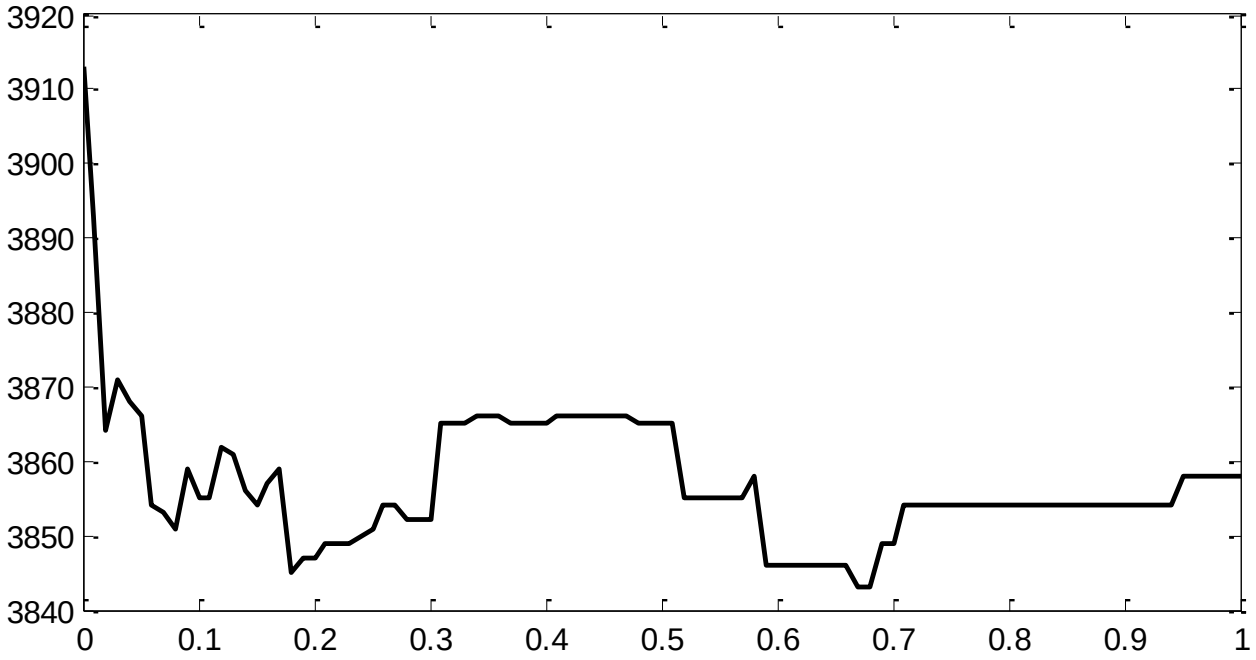
6. Удаление пересечений



следует из функционала качества

1) Настройка параметров

Типичная картинка



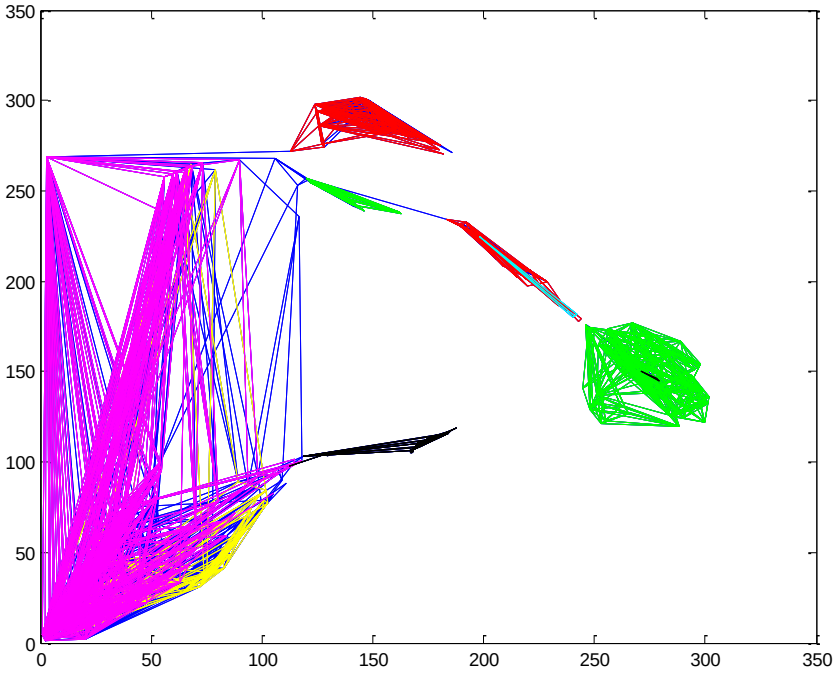
порог в добавлении кругов.

Уже по картинке видно:

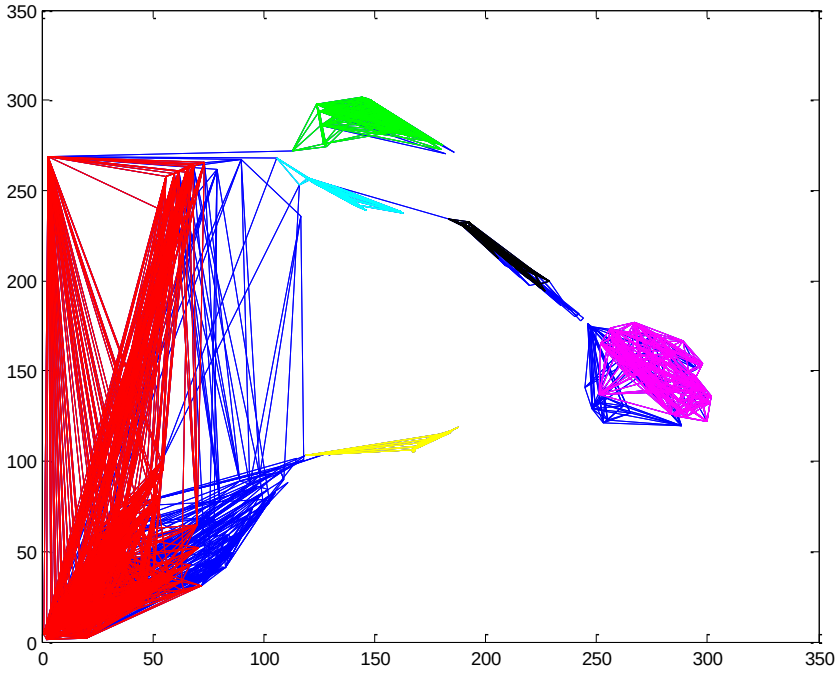
Мало статистики!!!

Работа алгоритма

Визуализация по 1й и 2й SVD-компоненте



правильный ответ

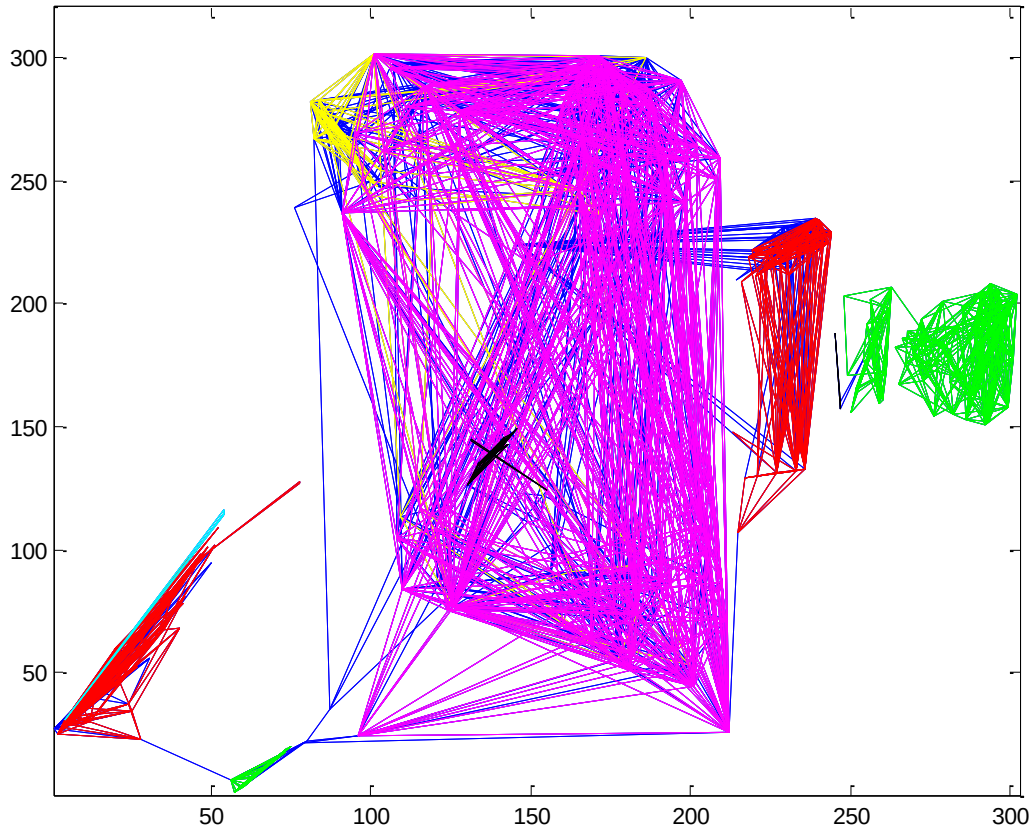


ответ алгоритма

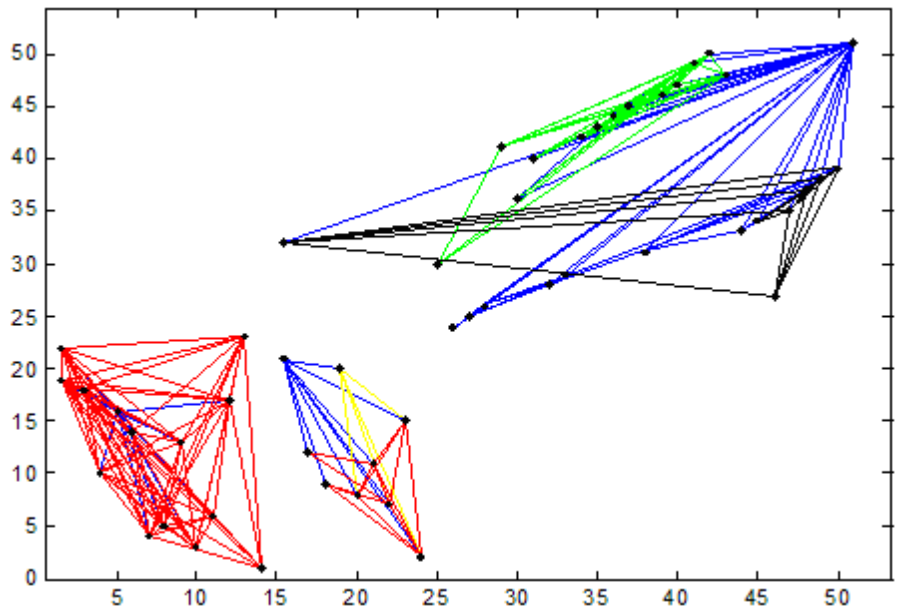
Хитрость: координаты – не значения компонент, а tiedrank…

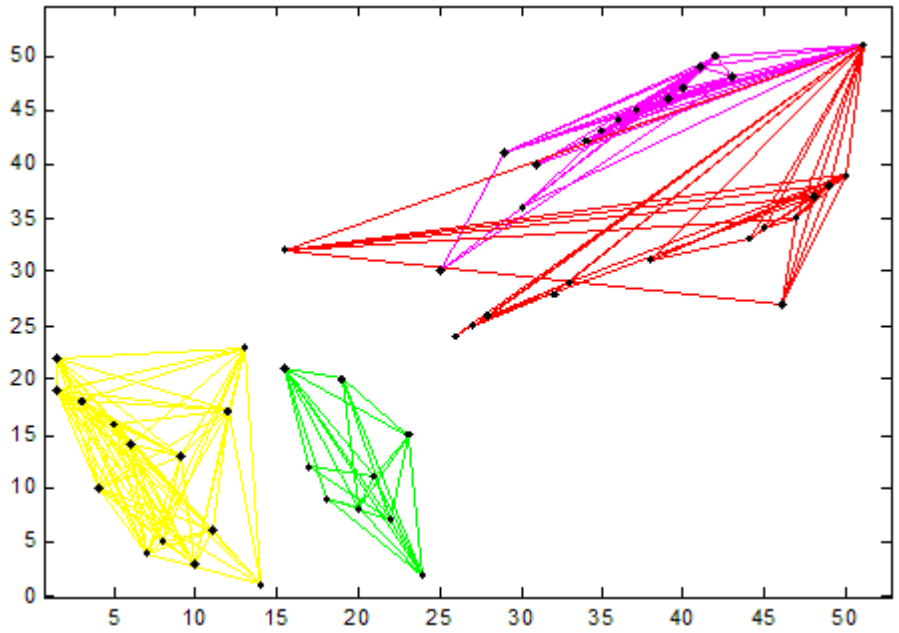
Работа алгоритма

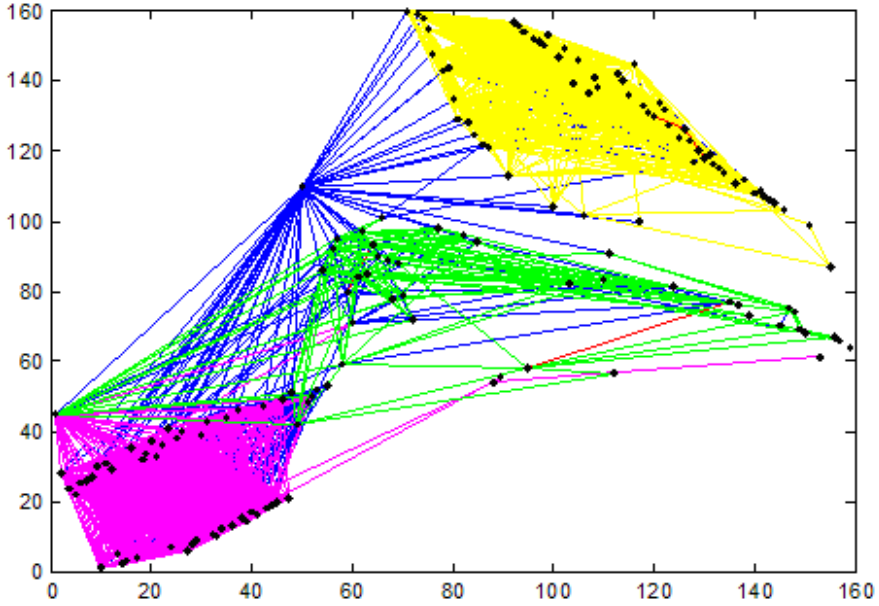
Визуализация по 3й и 4й SVD-компоненте

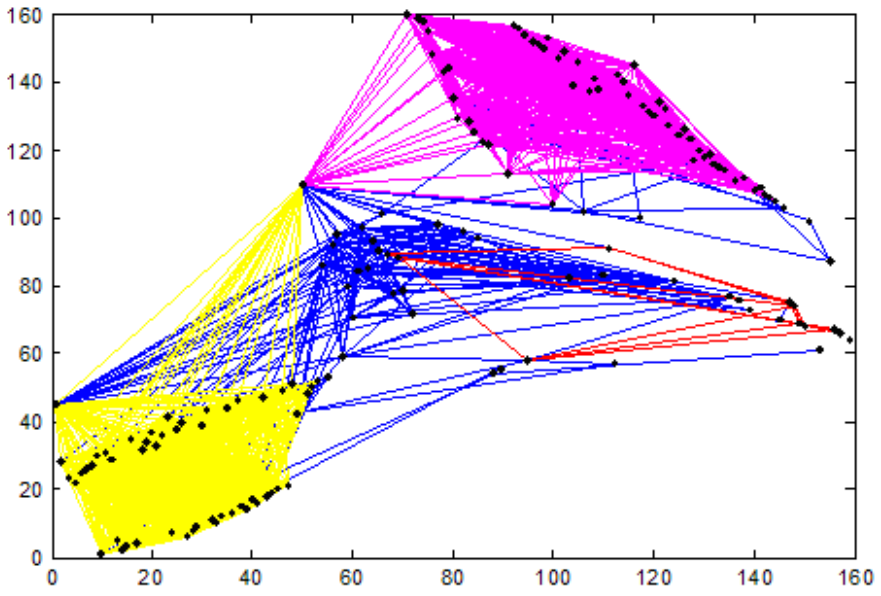


Работа алгоритма



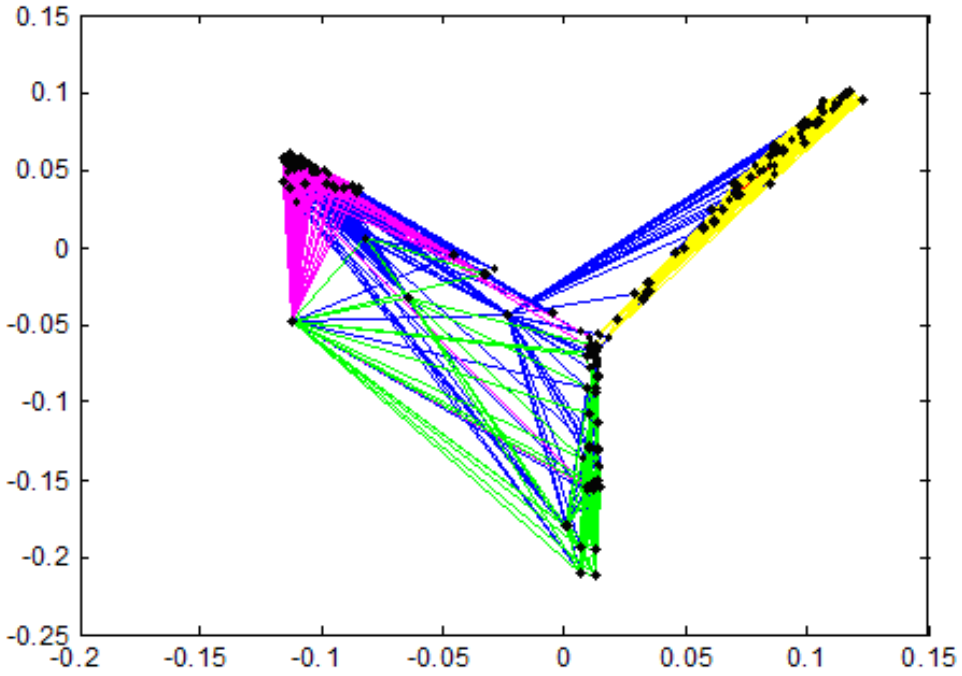






MDS

Можно проецировать граф на плоскость с сохранением расстояний



Но получается не очень информативно

Что можно было сделать ещё…

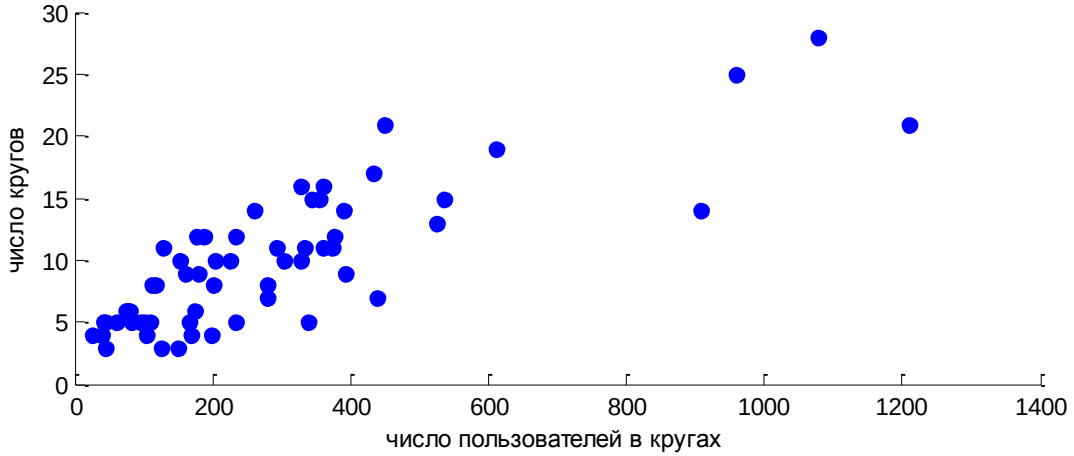
1) кластеризация в пространстве первых компонент SVD

(испугался трудоёмкости и неочевидности)

2) грамотное выделение кластеров

(шёл от самой рейтинговой вершины – на модельных примерах может быть провальной стратегией)

3) можно было попробовать восстанавливать число кругов…



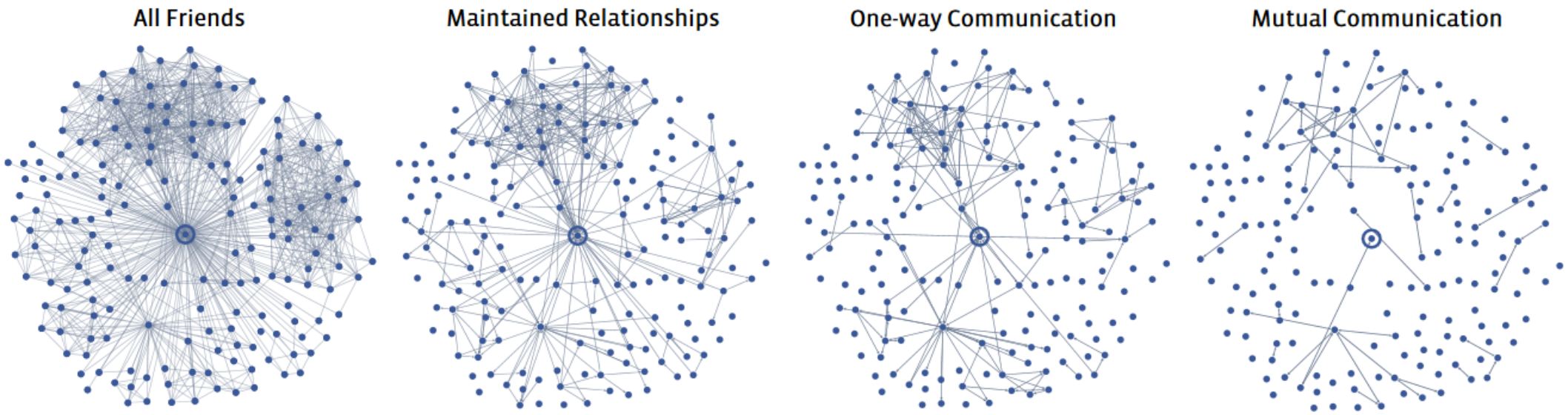
но, как правило, это не работает!

4) объединение ответов кластеризаторов

(собственно, уже делал через SVD – хорошая тема)

Ещё несколько фактов

Что такое «реальные друзья»?



http://overstated.net/2009/03/09/maintained-relationships-on-facebook

Robin Ian MacDonald Dunbar

inner circle: 5

sympathy group: 12-15

semi-regular group: 50

stable social group: 150 (the Dunbar number)

friends of friends group (weak ties): 500

Объяснения малого мира

Homophily – принцип дружбы с похожими на нас, поэтому много треугольников

Weak ties – связи с дальними группами

Что полезно

igraph – The network analysis package
http://igraph.org/

NetworkX: Python software for network analysis (v1.5)
http://networkx.lanl.gov
3
Gephi: Java interactive visualization platform and toolkit
http://gephi.org

Л.Жуков курс Structural Analysis and Visualization of Networks в ВШЭ
http://leonidzhukov.net/hse/2015/socialnetworks/