



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математических методов прогнозирования

Журавская Александра Валерьевна

Геометрический поиск симметричных объектов на цифровом изображении

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:

д.т.н., профессор

Л. М. Местецкий

Москва, 2018

Содержание

1	Введение	2
2	Постановка задачи	3
3	Метод решения задачи	4
3.1	Дискретное преобразование Фурье и его свойства	4
3.2	Приближенные вычисления угла наклона оси симметрии	8
3.3	Алгоритм поиска оси симметрии	9
4	Вычислительные эксперименты	10
5	Заключение	14
6	Приложение А. Данные для оценки величины Q	14
	Список литературы	19

1 Введение

В данной работе исследуется осевая симметрия двумерных объектов.

Решается задача определения наличия и поиска оси симметрии объектов на цифровом изображении.

Ось симметрии – прямая, разделяющая фигуру на две симметричные части. Ось симметрии, как и любая прямая, может быть задана точкой, через которую она проходит, и углом наклона к оси абсцисс.

Фигура на цифровом изображении имеет пиксельную структуру, в следствие чего симметрия в геометрическом смысле возможна лишь в частных случаях, когда угол наклона оси кратен 45 градусам. Требуется разработка меры симметричности дискретных объектов.

Задача определения меры симметричности и поиска осей симметрии возникает в множестве прикладных задач, например, в медицине существует задача обнаружения опухолей на цифровом изображении, для которых характерно наличие оси симметрии ([11]).

Наивный алгоритм поиска оси симметрии двумерного дискретного объекта имеет кубическую сложность: задавшись некоторой мерой сходства, для каждой пары граничных точек необходимо провести прямую, проходящую через них, и сравнить в выбранной мере две половины фигуры, лежащие по разные стороны от проведенной прямой.

Существуют известные эффективные алгоритмы решения поставленной задачи, среди них можно выделить два класса алгоритмов: методы, главной частью которых является сравнение двух половин изображения (контура, скелетного представления) ([3], [4], [5], [6]), и методы анализа полутоновых изображений, например, с применением интегральных преобразований ([7], [8], [9]). В [10] изложен алгоритм уточнения оси симметрии для бинарных дискретных изображений.

В данной работе для повышения эффективности по сравнению с наивным алгоритмом предлагается использовать информацию о дескрипторе Фурье контура, описанном в [1]. Идея использования Фурье-дескриптора контура для определения зеркальной симметрии ранее не применялась, однако были исследования по определению центральной симметрии в [11]. Предлагаемый алгоритм имеет квадратичную по количеству точек в контуре сложность, также указаны дальнейшие направления исследования по увеличению вычислительной эффективности.

В главе 2 описана полная постановка задачи. Глава 3 содержит математическое обоснование и полное описание созданного метода решения задачи и алгоритма, реализующего

данный метод. В главе 4 описаны вычислительные эксперименты, подтверждающие корректность, работоспособность и эффективность алгоритма.

2 Постановка задачи

Входными данными являются бинарные изображения, содержащие силуэты фигур. Задача состоит в решении вопроса о наличии оси симметрии у данных объектов. В случае, если ось симметрии существует, дополнительно требуется описать ее следующими параметрами: координаты точки, лежащей на оси, и угол наклона найденной прямой к оси абсцисс.

Поиск симметричных объектов на цифровом изображении в общем случае подразумевает решение следующих подзадач (рис. 1): предобработка изображения; выделение отдельных объектов (сегментация); последовательный анализ каждого из найденных объектов на наличие осей симметрии. В данной работе предлагается решение подзадачи определения наличия и поиск параметров оси симметрии бинарного силуэта (рис. 2).



Рис. 1: Решение задачи геометрического поиска симметричных объектов

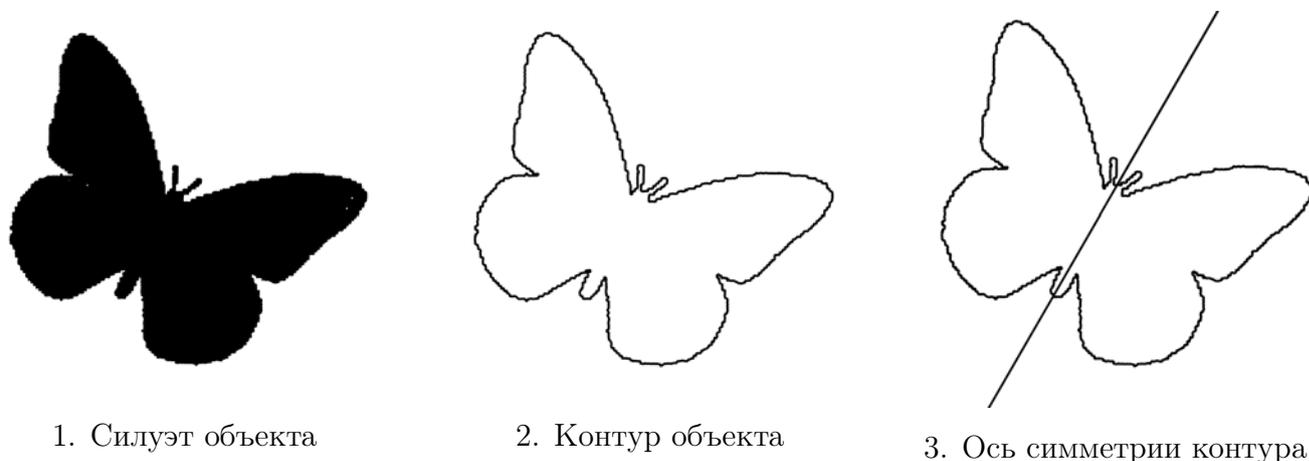


Рис. 2: Решение задачи определения оси симметрии бинарного силуэта

Итак, если первые две подзадачи уже решены, в качестве входных данных имеется бинарная матрица M , где элемент m_{ij} имеет смысл индикатора принадлежности пикселя изображения с номером (i, j) анализируемому объекту.

Пусть исходный объект является односвязной областью, тогда можем выписать последовательность номеров пикселей, образующих контур исследуемой фигуры: $\{(a_l, b_l)\}_{l=0}^{N-1}$. Данная последовательность точек состоит из граничных точек силуэта в 4-смежной структуре соседства, и описывает замкнутую кривую, связную в 8-смежной структуре соседства. Методы построения контура описаны в [2, с. 66-90]. Контур можно описать не единственным образом, в данной работе будем использовать следующие два вида описания:

- $\{(a_l, b_l)\}_{l=0}^{N-1}$ представляют собой последовательность всех точек контура;
- $\{(a_l, b_l)\}_{l=0}^{N-1}$ образуют последовательность вершин многоугольника минимального периметра, точно описывающего фигуру.

Далее решаем задачу поиска оси симметрии для полученного контура фигуры.

Ось симметрии контура – прямая, разделяющая контур на две симметричные части. Ось симметрии может быть задана точкой на контуре, через которую она проходит, и углом наклона этой прямой к оси абсцисс.

Целью работы являются ответ на вопрос о существовании оси симметрии у исследуемого контура и в случае положительного ответа поиск такой оси.

3 Метод решения задачи

3.1 Дискретное преобразование Фурье и его свойства

Представим контур фигуры как последовательность точек в комплексной плоскости:

$$U = \{u_l\}_{l=0}^{N-1}, u_l = a_l + i \cdot b_l, l = \overline{0, N-1}.$$

Выполним для U дискретное преобразование Фурье:

$$f_l = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \cdot \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot k) = u_0 + \sum_{k=1}^{N-1} u_k \cdot \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot k), l = \overline{0, N-1}.$$

Последовательность $F = \{f_l\}_{l=0}^{N-1}$ называется дескриптором Фурье фигуры, описанной контуром U .

Пусть x^* – комплексное сопряжение x ; для удобства введем обозначение $u_N \equiv u_0$.

Введем новый контур \hat{U} (Рис. 3):

$$\hat{U} = \{u_{N-l}^*\}_{l=0}^{N-1}, l = \overline{0, N-1}.$$

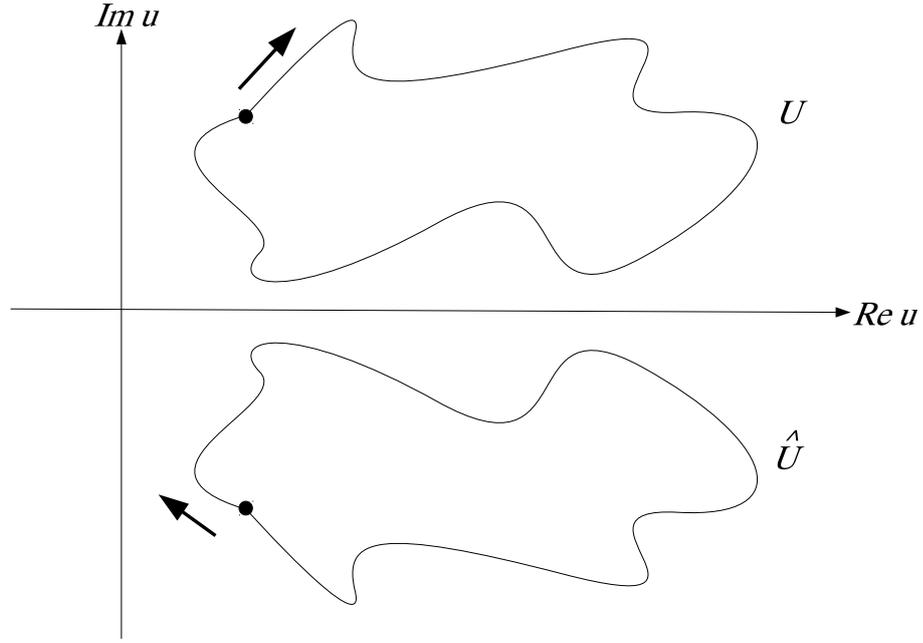


Рис. 3: Контуры U и \hat{U}

Утверждение 1. Для дескриптора Фурье $\hat{F} = \{\hat{f}_l\}_{l=0}^{N-1}$ контура \hat{U} выполнены равенства $\hat{f}_l = f_l^*$, $l = 0, N-1$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\hat{f}_l &= \sum_{k=0}^{N-1} u_{N-k}^* \cdot \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot k) = u_0^* + \sum_{m=1}^{N-1} u_m^* \cdot \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot (N-m)) = \\
&= u_0^* + \sum_{m=1}^{N-1} u_m^* \cdot \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot N) \cdot \exp(i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot m) = \\
&= u_0^* + \sum_{m=1}^{N-1} u_m^* \cdot 1 \cdot \exp(i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot m) = u_0^* + \sum_{m=1}^{N-1} u_m^* \cdot \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot m)^* = \\
&= u_0^* + \sum_{m=1}^{N-1} (u_m \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot m))^* = u_0^* + (\sum_{m=1}^{N-1} u_m \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot m))^* = \\
&= u_0^* + (f_l - u_0)^* = f_l^*, \quad l = 0, N-1.
\end{aligned}$$

□

Определение 1. Контур U будем называть идеальным, если выполнены условия: $Im(u_0) = 0$, $u_l = u_{N-l}^*$, $l = 1, N-1$.

Идеальный контур описывает фигуру, ось симметрии которой совпадает с вещественной осью комплексной плоскости (Рис. 4).

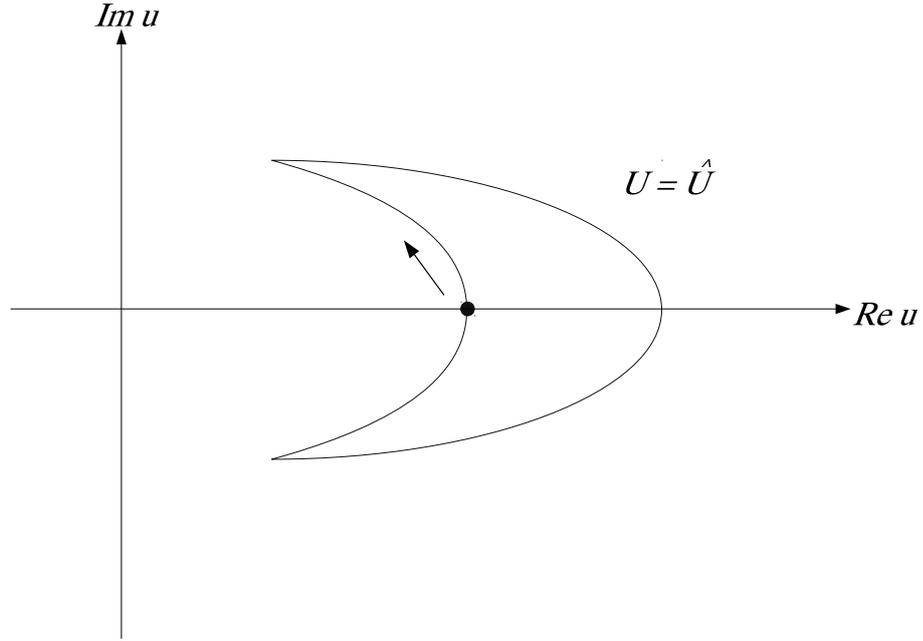


Рис. 4: Пример идеального контура

Утверждение 2 (Необходимое условие идеального контура). Пусть $U = \{u_l\}_{l=0}^{N-1}$ – идеальный контур. Тогда для дескриптора Фурье $F = \{f_l\}_{l=0}^{N-1}$ контура U выполнены равенства $Im f_l = 0, l = \overline{0, N-1}$.

Доказательство. Ясно, что в случае идеального контура $U = \hat{U}$. Тогда выполнены равенства $f_l = \hat{f}_l, l = \overline{0, N-1}$. Из утверждения 1 верно также $f_l = \hat{f}_l^*, l = \overline{0, N-1}$. Значит, $Im f_l = Im \hat{f}_l = 0$ для всех $l \in \overline{0, N-1}$. \square

Исследуем поведение дескриптора Фурье при сдвиге и повороте контура.

Сдвиг на вектор Δu описывается так: $U' = \{u'_l\}_{l=0}^{N-1}, u'_l = u_l + \Delta u, l = \overline{0, N-1}$.

Найдем дескриптор Фурье:

$$\begin{aligned}
 f'_l &= \sum_{k=0}^{N-1} u'_k \cdot \exp(-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot k) = \\
 &= \sum_{k=0}^{N-1} u_k \cdot \exp(-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot k) + \Delta u \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \exp(-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot k) = \\
 &= \begin{cases} f_l + \Delta u, & \text{при } l = 0 \\ f_l, & \text{при } l \neq 0 \end{cases}.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Поворот вокруг точки $(0, 0)$ на угол α против часовой стрелки можно записать с помощью комплексной экспоненты: $U'' = \{u''_l\}_{l=0}^{N-1}, u''_l = u_l \cdot \exp(j\alpha), l = \overline{0, N-1}$. Коэффициенты ДПФ пересчитываются следующим образом:

$$f''_l = \sum_{k=0}^{N-1} u''_k \cdot \exp(-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot k) = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \cdot \exp(-j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot k) \cdot \exp(j\alpha) = f_l \cdot \exp(j\alpha). \tag{2}$$

Итак, сдвиг контура U на фиксированный вектор Δu изменяет только величину f_0 , а поворот U на заданный угол α вокруг точки 0 влечет за собой поворот всех коэффициентов f_l на этот же угол.

Далее, докажем формулу пересчета дескриптора Фурье при циклическом сдвиге точек контура:

Утверждение 3. Пусть $U^p = \{u_{(l+p) \bmod N}\}_{l=0}^{N-1}$ – контур, полученный циклическим сдвигом точек контура $U = \{u_l\}_{l=0}^{N-1}$ на p позиций, $p \in \overline{0, N-1}$, $F = \{f_l\}_{l=0}^{N-1}$ – дескриптор Фурье контура U , $F^p = \{f_l^p\}_{l=0}^{N-1}$ – дескриптор Фурье контура U^p . Тогда $f_l^p = f_l \cdot \exp(i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot p)$, $l = \overline{0, N-1}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
f_l^p &= \sum_{k=0}^{N-1} u_{(k+p) \bmod N} \cdot \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot k) = \\
&= \sum_{k=0}^{N-p-1} u_{k+p} \cdot \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot k) + \sum_{k=N-p}^{N-1} u_{k+p-N} \cdot \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot k) = \\
&= \exp(i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot p) \cdot \sum_{k=0}^{N-p-1} u_{k+p} \cdot \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot (k+p)) + \\
&+ \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot (N-p)) \cdot \sum_{k=N-p}^{N-1} u_{k+p-N} \cdot \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot (k+p-N)) = \\
&= \exp(i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot p) \cdot \sum_{k=0}^{N-p-1} u_{k+p} \cdot \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot (k+p)) + \\
&+ \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot N) \cdot \exp(i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot p) \cdot \sum_{k=N-p}^{N-1} u_{k+p-N} \cdot \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot (k+p-N)) = \\
&= \exp(i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot p) \cdot [\sum_{m=p}^{N-1} u_m \cdot \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot m) + 1 \cdot \sum_{m=0}^{p-1} u_m \cdot \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot m)] = \\
&= \exp(i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot p) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} u_k \cdot \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot k) = \exp(i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot p) \cdot f_l, l = \overline{0, N-1}.
\end{aligned}$$

□

Утверждение 4 (Необходимое условие симметрии). Пусть контур $U = \{u_l\}_{l=0}^{N-1}$ является симметричным: существует точка контура u_p , лежащая на оси симметрии, угол наклона которой равен α , $F = \{f_l\}_{l=0}^{N-1}$ – дескриптор Фурье контура U . Тогда равенство $\text{Im}(f_l \cdot \exp(i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot (N-p)) \cdot \exp(-i\alpha)) = 0$ выполнено для всех $l = 1..N-1$.

Доказательство. Выполним последовательно сдвиг контура на $\Delta u = -u_p$ и поворот на угол $-\alpha$. Далее, осуществим циклический сдвиг точек полученного контура на $N-p$ позиций (теперь начальной точкой контура является u_p , лежащая на оси симметрии, совпадающей

с осью абсцисс). Полученный контур \tilde{U} является идеальным по определению симметрии, тогда из утверждения 2 для $\tilde{F} = \{\tilde{f}_l\}_{l=0}^{N-1}$ верно $Im(\tilde{f}_l) = 0$ для всех $l = 0..N-1$. Выполним обратные преобразования: подставив выражения для \tilde{f}_l из (1), (2) и утверждения 3, получим необходимые равенства. \square

3.2 Приближенные вычисления угла наклона оси симметрии

Пусть задан контур U , состоящий из N точек, и найдены коэффициенты $f_l, l = \overline{0, N-1}$. Предположим, что точка u_0 лежит на оси симметрии. В этом случае выполнены условия утверждения 4.

Однако на практике контур может содержать искажения (например, шумы). В этом случае равенства из утверждения 4, возможно, выполнены лишь приближенно при некотором значении α . Будем называть такое α приближенным значением угла наклона оси симметрии, проходящей через точку u_0 .

Введем величину $t(\alpha, p) = \sum_{l=1}^{N-1} Im(f_l \cdot \exp(i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot (N-p)) \cdot \exp(-i\alpha))^2 \geq 0$. Если α – приближенный угол наклона оси симметрии, проходящей через точку u_p , то $t(\alpha, p) \approx 0$.

Вычислим оптимальное значение α при заданных $p, f_l, l = \overline{1, N-1}$.

$$t(\alpha, p) \rightarrow \min_{\alpha \in [0, \pi]} \quad (3)$$

Используем обозначение f_l^p из утверждения 3, пусть также $\exp(-i\alpha) = x + i \cdot y, f_l^p = a_l + i \cdot b_l, l = \overline{1, N-1}$. Ясно, что при этом $x = \cos \alpha, y = -\sin \alpha$.

$$f_l^p \cdot \exp(-i\alpha) = (a_l + i \cdot b_l) \cdot (x + i \cdot y) = (x \cdot a_l - y \cdot b_l) + i \cdot (x \cdot b_l + y \cdot a_l)$$

$$t(\alpha, p) = \sum_{l=1}^{N-1} (x \cdot b_l + y \cdot a_l)^2 = x^2 \cdot \sum_{l=1}^{N-1} b_l^2 + 2xy \cdot \sum_{l=1}^{N-1} (a_l \cdot b_l) + y^2 \cdot \sum_{l=1}^{N-1} a_l^2$$

Обозначим $k_1 = \sum_{l=1}^{N-1} b_l^2, k_2 = 2 \cdot \sum_{l=1}^{N-1} (a_l \cdot b_l), k_3 = \sum_{l=1}^{N-1} a_l^2$. Тогда (3) можно переписать так:

$$k_1 \cos^2 \alpha - k_2 \cos \alpha \cdot \sin \alpha + k_3 \sin^2 \alpha \rightarrow \min_{\alpha \in [0, \pi]}$$

Оптимизируемая функция является непрерывно дифференцируемой по α :

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} t^p(\alpha) = -k_1 \cdot 2 \cos \alpha \sin \alpha - k_2 (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + k_3 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$-k_1 \cdot \sin 2\alpha - k_2 \cdot \cos 2\alpha + k_3 \cdot \sin 2\alpha = 0$$

$$k_2 \cdot \cos 2\alpha = (k_1 - k_3) \cdot \sin 2\alpha$$

На сегменте $[0, \pi]$ уравнение имеет два корня:

$$\alpha_1 = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & k_1 = k_3 \\ \frac{1}{2}(\arctan(\frac{k_2}{k_1 - k_3}) \bmod \pi), & k_1 \neq k_3 \end{cases}, \quad \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$$

Минимум также может достигаться на концах отрезка: $\alpha_3 = 0$, $\alpha_4 = \pi$. Но оптимизируемая функция является периодичной с периодом, равным π , поэтому достаточно рассмотреть только один из них. Решение окончательно имеет вид:

$$k = \arg \min_{i \in \{1,2,3\}} t(\alpha_i, p), \alpha^p = \alpha_k. \quad (4)$$

3.3 Алгоритм поиска оси симметрии

Входные параметры: последовательность комплексных чисел U длины N – контур фигуры.

Выход алгоритма: в случае, если ось симметрии контура существует, на выход подаются координаты (x, y) точки на контуре, лежащей на одной из осей симметрии, и угол наклона θ выбранной оси к оси абсцисс. Если оси симметрии нет, вернуть специальное значение $x = -1$, $y = -1$, $\theta = 0$.

Процедура поиска оси симметрии (Procedure 1) состоит в следующем. Для каждой точки контура u_p , $p \in \overline{0, N-1}$, пересчитываем коэффициенты ДПФ по формуле из утверждения 3 и вычисляем оптимальный угол наклона оси симметрии по формуле (4), а также величину среднеквадратичного отклонения коэффициентов Фурье от оптимальной оси $Q(p) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N-1} \text{Im}(f_i^p \cdot \exp(-i\alpha^p))^2}{N-1}}$. Чем ближе $Q(p)$ к нулю, тем больше найденная прямая похожа на ось симметрии. Выберем $P = \arg \min_{p \in \overline{0, N-1}} Q(p)$. В зависимости от того, присутствует ли у исходной фигуры симметрия, возможны два случая. Различать их предлагается отсечением по фиксированному порогу Q :

1. $Q(P) \leq Q$, тогда фигура считается симметричной, на выход алгоритма следует подать пару (u_P, α^P) ;
2. $Q(P) > Q$, тогда фигура не имеет оси симметрии, выход составляет набор специальных значений $((-1, -1), 0)$.

Алгоритм 1 с применением формулы (4) для поиска α^p имеет асимптотику $O(N^2)$, то есть является квадратичным по количеству точек в контуре. Вычислительную эффективность можно повысить, если использовать лишь фиксированное множество гармоник дескриптора Фурье для поиска вершины P (наиболее полезны первые и последние гармоники), и внедрив процедуру быстрого преобразования Фурье. Фактически, это равносильно проведению частотной фильтрации контура, и в результате проведения такой операции теряется часть информации об исходном контуре. Экспериментально установлено, что ось симметрии сохраняется при описанных преобразованиях, а шумы на границе – сглаживаются. Как выбирать гармоники для анализа и насколько результат будет отличаться от настоящей оси симметрии – вопрос для дальнейшего исследования.

Procedure 1 Symmetry

Input: U, N **Output:** P, θ **for** $l = 0$ **to** $N - 1$ **do**

$$f_l = \sum_{k=0}^{N-1} u_k \cdot \exp(-i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot k)$$

for $p = 0$ **to** $N - 1$ **do****for** $l = 0$ **to** $N - 1$ **do**

$$f_l^p = \exp(i \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot l \cdot p) \cdot f_l$$

$$\alpha^p = \arg \min_{\alpha \in [0, \pi]} t^p(\alpha)$$

$$P = \arg \min_{p=0..N-1} Q(p)$$

if $Q(P) \leq Q$ **then****return** (u_P, α^P) **else****return** $((-1, -1), 0)$

Рассмотрим положительные и отрицательные стороны выбора первого (все точки) или второго (вершины многоугольника) способов представления контура.

Первый способ позволяет строить более точный дескриптор Фурье за счет постоянной длины шага (от 1 до 2 пикселей), однако требует больше время на перебор начальных точек и подвержен негативному влиянию шума на границе силуэта.

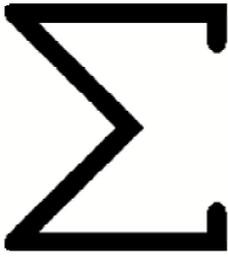
Второй способ более вычислительно эффективен, однако из-за сколь угодно большого расстояния между соседними вершинами для многоугольников в условиях зашумленного исходного изображения дает менее устойчивый результат, чем при выборе первого способа описания контура. Следует также заметить, что в этом случае требуется добавлять к описанию контура U также середины ребер многоугольника (сохраняя порядок, в котором точки следуют на контуре), так как через них тоже могут проходить оси симметрии.

4 Вычислительные эксперименты

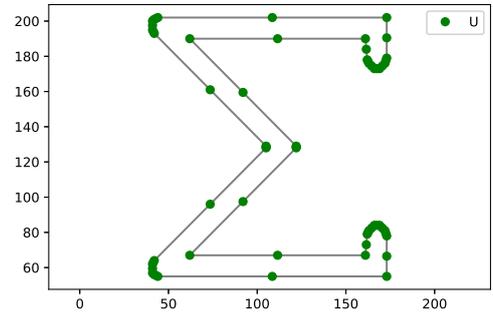
Следующий набор вычислительных экспериментов направлен на подтверждение теоретического результата о необходимых условиях симметрии.

В первом эксперименте в качестве исходного изображения выбран силуэт симметричного объекта, ось симметрии которого параллельна оси абсцисс – символа Σ (Рис. 5). Выполнено построение контура в виде последовательности вершин многоугольника, в контур добавлены середины ребер многоугольника, начальной точкой выбрана такая точка контура, мнимая часть которой совпадает с средним значением мнимых частей всех точек контура (то есть действительно принадлежащая оси симметрии контура). Построен дескриптор Фурье,

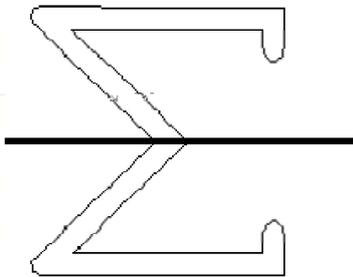
коэффициенты f_l при $l > 0$ являются чисто вещественными, как и следует из утверждения 2.



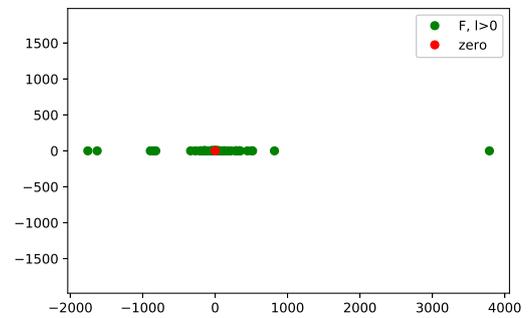
1. Исходное изображение



2. Контур в виде последовательности вершин многоугольника



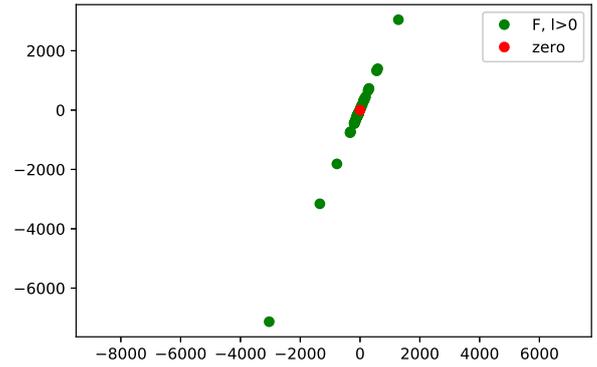
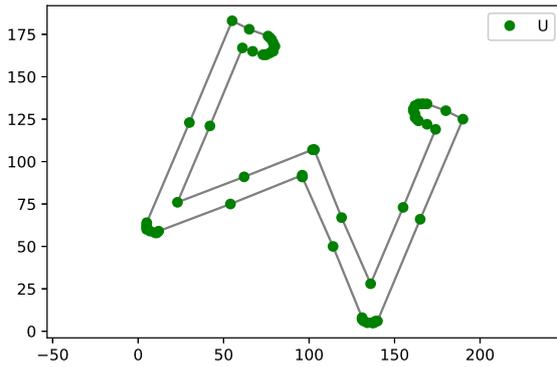
3. Ось симметрии контура



4. Коэффициенты Фурье $f_l, l \in 1, N - 1$

Рис. 5: Эксперимент с идеальным контуром

Далее, для проверки утверждения 4 осуществим поворот исходного бинарного силуэта на известный угол θ . Для полученного изображения повторим те же операции по построению контура U , и взяв U в качестве входных данных алгоритма 1, найдем начальную точку контура u_P . Представим коэффициенты Фурье f_l^P ($l > 0$) как точки на комплексной плоскости. На графике видно, что построенный дескриптор Фурье представляет собой набор точек на комплексной плоскости, лежащих на одной прямой, за исключением коэффициента f_0 . При этом угол наклона этой прямой равен углу поворота θ . Итак, условие (5) подтверждено вычислительным экспериментом.



1. Контур изображения после поворота

2. Дескриптор Фурье $f_l^P, l \in \overline{1, N-1}$

Рис. 6: Эксперимент с поворотом идеального контура

Для оценки порогового значения Q и качества работы алгоритма 1 при наличии на изображении искажений была проведена серия вычислительных экспериментов по определению оси симметрии летательных аппаратов. В качестве входных данных были использованы силуэты различных моделей самолетов (Рис. 7), подвергнутые масштабированию и повороту.

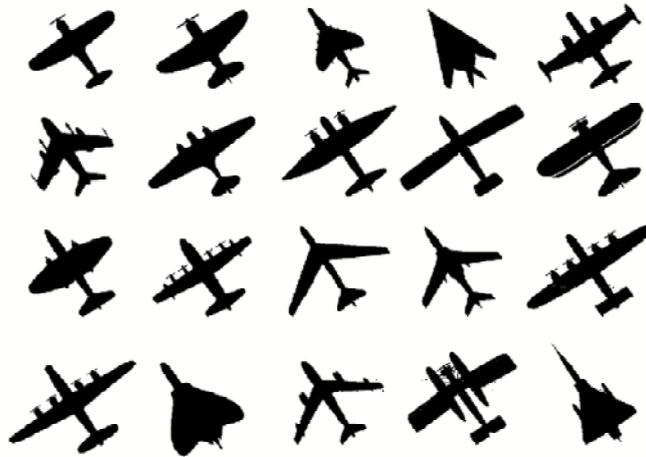


Рис. 7: Силуэты летательных аппаратов

Далее для выбранного силуэта построены два вида контура: как последовательность соседних точек и как последовательность вершин многоугольника, объединенная с серединами ребер (в том порядке, в котором они следуют на контуре). По алгоритму 1 найдены предполагаемые оси симметрии и величины $Q(P)$. При втором способе описания контура ось симметрии определялась не всегда вдоль фюзеляжа самолета. График $Q(p)$ в таком случае имел несколько близких по значению локальных минимумов, и значения в этих точках больше установленного порога Q . То есть из-за шумов на границе силуэта объект, описанный многоугольником, не может считаться симметричным ни при каких значениях

P . В случае описания контура множеством точек ось определена корректно на всей выборке изображений. Поэтому далее приводятся примеры лишь для такого способа определения контура. Эмпирически установлен порог $Q = 100$.

Примеры работы алгоритма приведены на рис. 8. Полный набор результатов содержится в приложении А. В случае симметричного объекта график $Q(p)$ имеет два близких по значению локальных минимума, один из которых является глобальным – это значения в двух противоположных точках контура, лежащих на оси симметрии. На рисунках видно, что величина $Q(P)$ может служить мерой несимметричности объекта: третья картинка более зашумлена, чем вторая, из-за шумов симметрия нарушена и значение $Q(P)$ на этом самолете больше, чем на первых двух. Четвертая картинка демонстрирует работу алгоритма на несимметричном контуре.

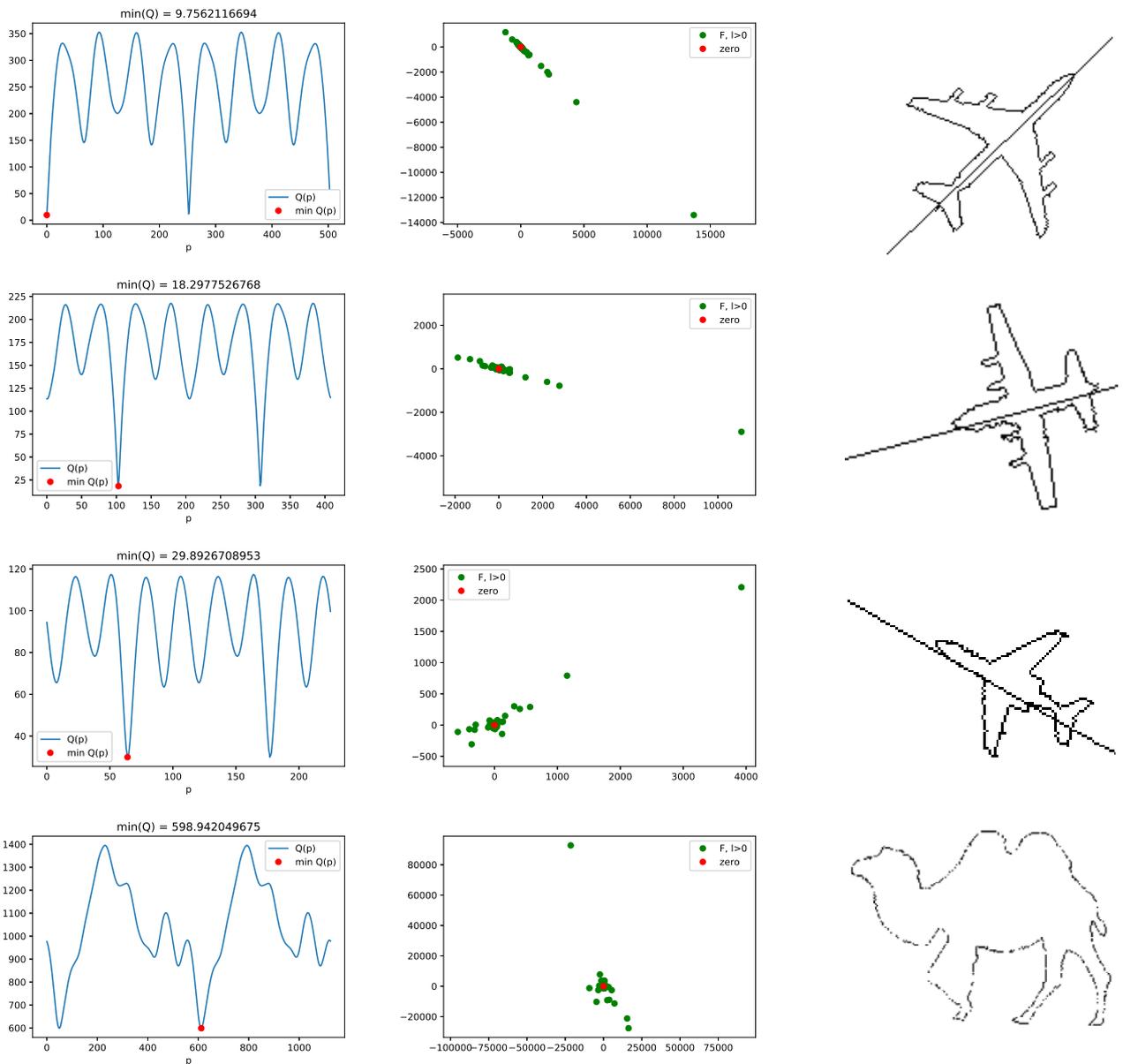


Рис. 8: Примеры работы алгоритма. В каждой строке показаны: 1) график $Q(p)$; 2) визуализация дескриптора Фурье F^P ($l > 0$); 3) ось, проходящая через точку u_P и имеющая угол наклона α^P .

5 Заключение

Разработан метод решения задачи определения наличия и поиска параметров оси симметрии силуэта на бинарном изображении. Построен эффективный алгоритм, реализующий созданный метод. Достоверность решения установлена вычислительными экспериментами. Придумана новая мера симметричности объекта.

Исследование будет продолжено с целью увеличения эффективности алгоритма за счет использования не полной информации о дескрипторе Фурье, а лишь коэффициентов нескольких наиболее значимых гармоник. Будут изучены способы интерпретации величины $Q(P)$ как характеристики бинарного силуэта. Также планируется точное определение порога Q за счет увеличения эмпирической базы вычислительных экспериментов и автоматизации определения качества найденной оси симметрии.

6 Приложение А. Данные для оценки величины Q

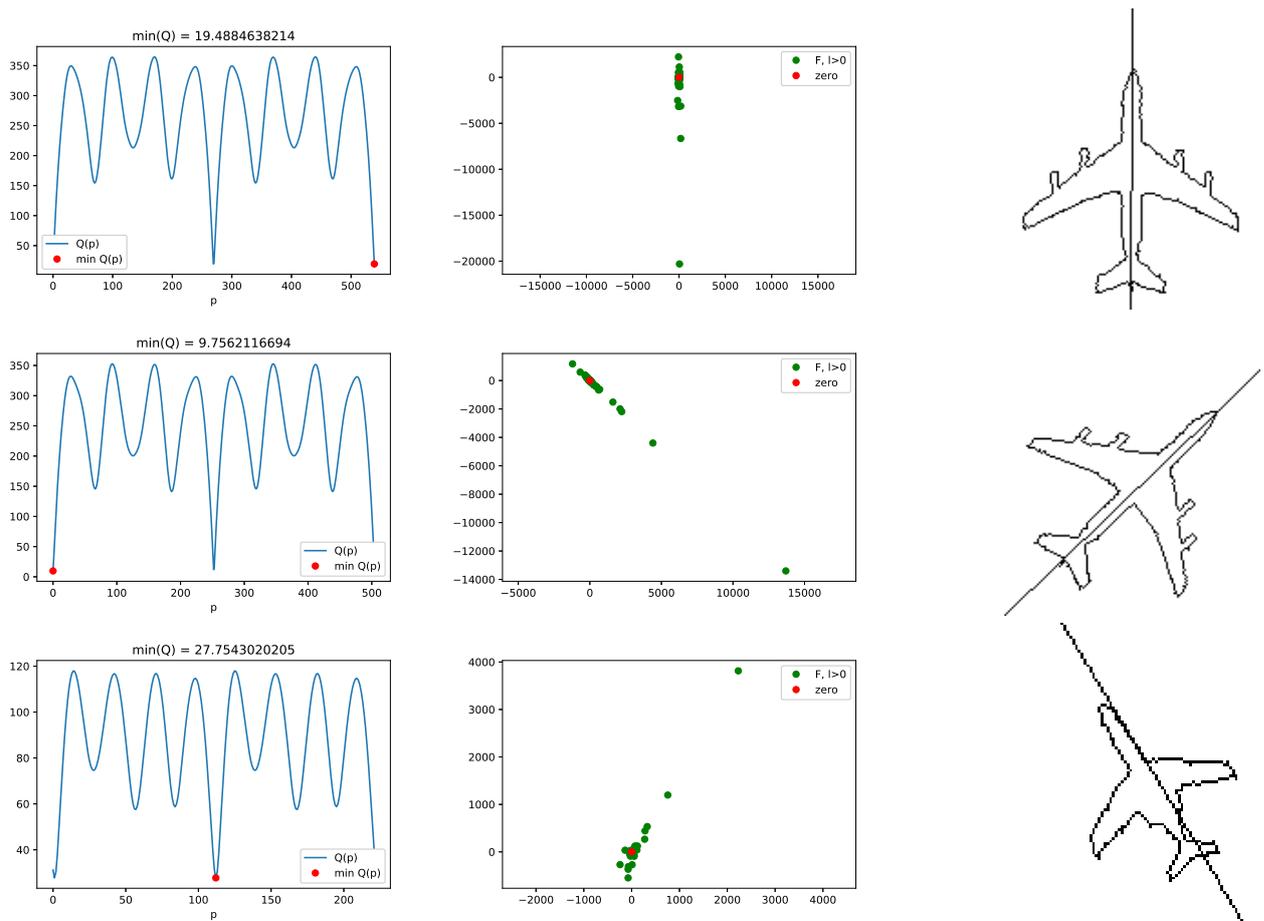


Рис. 9: В каждой строке показаны: 1) график $Q(p)$; 2) визуализация дескриптора Фурье F^P ($l > 0$); 3) ось, проходящая через точку u_P и имеющая угол наклона α^P .

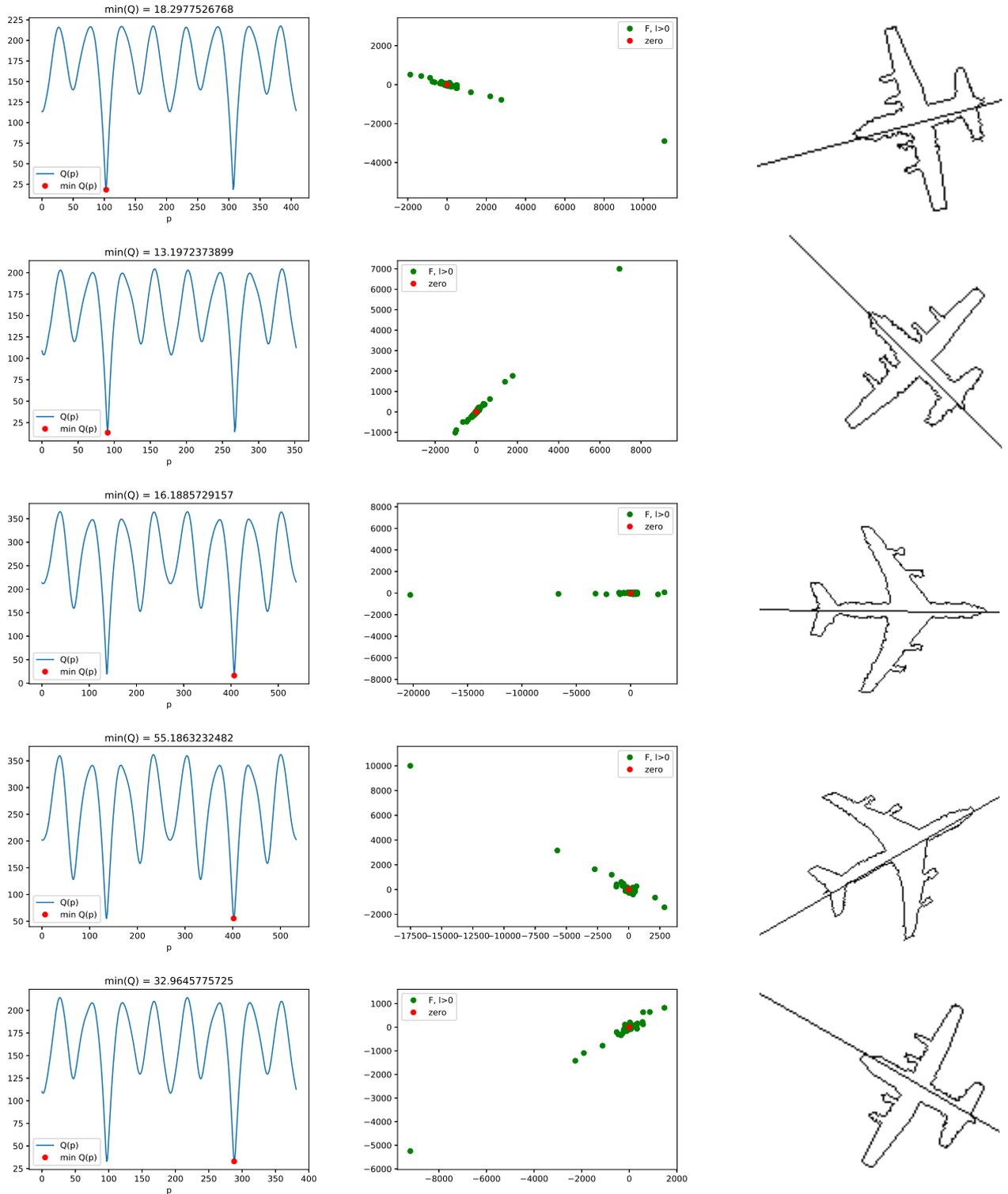


Рис. 10: В каждой строке показаны: 1) график $Q(p)$; 2) визуализация дескриптора Фурье F^P ($l > 0$); 3) ось, проходящая через точку u_P и имеющая угол наклона α^P .

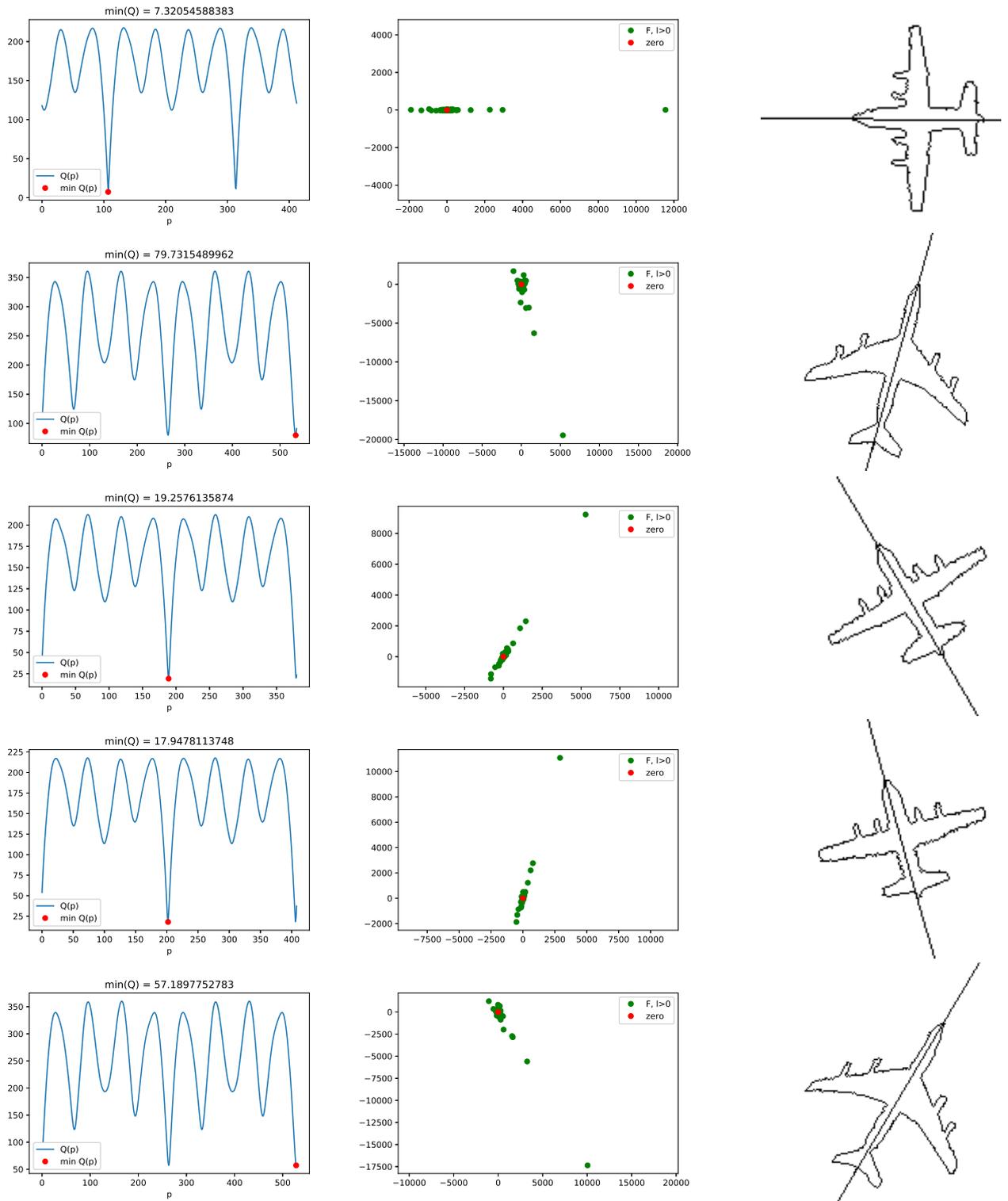


Рис. 11: В каждой строке показаны: 1) график $Q(p)$; 2) визуализация дескриптора Фурье F^P ($l > 0$); 3) ось, проходящая через точку u_P и имеющая угол наклона α^P .

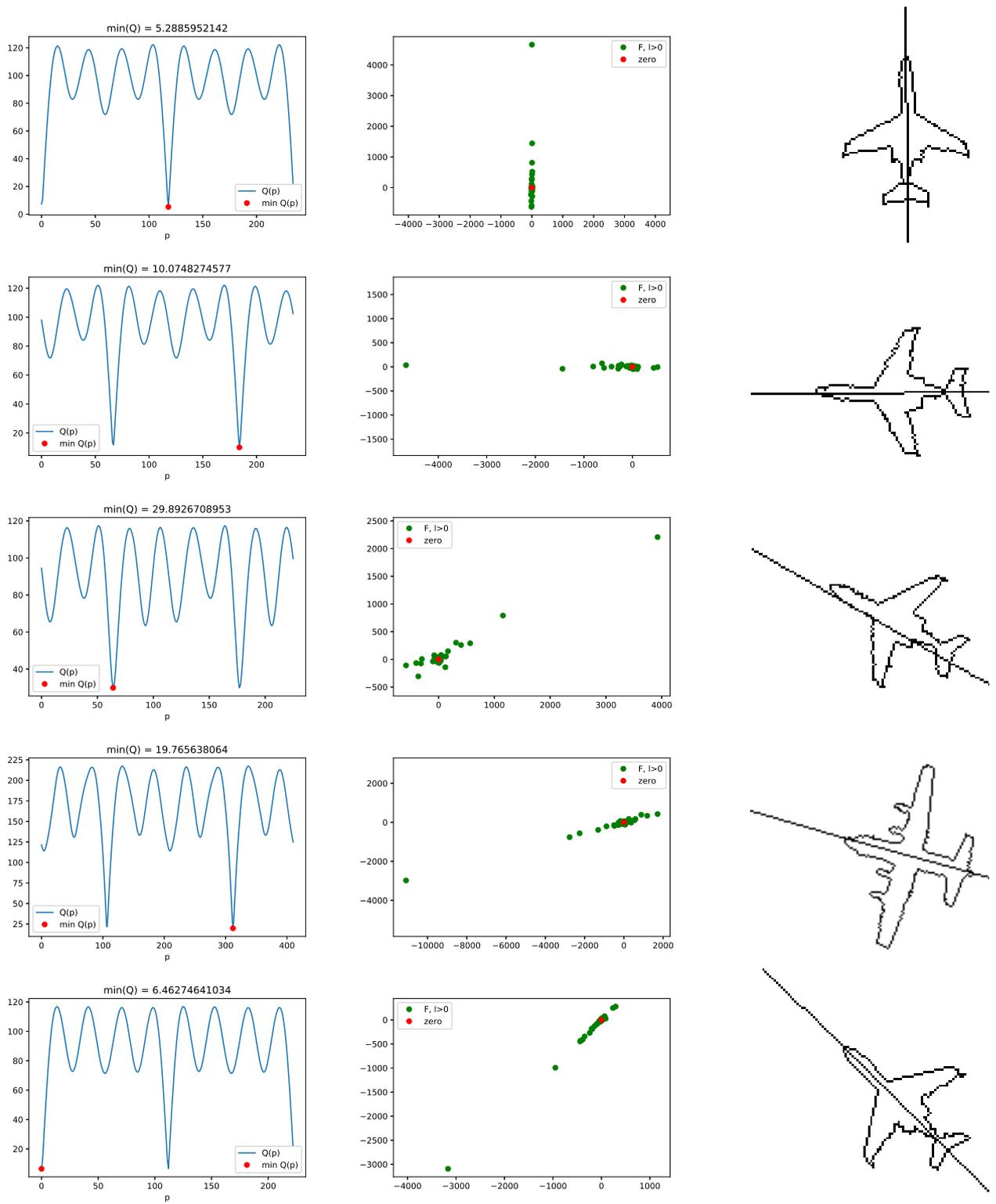


Рис. 12: В каждой строке показаны: 1) график $Q(p)$; 2) визуализация дескриптора Фурье F^P ($l > 0$); 3) ось, проходящая через точку u_P и имеющая угол наклона α^P .

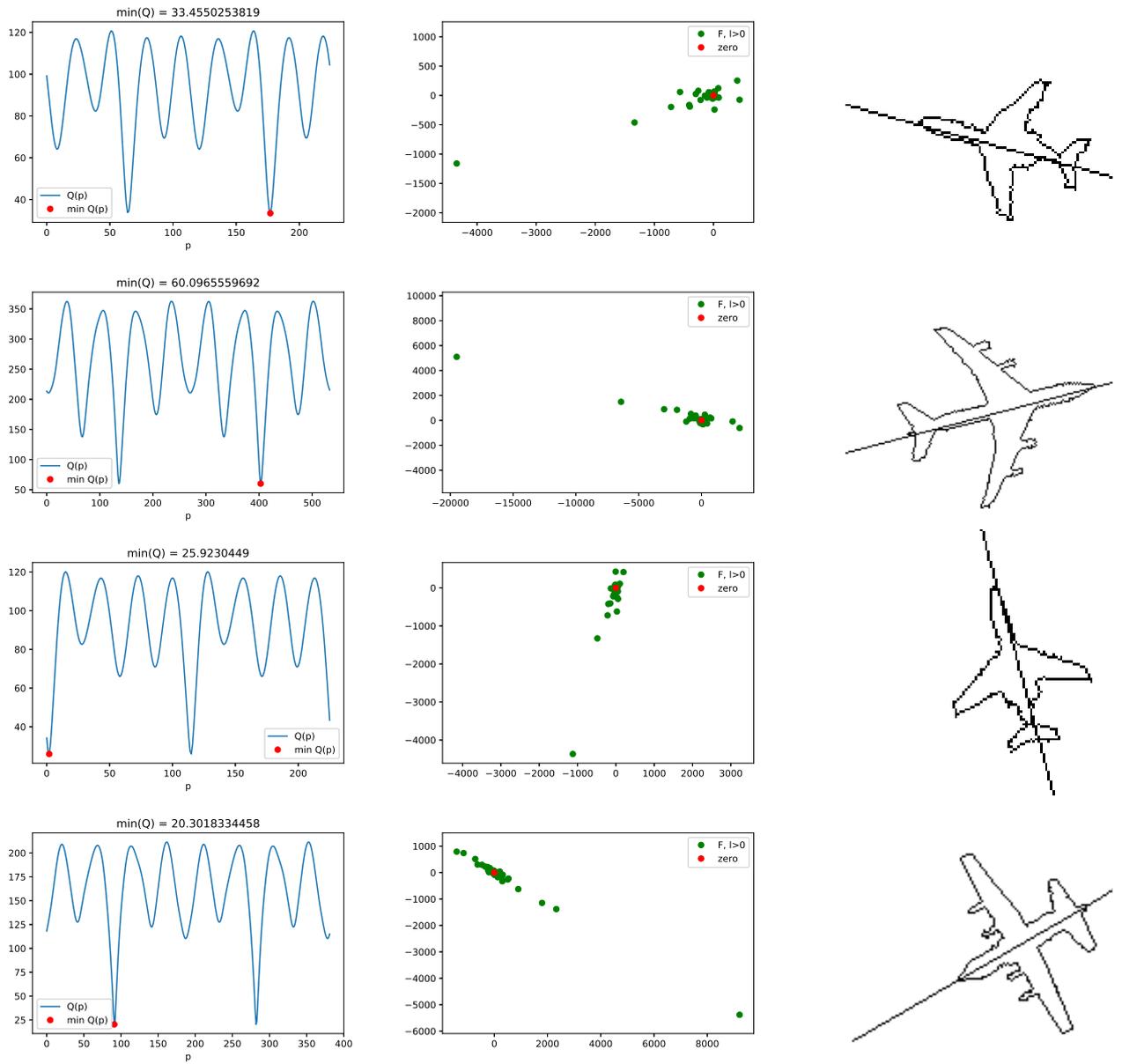


Рис. 13: В каждой строке показаны: 1) график $Q(p)$; 2) визуализация дескриптора Фурье F^P ($l > 0$); 3) ось, проходящая через точку u_P и имеющая угол наклона α^P .

Список литературы

- [1] *Theodoridis, S., Koutroumbas, K.* Pattern Recognition. Second Edition. Elsevier, 2003, p. 295-300.
- [2] *Местецкий Л.М.* Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. Москва, Физматлит, 2009, 288 с.
- [3] *Van Otterloo P.J.* A contour-oriented approach to digital shape analysis. Technische Universiteit Delft, 1988.
- [4] *Sheynin S., Tuzikov A., Volgin D.* Computation of symmetry measures for polygonal shapes. International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns, Springer Berlin Heidelberg, 1999. p. 183-190.
- [5] *Yang X., Adluru N., Latecki L.J., Bai X., Pizlo Z.* Symmetry of shapes via self-similarity. International Symposium on Visual Computing, Springer Berlin Heidelberg, 2008. p. 561-570.
- [6] *Kushnir O., Fedotova S., Seredin O., Karkishchenko A.* Reflection Symmetry of Shapes Based on Skeleton Primitive Chains. International Conference on Image and Signal Processing, Springer International Publishing, 2016.
- [7] *Мнухин В.Б.* Интегральное преобразование для распознавания симметрии изображения. Научно-технические ведомости СПбГПУ: Информатика. Телекоммуникации. Управление 176(4), 2013, с. 123-130.
- [8] *Karkishchenko A. N., Mnukhin V. B.* Symmetry recognition in the frequency domain. 9th Conference (International) on Intelligent Information Processing, Moscow, 2012, p. 426–429.
- [9] *Lepskiy A.E.* Determination of symmetry parameters of objects in noisy images. Pattern recognition and image analysis, Volume 23, Issue 3, Springer US, September 2013, p. 408-414.
- [10] *Федотова С.А., Середин О.С., Кушнир О.А.* Алгоритмы уточнения оси зеркальной симметрии, найденной методом сравнения подцепочек скелетных примитивов. Известия ТулГУ, ноябрь 2016.
- [11] *Yip R.K.K.* Genetic Fourier descriptor for the detection of rotational symmetry. Image and Vision Computing, Volume 25, Issue 2, Elsevier, February 2007, p. 148-154.