

Задание 1. Байесовские рассуждения

Курс: Байесовские методы в машинном обучении, 2016

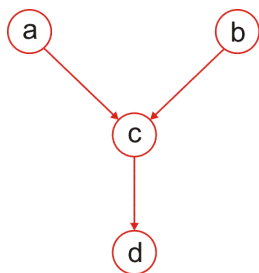
Начало выполнения задания: 3 сентября
 Срок сдачи: **17 сентября (суббота), 23:59.**
 Среда для выполнения задания – PYTHON 2.

Содержание

Вероятностные модели	1
Вариант 1	2
Вариант 2	3
Вариант 3	3
Оформление задания	4

Вероятностные модели посещаемости курса

Рассмотрим модель посещаемости студентами ВУЗа одной лекции по курсу. Пусть аудитория данного курса состоит из студентов профильного факультета, а также студентов других факультетов. Обозначим через a количество студентов, поступивших на профильный факультет, а через b – количество студентов других факультетов. Пусть студенты профильного факультета посещают лекцию с некоторой вероятностью p_1 , а студенты остальных факультетов – с вероятностью p_2 . Обозначим через c количество студентов, посетивших данную лекцию. Тогда случайная величина $c|a, b$ есть сумма двух случайных величин, распределённых по биномиальному закону $\text{Bin}(a, p_1)$ и $\text{Bin}(b, p_2)$ соответственно. Пусть далее на лекции по курсу ведётся запись студентов. При этом каждый студент записывается сам, а также, быть может, записывает своего товарища, которого на лекции на самом деле нет. Пусть студент записывает своего товарища с некоторой вероятностью p_3 . Обозначим через d общее количество записавшихся на данной лекции. Тогда случайная величина $d|c$ представляет собой сумму c и случайной величины, распределённой по биномиальному закону $\text{Bin}(c, p_3)$. Для завершения задания вероятностной модели осталось определить априорные вероятности для a и для b . Пусть обе эти величины распределены равномерно в своих интервалах $[a_{\min}, a_{\max}]$ и $[b_{\min}, b_{\max}]$ (дискретное равномерное распределение). Таким образом, мы определили следующую вероятностную модель:



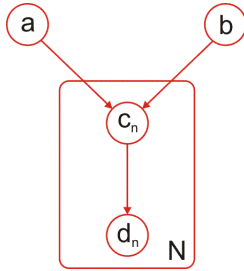
$$\begin{aligned}
 p(a, b, c, d) &= p(d|c)p(c|a, b)p(a)p(b), \\
 d|c &\sim c + \text{Bin}(c, p_3), \\
 c|a, b &\sim \text{Bin}(a, p_1) + \text{Bin}(b, p_2), \\
 a &\sim \text{Unif}[a_{\min}, a_{\max}], \\
 b &\sim \text{Unif}[b_{\min}, b_{\max}].
 \end{aligned} \tag{1}$$

Рассмотрим несколько упрощённую версию модели 1. Известно, что биномиальное распределение $\text{Bin}(n, p)$ при большом количестве испытаний и маленькой вероятности успеха может быть с высокой точностью приближено пуассоновским распределением $\text{Poiss}(\lambda)$ с $\lambda = np$. Известно также, что сумма двух пуассоновских распределений с параметрами λ_1 и λ_2 есть пуассоновское распределение с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$ (для биномиальных распределений это неверно). Таким образом, мы можем сформулировать вероятностную модель, которая

является приближённой версией модели **1**:

$$\begin{aligned}
 p(a, b, c, d) &= p(d|c)p(c|a, b)p(a)p(b), \\
 d|c &\sim c + \text{Bin}(c, p_3), \\
 c|a, b &\sim \text{Poiss}(ap_1 + bp_2), \\
 a &\sim \text{Unif}[a_{\min}, a_{\max}], \\
 b &\sim \text{Unif}[b_{\min}, b_{\max}].
 \end{aligned} \tag{2}$$

Рассмотрим теперь модель посещения нескольких лекций курса. Будем считать, что посещения отдельных лекций являются независимыми. Тогда:



$$\begin{aligned}
 p(a, b, c_1, \dots, c_N, d_1, \dots, d_N) &= p(a)p(b) \prod_{n=1}^N p(d_n|c_n)p(c_n|a, b), \\
 d_n|c_n &\sim c_n + \text{Bin}(c_n, p_3), \\
 c_n|a, b &\sim \text{Bin}(a, p_1) + \text{Bin}(b, p_2), \\
 a &\sim \text{Unif}[a_{\min}, a_{\max}], \\
 b &\sim \text{Unif}[b_{\min}, b_{\max}].
 \end{aligned} \tag{3}$$

По аналогии с моделью **2** можно сформулировать упрощённую модель для модели **3**:

$$\begin{aligned}
 p(a, b, c_1, \dots, c_N, d_1, \dots, d_N) &= p(a)p(b) \prod_{n=1}^N p(d_n|c_n)p(c_n|a, b), \\
 d_n|c_n &\sim c_n + \text{Bin}(c_n, p_3), \\
 c_n|a, b &\sim \text{Poiss}(ap_1 + bp_2), \\
 a &\sim \text{Unif}[a_{\min}, a_{\max}], \\
 b &\sim \text{Unif}[b_{\min}, b_{\max}].
 \end{aligned} \tag{4}$$

Задание состоит из трёх вариантов.

Вариант 1

Рассматривается модель **2** с параметрами $a_{\min} = 75$, $a_{\max} = 90$, $b_{\min} = 500$, $b_{\max} = 600$, $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.01$, $p_3 = 0.3$. Провести на компьютере следующие исследования:

1. Найти математические ожидания и дисперсии априорных распределений для всех параметров a , b , c , d .
2. Пронаблюдать, как происходит уточнение прогноза для величины c по мере прихода новой косвенной информации. Для этого построить графики и найти мат.ожидание и дисперсию для распределений $p(c)$, $p(c|a)$, $p(c|b)$, $p(c|d)$, $p(c|a, b)$, $p(c|a, b, d)$ при параметрах a , b , d , равных мат.ожиданиям своих априорных распределений, округленных до ближайшего целого.
3. Определить, какая из величин a , b , d вносит наибольший вклад в уточнение прогноза для величины c (в смысле дисперсии распределения). Для этого убедиться в том, что $\mathbb{D}[c|d] < \mathbb{D}[c|b]$ и $\mathbb{D}[c|d] < \mathbb{D}[c|a]$ для любых допустимых значений a , b , d . Найти множество точек (a, b) таких, что $\mathbb{D}[c|b] < \mathbb{D}[c|a]$. Являются ли множества $\{(a, b) \mid \mathbb{D}[c|b] < \mathbb{D}[c|a]\}$ и $\{(a, b) \mid \mathbb{D}[c|b] \geq \mathbb{D}[c|a]\}$ линейно разделимыми?
4. Провести временные замеры по оценке всех необходимых распределений $p(c)$, $p(c|a)$, $p(c|b)$, $p(c|d)$, $p(c|a, b)$, $p(c|a, b, d)$, $p(d)$.
5. Провести исследования из пп. 1–4 для точной модели **1** и сравнить результаты с аналогичными для модели **2**. Привести пример оценки параметра, для которого проявляется разница между моделью **1** и **2**. Объяснить причины подобного результата.

Взять в качестве диапазона допустимых значений для величины c интервал $[0, a_{\max} + b_{\max}]$, а для величины d – интервал $[0, 2(a_{\max} + b_{\max})]$.

При оценке выполнения задания будет учитываться эффективность программного кода.

Вариант 2

Рассматривается модель 2 с параметрами $a_{min} = 75$, $a_{max} = 90$, $b_{min} = 500$, $b_{max} = 600$, $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.01$, $p_3 = 0.3$. Провести на компьютере следующие исследования:

1. Найти математические ожидания и дисперсии априорных распределений для всех параметров a , b , c , d .
2. Пронаблюдать, как происходит уточнение прогноза для величины b по мере прихода новой косвенной информации. Для этого построить графики и найти мат.ожидание и дисперсию для распределений $p(b)$, $p(b|a)$, $p(b|d)$, $p(b|a, d)$ при параметрах a , d , равных мат.ожиданиям своих априорных распределений, округленных до ближайшего целого.
3. Определить, при каких соотношениях параметров p_1 , p_2 изменяется относительная важность параметров a, b для оценки величины c . Для этого найти множество точек $\{(p_1, p_2) \mid \mathbb{D}[c|b] < \mathbb{D}[c|a]\}$ при a, b , равных мат.ожиданиям своих априорных распределений, округленных до ближайшего целого. Являются ли множества $\{(p_1, p_2) \mid \mathbb{D}[c|b] < \mathbb{D}[c|a]\}$ и $\{(p_1, p_2) \mid \mathbb{D}[c|b] \geq \mathbb{D}[c|a]\}$ линейно разделимыми?
4. Провести временные замеры по оценке всех необходимых распределений $p(c)$, $p(c|a)$, $p(c|b)$, $p(b|a)$, $p(b|d)$, $p(b|a, d)$, $p(d)$.
5. Провести исследования из пп. 1–4 для точной модели 1 и сравнить результаты с аналогичными для модели 2. Привести пример оценки параметра, для которого проявляется разница между моделью 1 и 2. Объяснить причины подобного результата.

Взять в качестве диапазона допустимых значений для величины c интервал $[0, a_{max} + b_{max}]$, а для величины d – интервал $[0, 2(a_{max} + b_{max})]$.

При оценке выполнения задания будет учитываться эффективность программного кода.

Вариант 3

Рассматривается модель 4 с параметрами $a_{min} = 75$, $a_{max} = 90$, $b_{min} = 500$, $b_{max} = 600$, $p_1 = 0.1$, $p_2 = 0.01$, $p_3 = 0.3$, $N = 50$. Провести на компьютере следующие исследования:

1. Найти математические ожидания и дисперсии априорных распределений для всех параметров a , b , c_n , d_n .
2. Реализовать генератор выборки d_1, \dots, d_N из модели при заданных значениях параметров a, b .
3. Пронаблюдать, как происходит уточнение прогноза для величины b по мере прихода новой косвенной информации. Для этого построить графики и найти мат.ожидание и дисперсию для распределений $p(b)$, $p(b|d_1), \dots, p(b|d_1, \dots, d_N)$, где выборка d_1, \dots, d_N 1) сгенерирована из модели при параметрах a, b , равных мат.ожиданиям своих априорных распределений, округленных до ближайшего целого и 2) $d_1 = \dots = d_N$, где d_n равно мат.ожиданию своего априорного распределения, округленного до ближайшего целого. Провести аналогичный эксперимент, если дополнительно известно значение a . Сравнить результаты двух экспериментов.
4. Провести временные замеры по оценке всех необходимых распределений $p(c_n)$, $p(d_n)$, $p(b|d_1, \dots, d_n)$, $p(b|a, d_1, \dots, d_n)$.
5. Провести исследования из пп. 1–4 для точной модели 3 и сравнить результаты с аналогичными для модели 4.

Взять в качестве диапазона допустимых значений для величины c интервал $[0, a_{max} + b_{max}]$, а для величины d – интервал $[0, 2(a_{max} + b_{max})]$.

При оценке выполнения задания будет учитываться эффективность программного кода.

Оформление задания

Выполненное задание следует отправить письмом по адресу *bayesml@gmail.com* с заголовком письма

«[БММО16] Практика 1, Фамилия Имя, Номер варианта».

Убедительная просьба присылать выполненное задание только один раз с окончательным вариантом. Также убедительная просьба строго придерживаться заданных ниже прототипов реализуемых функций (для проверки задания используются, в том числе, автоматические процедуры, которые являются чувствительными к неверным прототипам).

Номер варианта вычисляется как $(s \bmod 3) + 1$, где s — сумма кодов букв своей фамилии в кодировке UTF-8. В питоне это выглядит так:

$$\text{sum}([\text{ord}(x) \text{ for } x \text{ in } u'\text{Фамилия}']) \% 3 + 1$$

Присланный вариант задания должен содержать в себе:

- Текстовый файл в формате PDF с указанием ФИО и номера варианта, содержащий описание всех проведённых исследований (вывод необходимых формул, графики, анализ и выводы). Файл должен называться `surname.pdf`, где `surname` — фамилия студента.
- Python модуль со всеми требуемыми функциями в соответствии с прототипами, приведенными ниже. Модуль должен называться `surname.py`, где `surname` — фамилия студента.

Требования к реализации

Все исходные коды должны располагаться в одном модуле `surname.py`. Распределения должны быть реализованы в виде **отдельных функций**. Прототип функции для оценки распределения $p(c|a, d)$ показан в таблице 1. Прототипы функций для других распределений выглядят аналогично. Если в распределении переменных до или после `|` несколько, то в названии функции они идут в алфавитном порядке. Функция для оценки распределения $p(b|a, d_1, \dots, d_N)$ для модели 3 имеет название `pb_ad`, а входной параметр d является массивом длины N .

Таблица 1: Прототип функции для оценки распределения $p(c|a, d)$ для модели 1 и 2

<code>p, c = pc_ad(a, d, params, model)</code>
<p>ВХОД a – значение параметра a; d – значение параметра d; $params$ – набор параметров вероятностной модели, словарь с ключами 'amin', 'amax', 'bmin', 'bmax', 'p1', 'p2', 'p3'; $model$ – номер модели;</p>
<p>ВЫХОД p – распределение вероятности, numpy array длины $\text{len}(c)$; c – носитель распределения, numpy array.</p>

Таблица 2: Прототип функции для генерации выборки из распределения $p(d_1, \dots, d_N|a, b)$ для модели 3 и 4

<code>d = generate(N, a, b, params, model)</code>
<p>ВХОД N – количество лекций; a – значение параметра a; b – значение параметра b; $params$ – набор параметров вероятностной модели, словарь с ключами 'amin', 'amax', 'bmin', 'bmax', 'p1', 'p2', 'p3'; $model$ – номер модели;</p>
<p>ВЫХОД d – значения d_1, \dots, d_N, numpy array длины N.</p>