Тема II

Отношения и соответствия (I)

Разделы

Отношения: определение

Определение

Декартовым (или *прямым*) *произведением* непустых множеств $A_1, \ldots, A_n$, символически $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$, называют совокупность всех конечных последовательностей вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_i \in A_i$, $i \in \overline{1, n}$.
Декартово произведение n экземпляров множества A обозначают A^n и называют *n-ой декартовой степенью* A.

Свойства:

- $A \times B \neq B \times A$,
- $A \times B \times C$, $(A \times B) \times C$ и $A \times (B \times C)$ — разные множества.
- $A^m \times A^n \neq A^{m+n}$.

Отношения. Проекции отношений

Определение

Отношения — подмножества декартовых произведений множеств; символически $\rho \subseteq A_1 \times \ldots \times A_n$.

Число множеств в соответствующем декартовом произведении есть *местность* или *арность* отношения.
Отношения унарные, бинарные, тернарные, кватернарные и т.д.

Определение

Если ρ — отношение на $A_1 \times \ldots \times A_n$, то совокупность всех элементов $a_1 \in A_1$ для которых найдутся такие $a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$, что $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \rho$, называют *проекцией отношения ρ на множество A_1* или *первой проекцией* ρ. Аналогично определяются вторые, третьи и т.д. проекции. Символически i-я проекция ρ обозначается $Pr_i\,\rho$.

Отношения как предикаты

Отношения можно рассматривать как *предикаты* (функции, принимающие два значения — «истина» и «ложь»):
$\rho\,(a_1, \ldots, a_n) = 1$ (истинно), если $(a_1, \ldots, a_n) \in \rho$ и ложно $(= 0)$ в противном случае.
Поэтому к отношениям можно применять операции алгебры логики: дизъюнкции ($\vee$), конъюнкции ($\&$), отрицания ($\neg$), тождества ($\equiv$), импликации ($\supset$) и др.

Унарные отношения описывают различные свойства его элементов.

Бинарные отношения будут рассматриваться далее.

Тернарные отношения (пример): отношение «между»:

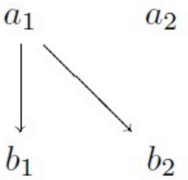
$$\rho(x, y, z) = 1 \Leftrightarrow x < y < z \text{ на } \mathbb{R}.$$

Соответствия

Бинарные отношения на декартовом произведении множеств A и B называют отношениями *между A и B* или *соответствиями* между данными множествами.

Для соответствия $\rho \subseteq A \times B$:

- обозначение — $a\rho b$, если $(a, b) \in \rho$;
- задание — направленным двудольным графом $\overrightarrow{G}(\rho)$, с долями A и B, вершинами которого служат элементы этих долей, причём, если $a\rho b$, то из вершины, соответствующей $a \in A$, дуга ведёт в вершину, соответствующую $b \in B$.



Граф отношения $\{\,(a_1, b_1),\ (a_1, b_2)\,\}$ на $\{a_1, a_2\} \times \{b_1, b_2\}$

Соответствия...

Соответствие ρ —

проекции **первая** — *область определения* $\operatorname{Dom}\rho$;

вторая — *область значений* $\operatorname{Im}\rho$.

образы элемента $a \in A$ — множество

$$\rho(a) = \{\, b \in B \mid a\rho b \,\};$$

множества X — множество $\rho(X) = \bigcup\limits_{x \in X} \rho\,(x)$.

Свойства теоретико-множественных операций, применённые к соответствиям $\alpha,\,\beta \subseteq A \times B$ $(\,a \in A,\ b \in B\,)$:

1. $a(\alpha \cup \beta)b \;\Leftrightarrow\; a\alpha b \vee a\beta b \;\Leftrightarrow\; (a,b) \in \alpha$ или $(a,b) \in \beta$;
2. $a(\alpha \cap \beta)b \;\Leftrightarrow\; a\alpha b \,\&\, a\beta b \;\Leftrightarrow\; (a,b) \in \alpha$ и $(a,b) \in \beta$;
3. $a\overline{\alpha}b \;\Leftrightarrow\; \neg(a\alpha b) \;\Leftrightarrow\; (a,b) \notin \alpha$.

Псевдообращение соответствия

Определение

Унарная операция $\sharp$ *псевдообращения* соответствия $\rho \subseteq A \times B$ задаёт *псевдообратное* к нему соответствие $\rho^\sharp \subseteq B \times A$: $b\rho^\sharp a \Leftrightarrow a\rho b$ для любых $a \in A$, $b \in B$.

Свойства псевдообращения:

$$(\rho^\sharp)^\sharp = \rho, \quad \overline{\rho^\sharp} = (\overline{\rho})^\sharp, \quad \alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha^\sharp \subseteq \beta^\sharp,$$
$$(\alpha \cup \beta)^\sharp = \alpha^\sharp \cup \beta^\sharp, \quad (\alpha \cap \beta)^\sharp = \alpha^\sharp \cap \beta^\sharp.$$

Прообразы соответствия $\rho \subseteq A \times B$:

элемента $b \in B$ — множество $\rho^\sharp(b) = \{a \in A \mid a\rho b\}$;

множества $Y \subseteq B$ — множество $\rho^\sharp(Y) = \bigcup_{y \in Y} \rho^\sharp(y)$.

Произведение соответствий: определение и свойства

Определение

Пусть A, B и C — непустые множества, $\alpha \subseteq A \times B$, $\beta \subseteq B \times C$. Тогда *произведение* или *умножение* $\alpha \diamond \beta$ соответствий α и β определяется для произвольных $a \in A$, $c \in C$ как

$$a(\alpha \diamond \beta)c \;\Leftrightarrow\; \underset{B}{\exists}\, b\,(a\alpha b \,\&\, b\beta c).$$

Часто знак $\diamond$ опускают и вместо $\alpha \diamond \beta$ пишут $\alpha\beta$.

Свойства произведения (в случае существования):

- $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$;
- $(\alpha\beta)^\sharp = \beta^\sharp\alpha^\sharp$;
- $\begin{cases} \alpha \subseteq \beta \\ \gamma \subseteq \delta \end{cases} \Rightarrow \alpha\gamma \subseteq \beta\delta$

Свойства произведения соответствий: доказательства

Соотношения

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \quad \text{и}$$

$$\begin{cases} \alpha \subseteq \beta \\ \gamma \subseteq \delta \end{cases} \Rightarrow \alpha\gamma \subseteq \beta\delta$$

доказываются элементарно.

Свойства произведения соответствий: доказательства

Соотношения

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma \quad \text{и}$$

$$\begin{cases} \alpha \subseteq \beta \\ \gamma \subseteq \delta \end{cases} \Rightarrow \alpha\gamma \subseteq \beta\delta$$

доказываются элементарно.

Покажем, что $(\alpha\beta)^\sharp = \beta^\sharp\alpha^\sharp$.
Пусть $\alpha \subseteq A \times B$, $\beta \subseteq B \times C$, тогда для любых $a \in A$, $c \in C$ справедливо:

$$c(\alpha\beta)^\sharp a = a(\alpha\beta)c = \underset{B}{\exists} b\,(a\alpha b \,\&\, b\beta c) =$$

$$= \underset{B}{\exists} b\left(c\beta^\sharp b \,\&\, b\alpha^\sharp a\right) = c(\beta^\sharp\alpha^\sharp)a.$$

Свойства произведения соответствий: доказательства...

- $\alpha(\beta\cup\gamma) \;=\; \alpha\beta\cup\alpha\gamma, \quad (\alpha\cup\beta)\gamma \;=\; \alpha\gamma\cup\beta\gamma$, откуда
- $(\alpha\cup\beta)(\gamma\cup\delta) \;=\; \alpha\gamma\cup\alpha\delta\cup\beta\gamma\cup\beta\delta$;
- $(\alpha\cap\beta)\gamma \subseteq \alpha\gamma\cap\beta\gamma, \quad \alpha(\beta\cap\gamma) \subseteq \alpha\beta\cap\alpha\gamma$.

Докажем, что $(\alpha\cap\beta)\gamma \;\subseteq\; \alpha\gamma\cap\beta\gamma$: для произвольных элементов a и c соответствующих множеств получим

$$
\begin{aligned}
a[(\alpha\cap\beta)\diamond\gamma]c &= \exists\, b\ (\, a(\alpha\cap\beta)b \,\&\, b\gamma c\,) = \exists\, b\ (\, a\alpha b \,\&\, a\beta b \,\&\, b\gamma c\,) = \\
&= \exists\, b\ (\,(a\alpha b \,\&\, b\gamma c) \,\&\, (a\beta b \,\&\, b\gamma c)\,) \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow\; \exists\, x\ (\, a\alpha x \,\&\, x\gamma c\,) \;\&\, \exists\, y\ (\, a\beta y \,\&\, y\gamma c\,) \;= \\
&= \; a(\alpha\gamma)c \,\&\, a(\beta\gamma)c \;=\; a(\alpha\gamma\cap\beta\gamma)c\,.
\end{aligned}
$$

Соотношение $\alpha(\beta\cap\gamma)\subseteq\alpha\beta\cap\alpha\gamma$ доказывается аналогично.

Представление соответствий (0,1)-матрицами

$\rho \subseteq \{a_1, \ldots, a_m\} \times \{b_1, \ldots, b_n\}$ — соответствие на конечных множествах. Матрица $M(\rho)$ отношения ρ:

$$M(\rho) = (r_{ij})_{i=1,\, j=1}^{m,\, n} = \begin{cases} 1, & a_i\, \rho\, b_j \\ 0, & \text{иначе}\,. \end{cases}$$

$\mathcal{M}_{m\times n}$ — множество всех (0,1)-матриц размера $m \times n$, I — *универсальная* матрица из 1, 0 — *нуль-матрица* из 0.

К матрицам из $\mathcal{M}$ поэлементно применяют логическую операцию $\neg$, а к матрицам одинакового размера — логические операции $\vee$ и $\&$ по правилам алгебры высказываний $\mathbf{2}$.

АС $\langle \mathcal{M}_{m\times n}, \vee, \&, \neg, O, I \rangle$ — булева алгебра, изоморфная $\mathcal{P}(A \times B)$, поскольку

$$M(\alpha \cup \beta) = M(\alpha) \vee M(\beta); \quad M(\alpha \cap \beta) = M(\alpha) \& M(\beta);$$
$$M(\overline{\alpha}) = \neg\, M(\alpha).$$

Представление соответствий (0,1)-матрицами...

Пусть $M_1 \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $M_2 \in \mathcal{M}_{n\times k}$. *Произведение* $M_1 \times M_2 \in \mathcal{M}_{m\times k}$ данных матриц — обычное матричное произведение с заменой операции суммирования на $\vee$, а умножения — на $\&$.

Для квадратных матриц обычным образом вводиться натуральная степень M^n матрицы M.

Для конечных множеств A, B, C и $\alpha \subseteq A \times B$ и $\beta \subseteq B \times C$ справедливы равенства

$$M(\alpha \diamond \beta) = M(\alpha) \times M(\beta), \quad M(\alpha^n) = M^n(\alpha).$$

Образ $\rho(X)$ подмножества X находится умножением слева вектора-строки, задающей X, на матрицу $M(\rho)$.

Представление соответствий (0,1)-матрицами: пример

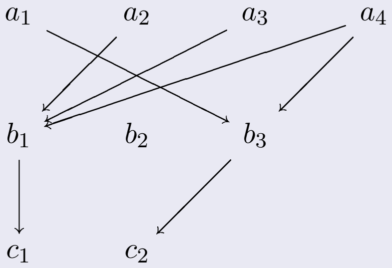
Пример

Пусть $A = \{\, a_1,\, a_2,\, a_3,\, a_4 \,\}$, $B = \{\, b_1,\, b_2,\, b_3 \,\}$, $C = \{\, c_1,\, c_2 \,\}$

$$\rho = \{(a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_4, b_1), (a_4, b_3)\} \subseteq A \times B,$$

$$\sigma = \{(b_1, c_1), (b_3, c_2)\} \subseteq B \times C,\ X = \{a_1, a_2\} \subseteq A\,.$$

Представление отношений ρ и σ в виде графа:

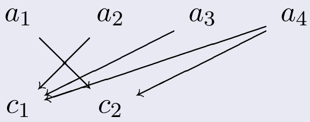


Представление соответствий (0,1)-матрицами: пример...

Находим, что $\rho(X) = \{\, b_1,\, b_3 \,\}$,

$$\rho\sigma = \{\, (a_1,\, c_2),\, (a_2,\, c_1),\, (a_3,\, c_1),\, (a_4,\, c_1),\, (a_4,\, c_2) \,\}.$$

Граф отношения $\rho\sigma$:



Матрицы, соответствующие X, ρ и σ записывается как

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad M(\rho) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad M(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Представление соответствий (0,1)-матрицами: пример...

Образу $\rho(X)$ множества X соответствует

$$\rho(X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а произведению $\rho\sigma$ —

$$M(\rho\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Разделы

Однородные отношения: определение и канторовость

Определение

Отношение $\rho \subseteq A^2$ называется *бинарным на A* (*однородным*).
$\mathcal{R}(A)$ — совокупность всех бинарных на A отношений.

Элемент $a \in A$ такой, что $a\overline{\rho}a$ для некоторого отношения $\rho \in \mathcal{R}(A)$ назовём *ρ-нерефлексивным*.

Утверждение (канторовость отношений)

Подмножество $B \overset{\text{def}}{=} \{\, a \in A \mid a\overline{\rho}a \,\}$ всех ρ-нерефлексивных элементов множества A не является образом $\rho(x)$ какого-либо элемента $x \in A$.

Допущение $B = \rho(x)$ для некоторого $x \in A$ противоречиво: оно равносильно одновременному выполнению $x\rho x$ и $x\overline{\rho}x$.

Георг Кантор
(*Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor*, 1845–1918) — выдающийся немецкий математик, создатель теории множеств. Дал определения бесконечного и вполне упорядоченного множеств и доказал, что мощность множества действительных чисел больше мощности множества натуральных.

Отношения $\sigma_\alpha = \alpha \cup \alpha^\sharp$ и $\iota_\alpha = A^2 \setminus \sigma_\alpha = \overline{\alpha \cup \alpha^\sharp}$ называют соответственно *отношениями сравнимости* и *несравнимости* для отношения $\alpha \in \mathcal{R}(A)$.

Если $a \sigma_\alpha b$ $[a \iota_\alpha b]$, то элементы a и b *сравнимы* [*несравнимы*].

Однородные отношения: определение

Если $\rho \in \mathcal{R}(A)$ и $\varnothing \neq B \subseteq A$, то отношение $\rho \cap B^2$ называют *сужением* или *ограничением отношения* ρ *на подмножество* B и обозначают $\rho\,|_B$.

Обозначение для натурального k: $\alpha^k = \overbrace{\alpha \diamond \ldots \diamond \alpha}^{k \text{ символов } \alpha}$.

Разумеется, $\alpha \subseteq \beta \;\Rightarrow\; \alpha^k \subseteq \beta^k, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots.$

Покажем, что $(\alpha \cap \beta)^2 \subseteq \alpha^2 \cap \beta^2$ (квадрат пересечения однородных отношений лежит в пересечении их квадратов): если $\alpha, \beta \in \mathcal{R}(A)$, то для любых $a, b \in A$ получим

$$a\,[(\alpha \cap \beta)(\alpha \cap \beta)]\,c \;=\; \exists\, b\;[a(\alpha \cap \beta)b \,\&\, b(\alpha \cap \beta)c] \;=$$
$$=\; \exists\, b\,(\,a\alpha b \,\&\, a\beta b \,\&\, b\alpha c \,\&\, b\beta c\,) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \exists\, x\,(\,a\alpha x \,\&\, x\alpha c\,) \,\&\, \exists\, y\,(\,a\beta y \,\&\, y\beta c\,) \;=$$
$$=\; a\alpha^2 c \,\&\, a\beta^2 c \;=\; a(\alpha^2 \cap \beta^2)c.$$

Операции над однородными отношениями: пример

Пусть $\alpha = <$ — отношение *строго меньше* на $\mathbb{N}$.

$\alpha^\sharp$: $m <^\sharp n \Leftrightarrow n < m \Leftrightarrow m > n$, т.е. **псевдообращением** отношения *строго меньше* будет отношение *строго больше*.

σ_α : $(m < n) \vee (n < m) \Leftrightarrow n \neq m$, т.е. **отношением сравнимости** для отношения *строго меньше* будет отношение неравенства.

ι_α : **Отношением несравнимости** для отношения *строго меньше* будет отношение равенства.

α^2 : $m <^2 n \Leftrightarrow \underset{\mathbb{N}}{\exists} x\,(m < x \,\&\, x < n) \Leftrightarrow m + 1 < n$
и $m <^k n \Leftrightarrow m + k - 1 < n$ для $k \geqslant 1$.

Операции над однородными отношениями: пример...

$\alpha \diamond \alpha^{\sharp}:$ $\quad m(< \diamond >)n \Leftrightarrow \underset{\mathbb{N}}{\exists}\, x\ (\, m < x \,\&\, x > n\,) \Leftrightarrow$
$\underset{\mathbb{N}}{\exists}\, x\ (\, x > \max\{m,\, n\}\,) \Leftrightarrow 1$, т.е. отношение
$< \diamond >$ на $\mathbb{N}$ истинно всегда.

$\alpha^{\sharp} \diamond \alpha:$ $\quad m(> \diamond <)n \Leftrightarrow \underset{\mathbb{N}}{\exists}\, x\,(\, m > x \,\&\, x < n\,) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \underset{\mathbb{N}}{\exists}\, x\,(\, x < \min\{m,\, n\}\,) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1, & \text{если } \min\{m,\, n\} > 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Последний пример показывает, что, вообще говоря, $\alpha\beta \neq \beta\alpha$.
При $\alpha\beta = \beta\alpha$ отношения α и β называют *перестановочными*.

Специальные однородные отношения

Определение

Однородное на множестве A отношение ρ называется:

∇ : *универсальным*, если $\rho = A^2$.

$\emptyset$: *пустым* или *нуль-отношением*, если $\rho = \varnothing$.

Универсальное и пустое отношения — *несобственные* на данном множестве, остальные отношения — *собственные*;

$\triangle$: *диагональным* (*единичным*), если $x\rho y \Leftrightarrow x = y$.
Для единичного отношения на A используют также обозначение 1_A.
По определению для $\rho \in \mathcal{R}(A)$ полагают $\rho^0 = \triangle$.
Очевидно, $\rho = \rho\triangle = \triangle\rho$ и $\triangle^k = \triangle$, $k = 0, 1, \ldots$.

Специальные однородные отношения...

Определение (продолжение)

F : *полным*, если $\rho \cup \rho^\sharp = \nabla$, т.е. $x\rho y \vee x\rho^\sharp y$, или из любых двух элементов A *по крайней мере один находятся в отношении* ρ *с другим*;

R : *рефлексивным*, если $\triangle \subseteq \rho$, что означает $x\rho x$;

AR : *антирефлексивным*, если $\rho \cap \triangle = \varnothing$, что означает $x\bar{\rho}x$;

S : *симметричным*, если $\rho^\sharp \subseteq \rho$;
Поскольку $(\rho^\sharp)^\sharp = \rho$, то $\rho^\sharp = \rho$ (т.е. $x\rho y = y\rho x$);

AS : *антисимметричным*, если $\rho \cap \rho^\sharp \subseteq \triangle$, т.е.
$x\rho y \,\&\, y\rho x \Rightarrow x = y$;
$\rho \cap \rho^\sharp$ — *симметрическая часть* отношения ρ;

Специальные однородные отношения...

Определение (продолжение)

NS : *несимметричным* или *асимметричным*, если $\rho \cap \rho^{\sharp} = \varnothing$, т.е. $x\overline{\rho}y \vee y\overline{\rho}x$, или *из двух соотношений* ρ *и* $\rho^{\sharp}$ *хотя бы одно не выполнено*;

T : *транзитивным*, если $\rho^2 \subseteq \rho$, т.е. $x\rho y \,\&\, y\rho z \Rightarrow x\rho z$; Поскольку $\rho^2 \subseteq \rho \Rightarrow \rho^3 \subseteq \rho^2 \subseteq \rho$, то для транзитивного включение ρ имеем $\rho^n \subseteq \rho$, $n = 1, 2, \ldots$;

AT : *антитранзитивным*, если $\rho^2 \cap \rho = \varnothing$, что означает $\neg(x\rho y \,\&\, x\rho^2 y)$;

C : *содержащим цикл*, если для некоторых x и $k > 1$ справедливо $x\rho^k x$; в противном случае говорят, что ρ — отношение *без циклов* или *ациклическое*.

Когда $(S)\,\&\,(T) \Rightarrow (R)$?

Обозначения с указанием множества определения — ∇_A.

Теорема

Симметричное и транзитивное отношение на множестве A, первая проекция которого совпадает с A, рефлексивно.

Доказательство

Пусть $\rho \in \mathcal{R}(A)$ обладает указанными свойствами.
$Pr_1\,\rho = A$ означает существование для любого x такого y, что $x\rho y$, откуда по симметричности и $y\rho x$.
Поэтому для произвольного x справедливо

$$\exists\, y\,(x\rho y\,\&\,y\rho x) \;\Leftrightarrow\; x\rho^2 x \;\Rightarrow\; x\rho x,$$

что и означает $\triangle \subseteq \rho$.

Свойства произведения однородных отношений

Теорема (свойства произведения отношений)

Для однородных отношений α, β и γ справедливы следующие утверждения.

1. *Если β рефлексивно, то $\alpha \subseteq \alpha\beta$ и $\alpha \subseteq \beta\alpha$.*
   Отсюда $\triangle \subseteq \alpha^n$ для рефлексивного α, $n = 0, 1, \ldots$.
2. *Если α рефлексивно и транзитивно, то $\alpha^n = \alpha$, $n = 1, 2, \ldots$.*
3. *Если $\alpha, \beta \subseteq \gamma$ и γ транзитивно, то $\alpha\beta \subseteq \gamma$.*

Свойства произведения однородных отношений: доказательство

Доказательство

1. $\beta - (R) \;\Rightarrow\; \alpha \subseteq \alpha\beta \;\&\; \alpha \subseteq \beta\alpha$
   $\alpha = \alpha\Delta \subseteq \alpha\beta$ *и аналогично для другого включения.*
   $\Delta \subseteq \alpha^n$ *следует из доказанного при* $\alpha = \beta$ *по монотонности произведения соответствий.*

2. $\alpha - (R), (T) \;\Rightarrow\; \alpha^n = \alpha$
   Подставляя $\beta = \alpha$ *в* **1** *получим* $\alpha \subseteq \alpha^2$, *а т.к.* α *транзитивно, то* $\alpha^2 \subseteq \alpha$, *откуда* $\alpha = \alpha^2$ *и требуемое.*

3. $\alpha, \beta \subseteq \gamma \;\&\; \gamma - (T) \;\Rightarrow\; \alpha\beta \subseteq \gamma$
   $$(\alpha \subseteq \gamma) \;\&\; (\beta \subseteq \gamma) \;\Rightarrow\; \alpha\beta \subseteq \gamma\gamma = \gamma^2 \subseteq \gamma.$$

Инвариантность “положительных” свойств однородных отношений

Данное свойство *инвариантно* относительно некоторой операции, если при условии, что операнды обладают данным свойством, то им обладает и результат операции.

Теорема

Для однородных отношений

1. *рефлексивность инвариантна относительно $\cup$, $\cap$, $^\sharp$ и $\diamond$;*
2. *симметричность инвариантна относительно $^-$, $\cup$, $\cap$ и $^\sharp$, а относительно $\diamond$ — если и только если отношения перестановочны;*
3. *транзитивность инвариантна относительно $\cap$ и $^\sharp$, а относительно $\diamond$ — если отношения перестановочны.*

Инвариантность “положительных” свойств однородных отношений: доказательство теоремы

Доказательство

1. (R) – $\cup$, $\cap$, $^\sharp$, $\diamond$

   Первые три свойства очевидны.
   Например, для $\cup$: если диагональное отношение $\triangle$ содержат оба отношения α и β, то его содержит и их объединение.

   Инвариантность (R) относительно произведения следует из теоремы о свойствах произведения отношений.

Инвариантность “положительных” свойств однородных отношений: доказательство

Доказательство

2. (S) — $^{-}$, $\cup$, $\cap$, $^{\sharp}$

Инвариантность (S) относительно дополнения следует из свойства $\overline{\rho^{\sharp}} = (\overline{\rho})^{\sharp}$.
Пусть α, β — однородные отношения и $\alpha^{\sharp} = \alpha$, $\beta^{\sharp} = \beta$.
Для объединения и пересечения имеем

$$(\alpha \cup \beta)^{\sharp} = \alpha^{\sharp} \cup \beta^{\sharp} = \alpha \cup \beta \quad \text{и}$$
$$(\alpha \cap \beta)^{\sharp} = \alpha^{\sharp} \cap \beta^{\sharp} = \alpha \cap \beta.$$

Симметричность отношения = инвариантность относительно $^{\sharp}$.

Для произведения симметричных отношений α и β имеем:

- *если $\alpha\beta = \beta\alpha$, то $(\alpha\beta)^{\sharp} = \beta^{\sharp}\alpha^{\sharp} = \beta\alpha = \alpha\beta$;*
- *если $\alpha\beta$ симметрично, то $\alpha\beta = (\alpha\beta)^{\sharp} = \beta^{\sharp}\alpha^{\sharp} = \beta\alpha$.*

Инвариантность “положительных” свойств однородных отношений: доказательство...

Доказательство (продолжение)

3. (T) — $\cap$, $^\sharp$, а $\diamond$ — *если отношения перестановочны*

Пусть α, β *— однородные отношения и* $\alpha^2 \subseteq \alpha$, $\beta^2 \subseteq \beta$.
Отсюда $\alpha^2 \cap \beta^2 \subseteq \alpha \cap \beta$ *и по доказанному свойству* $(\alpha \cap \beta)^2 \subseteq \alpha^2 \cap \beta^2$ — $(\alpha \cap \beta)^2 \subseteq \alpha \cap \beta$.

Для псевдообращения:

$$\alpha^2 = \alpha\alpha \subseteq \alpha \Leftrightarrow (\alpha\alpha)^\sharp \subseteq \alpha^\sharp \Leftrightarrow \alpha^\sharp\alpha^\sharp \subseteq \alpha^\sharp \Leftrightarrow (\alpha^\sharp)^2 \subseteq \alpha^\sharp.$$

Для произведения отношений: если $\alpha\beta = \beta\alpha$, *то*

$$(\alpha\beta)^2 = \alpha\beta\alpha\beta = \alpha\alpha\beta\beta = \alpha^2\beta^2 \subseteq \alpha\beta.$$

Инвариантность “отрицательных” свойств однородных отношений

Теорема

Для однородных отношений α и β

1. *антирефлексивность инвариантна относительно $\cup$, $\cap$ и $^\sharp$; а относительно произведения $\alpha\beta$ — если и только если*
$$\alpha \cap \beta^\sharp = \varnothing;$$
2. *антисимметричность инвариантна относительно $\cap$ и $^\sharp$;*
3. *несимметричность инвариантна относительно $\cap$ и $^\sharp$; а относительно $\cup$ — если и только если*
$$\alpha \cap \beta^\sharp = \alpha^\sharp \cap \beta = \varnothing.$$

Инвариантность "отрицательных" свойств однородных отношений: доказательство

Доказательство

1. *Антирефлексивность ($\rho \cap \Delta = \varnothing$).*
   Инвариантность относительно $\cup$, $\cap$, $^\sharp$ очевидна. Антирефлексивность произведения отношений α и β означает, что ни для одного элемента a не найдётся элемента x с одновременной справедливостью $a\alpha x$ и $x\beta a$. Но это означает ложность $a(\alpha \cap \beta^\sharp)x$.

2. *Антисимметричность ($\alpha \cap \alpha^\sharp = \Delta$)*
   Инвариантность относительно псевдообращения очевидна, а относительно пересечения её доказывают равенства

$$(\alpha \cap \beta) \cap (\alpha \cap \beta)^\sharp = \alpha \cap \beta \cap \alpha^\sharp \cap \beta^\sharp =$$
$$= (\alpha \cap \alpha^\sharp) \cap (\beta \cap \beta^\sharp) \subseteq \Delta \cap \Delta = \Delta.$$

Доказательство теоремы...

Доказательство (продолжение)

3. *Асимметричность (несимметричность $\rho \cap \rho^\sharp = \varnothing$)*

Инвариантность относительно $^\sharp$ очевидна.

Для пересечения имеем

$$(\alpha \cap \beta) \cap (\alpha \cap \beta)^\sharp = \alpha \cap \beta \cap \alpha^\sharp \cap \beta^\sharp = (\alpha \cap \alpha^\sharp) \cap (\beta \cap \beta^\sharp) = \varnothing.$$

Для объединения:

$$(\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \beta)^\sharp = (\alpha \cup \beta) \cap (\alpha^\sharp \cup \beta^\sharp) =$$
$$= (\alpha \cap \alpha^\sharp) \cup (\beta \cap \beta^\sharp) \cup (\alpha \cap \beta^\sharp) \cup (\beta \cap \alpha^\sharp) =$$
$$= (\alpha \cap \beta^\sharp) \cup (\beta \cap \alpha^\sharp).$$

Это выражение будет равно $\varnothing$ если и только если $\alpha \cap \beta^\sharp = \alpha^\sharp \cap \beta = \varnothing$.

Инвариантность свойств однородных отношений: таблица

Инвариантность $\alpha \circ \beta$	$\cup$	$\cap$	$\sharp$	$\diamond$
Рефлексивность	**да**	**да**	**да**	**да**
Симметричность	**да**	**да**	**да**	iff $\alpha\beta = \beta\alpha$
Транзитивность	**нет**	**да**	**да**	если $\alpha\beta = \beta\alpha$
Антирефлексивность	**да**	**да**	**да**	iff $\alpha \cap \beta^\sharp = \varnothing$
Антисимметричность	**нет**	**да**	**да**	**нет**
Несимметричность	iff $\alpha \cap \beta^\sharp = \alpha^\sharp \cap \beta = \varnothing$	**да**	**да**	**нет**

Количество однородных отношений на n-элементном множестве могут быть определены —

— $u(n) = 2^{n^2}$ всевозможных однородных отношений,
из которых рефлексивных — $r(n) = 2^{n^2-n}$;
симметричных — $s(n) = 2^{\frac{n^2+n}{2}}$.

Для числа $t(n)$ транзитивных отношений не известно никакой формулы.

Величины $u(n)$, $r(n)$, $s(n)$ и $t(n)$ первых значений n:

	1	2	3	4	5	6
$u(n)$	2	16	512	6 5536	33 554 432	$\approx 6,87 \cdot 10^{10}$
$r(n)$	1	4	64	4 096	104 8576	1 073 741 824
$s(n)$	1	8	64	1 024	32 768	2 097 152
$t(n)$	2	13	171	3 994	15 4301	9 415 189

The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences — http://oeis.org/

Разделы

Отношение эквивалентности: определение

Определение

Однородные рефлексивные, симметричные и транзитивные отношения называют *отношениями эквивалентности*.

Основное обозначение — $\sim$. По определению

$$\triangle \subseteq \sim = \sim^\sharp = \sim^2$$

(второе равенство следует из рефлексивности $\sim$).

$\mathcal{E}(A)$ — множество всех эквивалентностей на множестве A.

Каждому $a \in A$ эквивалентности $\sim \in \mathcal{E}(A)$ сопоставляют множество $[a]_\sim$ эквивалентных ему элементов — *классов эквивалентности* или *смежных классов*:

$$[a]_\sim = \{ x \in A \mid x \sim a \}.$$

Если эквивалентность фиксирована, то смежный класс элемента a обозначаем $[a]$.

Абстракция отождествления. Разбиение множества

Формирование смежных классов происходит в ходе выполнения операции *абстракции отождествления* по данной эквивалентности, при которой отвлекаются от индивидуальных характеристик элементов, выделяя лишь их общность.

Классы эквивалентности элементов или совпадают, или не пересекаются.

Совокупность $\mathcal{D} = \{A_1, A_2, \ldots\}$ непустых подмножеств множества A образует его *разбиение*, если объединение всех подмножеств из $\mathcal{D}$ совпадает с A и все они попарно не пересекаются:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots, \qquad A_i \cap A_j = \varnothing \text{ при } i \neq j.$$

Элементы $A_1, A_2, \ldots$ разбиения $\mathcal{D}$ — *блоки*; символически — $(A_1 \mid A_2 \mid \ldots)$, в конечном случае — $(A_1 \mid A_2 \mid \ldots \mid A_k)$.

Теорема о классах эквивалентности

Разбиение $\mathcal{D}$ множества задает отношение эквивалентности $\sim$ на нём: смежные классы $\sim$ есть блоки разбиения $\mathcal{D}$.

Теорема

1. *Если на множестве $A \neq \varnothing$ задана эквивалентность, то множество смежных классов образует разбиение A.*
2. *Разбиение множества $A \neq \varnothing$ на блоки единственным образом определяет эквивалентность $\sim \in \mathcal{E}(A)$ так, что для любой пары a, b элементов A*

   $a \sim b \;\Leftrightarrow$ *«a и b находятся в одном блоке разбиения».*

« Теорема о классах эквивалентности находит в математике широчайшее применение, и её по праву можно считать одной из главных (а то и самой главной) теоремой».

В. А. Успенский

Теорема о классах эквивалентности: пример

Пусть дано разбиение $\mathcal{D}$ непустого множества A на блоки: $\mathcal{D} = (\,A_1 \mid A_2 \mid \ldots)$.

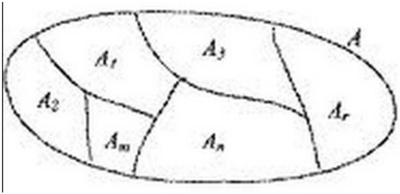
- Замкнём $\mathcal{D}$ относительно теоретико-множественных операций $\cup$, $\cap$, $^{-}$, т.е. достроим $\mathcal{D}$ до множества $\mathcal{S}$ так, чтобы эти операции стали устойчивы на $\mathcal{S}$.
- Тогда $\mathcal{S}$ будет алгеброй подмножеств множества A, причём её атомами будут блоки $A_1, A_2, \ldots$.

Фактормножества: определение

Определение

Множество, элементами которого являются классы эквивалентности множества A по отношению эквивалентности $\sim$ называется *фактормножеством* и обозначается $A/\sim$.

$$A = \{a_1, a_2, \dots\},$$
$$\mathcal{D} = (A_1 \mid A_2 \mid \dots) \Leftrightarrow \sim,\ A_i \subseteq A,\ i = \overline{1, 2, \dots},$$
$$A/\sim = \{A_1, A_2, \dots\}.$$



Фактормножества: пример

Пример

1. Если A — множество зёрен, насыпанных в мешки и для зёрен a и b положить $a \sim b$, если они лежат в одном мешке, то
   - классами эквивалентности являются множества зёрен, лежащих в одном мешке,
   - фактормножеством $A/\sim$ — множество мешков.

Фактормножества: пример

Пример

1. Если A — множество зёрен, насыпанных в мешки и для зёрен a и b положить $a \sim b$, если они лежат в одном мешке, то
   - классами эквивалентности являются множества зёрен, лежащих в одном мешке,
   - фактормножеством $A/\sim$ — множество мешков.
2. Если W — множество слов русского языка и для слов u и v положить $u \sim v$, если они начинаются с одной и той же буквы (в русском языке сколько букв?

Фактормножества: пример

Пример

1. Если A — множество зёрен, насыпанных в мешки и для зёрен a и b положить $a \sim b$, если они лежат в одном мешке, то
   - классами эквивалентности являются множества зёрен, лежащих в одном мешке,
   - фактормножеством $A/\sim$ — множество мешков.
2. Если W — множество слов русского языка и для слов u и v положить $u \sim v$, если они начинаются с одной и той же буквы (в русском языке сколько букв? 33), то
   - классами эквивалентности будут множества слов, начинающихся на данную букву,
   - а фактормножеством $W/\sim$ — множество соответствующих букв (заметим, что $|W/\sim| =$

Факторимножества: пример

Пример

1. Если A — множество зёрен, насыпанных в мешки и для зёрен a и b положить $a \sim b$, если они лежат в одном мешке, то
   - классами эквивалентности являются множества зёрен, лежащих в одном мешке,
   - фактормножеством $A/\!\sim$ — множество мешков.
2. Если W — множество слов русского языка и для слов u и v положить $u \sim v$, если они начинаются с одной и той же буквы (в русском языке сколько букв? 33), то
   - классами эквивалентности будут множества слов, начинающихся на данную букву,
   - а фактормножеством $W/\!\sim$ — множество соответствующих букв (заметим, что $|W/\!\sim| = 31$).

Инвариантность эквивалентности

Эквивалентность $\sim$ не инвариантна относительно взятия дополнения и инвариантна относительно псевдообращения.

Из теоремы инвариантности “положительных” свойств вытекает

Теорема

Отношение эквивалентности инвариантно относительно пересечения.

Следствие: пересечение эквивалентностей из произвольной непустой (возможно бесконечной) совокупности есть эквивалентность.

Эквивалентности α и β называют *когерентными*, если для любой пары смежных классов по α и по β соответственно справедливо утверждение *«либо один из данных классов лежит в другом, либо они не пересекаются»*.

Инвариантность объединения эквивалентностей

Теорема (об инвариантности объединения эквивалентностей)

Пусть α и β — эквивалентности. Тогда

1. *объединение $\alpha \cup \beta$ является эквивалентностью, если и только если α и β когерентны;*
2. *если $\alpha \cup \beta$ — эквивалентность, то $\alpha \cup \beta = \alpha\beta$ и, поскольку $\alpha \cup \beta = \beta \cup \alpha$, эквивалентности α и β перестановочны.*

Доказательство

1. *В силу теоремы об инвариантности "положительных" свойств однородных отношений достаточно показать указанный критерий относительно транзитивности.*

Инвариантность объединения эквивалентностей: доказательство

Доказательство (продолжение)

Необходимость.

Пусть α и β — когерентные эквивалентности на множестве A.

Рассмотрим образы $(\alpha \cup \beta)(a)$ всех элементов $a \in A$.

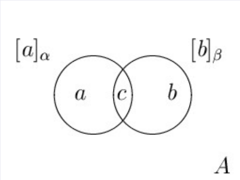
Легко видеть, что при указанном условии эти подмножества A либо совпадают, либо не пересекаются и их объединение совпадает A.

Таким образом, они образуют разбиение множества A, задавая эквивалентность на нём.

Инвариантность объединения эквивалентностей: доказательство...

Доказательство (продолжение)

Достаточность. *Пусть теперь данные эквивалентности не когерентны, т.е. найдутся смежные классы $[a]_\alpha$ и $[b]_\beta$ не лежащие один в другом и содержащие общий элемент c. Возьмём элементы $a \in [a]_\alpha \setminus [b]_\beta$ и $b \in [b]_\beta \setminus [a]_\alpha$. Тогда*



Пары (a, c) и (c, b) содержатся в $\alpha \cup \beta$. Если бы это отношение было эквивалентностью, то оно, в силу транзитивности, содержало бы и пару (a, b).

Последнее означает справедливость либо $a\alpha b$, либо $a\beta b$. Поскольку это не так, то $\alpha \cup \beta$ — не эквивалентность.

Инвариантность объединения эквивалентностей: доказательство...

Доказательство (продолжение)

2. $(\alpha \cup \beta) \in \mathcal{E}(A) \Rightarrow \alpha \cup \beta = \alpha\beta = \beta\alpha$

Пусть α, β *и* $\alpha \cup \beta$ *— эквивалентности.*
Тогда по теореме о свойствах произведения отношений:

из п. ❶ — *поскольку* α *и* β *рефлексивны, то* $\alpha \subseteq \alpha\beta$ *и* $\beta \subseteq \alpha\beta$, *откуда* $\alpha \cup \beta \subseteq \alpha\beta$ *по монотонности объединения;*

из п. ❸ — *поскольку* $\alpha \subseteq \alpha \cup \beta$ *и* $\beta \subseteq \alpha \cup \beta$, *а* $\alpha \cup \beta$ *транзитивно, то* $\alpha\beta \subseteq (\alpha \cup \beta)^2 \subseteq \alpha \cup \beta$ *.*

Следовательно, $\alpha \cup \beta = \alpha\beta$.

Инвариантность объединения эквивалентностей: примеры

Пусть α и β — эквивалентности на множестве $A = \{a, b, c, d\}$ со смежными классами

$$A/\alpha = (\,a \mid b \mid c, d\,) \text{ и } A/\beta = (\,a, b \mid c \mid d\,).$$

1. $\alpha \cup \beta$ есть эквивалентность: $A/(\alpha \cup \beta) = (\,a, b \mid c, d\,)$.
2. Возьмём по два элемента из одного и из разных классов эквивалентности $\alpha \cup \beta$:

   a **и** b **(из одного класса)** — тогда справедливо $a(\alpha\beta)b$, поскольку справедливо и $a\alpha a$, и $a\beta b$;

   a **и** c **(из разных классов)** — тогда $a(\alpha\beta)c$ несправедливо, т.к. не существует элемента x такого, что $a\alpha x$ и $x\beta c$ верны одновременно.

Инвариантность произведения эквивалентностей

Теорема

Произведение эквивалентностей будет эквивалентностью, если и только если они перестановочны.

Это следствие теоремы о свойствах произведения отношений.

Если S — некоторое свойство элементов множества A, то *наименьшим подмножеством, обладающим свойством S* называется пересечение всех подмножеств A, элементы которых обладают данным свойством.

Теорема

Для перестановочных эквивалентностей произведение является наименьшей эквивалентностью, их содержащей.

Это следствие двух предыдущих теорем.

Оператор замыкания

Определение

Оператором замыкания на непустом множестве M называют отображение C множества всех подмножеств M в себя, обладающее для всех X, $Y \subseteq M$ следующими свойствами:

1. $X \subseteq C(X)$ — рефлексивность,
2. $X \subseteq Y \Rightarrow C(X) \subseteq C(Y)$ — монотонность,
3. $C(C(X)) = C(X)$ — идемпотентность.

Множество X называется *замкнутым*, если $C(X) = X$.

Наименьшее рефлексивное ρ^r [симметричное ρ^s, транзитивное ρ^t, эквивалентное ρ^e] отношение, содержащее данное отношение ρ, называется *рефлексивным [...] замыканием* ρ. Замыкание совокупности отношений есть замыкание их объединения.

Замыкания произвольного однородного отношения ρ

Рефлексивное и симметричное: $\rho^{\,r} = \rho \cup \triangle$ и $\rho^{\,s} = \rho \cup \rho^{\sharp}$.

Транзитивное. Введём отношение $\rho^{+} \overset{\text{def}}{=} \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \rho^{n}$. Ясно, что

$$a\rho^{+}b \;\Leftrightarrow\; \exists\, n\, \exists\, x_1, \ldots, x_n \; (a\rho x_1 \,\&\, x_1\rho x_2 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n\rho b),$$

ρ^{+} транзитивно и $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha^{+} \subseteq \beta^{+}$.

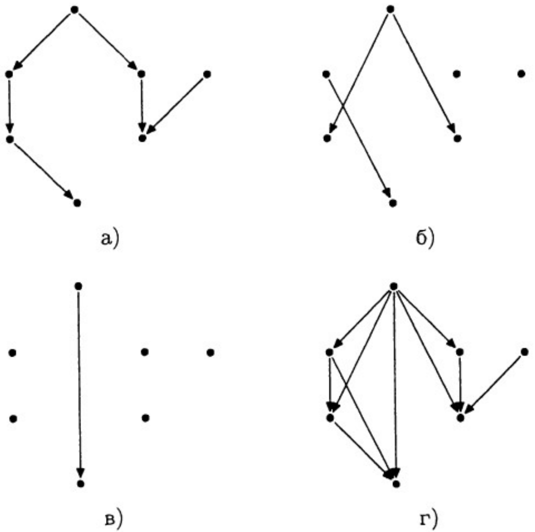
Утверждение

$$\rho^{\,t} = \rho^{+}.$$

Доказательство

Применяя операцию $^{+}$ *к* $\rho \subseteq \rho^{t} \subseteq \rho^{+}$, *получим* $\rho^{+} \subseteq \rho^{t} \subseteq \rho^{+}$, *что означает* $\rho^{\,t} = \rho^{+}$.

Транзитивное замыкание однородного отношения ρ: пример



а) ρ

б) ρ^2

в) ρ^3

г) ρ^t

Эквивалентное замыкание однородного отношения ρ

Эквивалентное (ρ^e). Очевидно для любого $\rho \in \mathcal{R}(A)$

$$\rho^* \stackrel{\text{def}}{=} (\rho^t)^r = (\rho^r)^t = \Delta \cup \rho^+ = \bigcup_{n=0}^{\infty} \rho^n.$$

ρ^* — *рефлексивно-транзитивным замыкание* ρ.

Обозначение: $\rho^= \stackrel{\text{def}}{=} (\rho \cup \rho^\sharp \cup \Delta)^t$; ясно, это эквивалентность и $\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \alpha^= \subseteq \beta^=$.

Утверждение

$$\rho^e = \rho^=.$$

Доказательство

Применяя операцию $^=$ *к* $\rho \subseteq \rho^e \subseteq \rho^=$, *получим* $\rho^= \subseteq \rho^e \subseteq \rho^=$, *что означает* $\rho^e = \rho^=$.

Эквивалентное замыкание однородного отношения ρ...

Теорема

Эквивалентное замыкание совокупности эквивалентностей совпадает с объединением всевозможных произведений этих эквивалентностей.

Доказательство

Пусть R — совокупность эквивалентностей и
E — объединение всевозможных их произведений.

Напоминание. *Теорема о свойства произведения отношений: Для однородных отношений α, β, γ справедливы следующие утверждения.*

❶ Если β рефлексивно, то $\alpha \subseteq \alpha\beta$ и $\alpha \subseteq \beta\alpha$.

Отсюда $\triangle \subseteq \alpha^n$ для рефлексивного α, $n = 0, 1, \ldots$.

❸ Если $\alpha, \beta \subseteq \gamma$ и γ транзитивно, то $\alpha\beta \subseteq \gamma$.

Эквивалентное замыкание однородного отношения ρ...

Доказательство (продолжение)

Тогда по теореме о свойствах произведения отношений:

согласно п. ❶ $\sim \subseteq E$ *для любой эквивалентности* $\sim$ *из* R,

согласно п. ❸ $E \subseteq \sim$, *откуда и следует требуемое.*

Следствия

1. *Эквивалентное замыкание* $\{\alpha,\,\beta\}^e$ *двух эквивалентностей* α *и* β *совпадает с объединением всевозможных произведений вида* $\alpha\beta,\,\beta\alpha,\,\alpha\beta\alpha,\,\beta\alpha\beta\ldots$.
2. *Если* α *и* β *— перестановочные эквивалентности, то*
$$\{\alpha,\,\beta\}^e = \alpha \cup \beta = \alpha\beta$$
(последнее равенство есть утверждение теоремы о произведении перестановочных эквивалентностей).

Замыкание однородного отношения ρ: примеры

1. Пусть на множестве $A = \{1, \ldots, 8\}$ эквивалентности α и β порождаются разбиениями $D_\alpha = (1,2 \mid 3,4 \mid 5,6,7 \mid 8)$ и $D_\beta = (1,4 \mid 2,3 \mid 5,6 \mid 7 \mid 8)$. Тогда $D_{(\alpha\cup\beta)^e} = (1,2,3,4 \mid 5,6,7 \mid 8)$.

2. Пусть $\alpha, \beta \in \mathcal{E}(\{a, b, c, d, e, f\})$ и
$$D_\alpha = (a,b \mid c \mid d \mid e,f) \text{ и } D_\beta = (a \mid b,c \mid d,e \mid f).$$
Тогда
$$(a,c) \in \alpha\beta, \text{ но } (c,a) \notin \alpha\beta \quad \text{и}$$
$$(c,a) \in \beta\alpha, \text{ но } (a,c) \notin \beta\alpha. \quad \text{То есть}$$
   - эквивалентности α и β не перестановочны;
   - ни $\alpha\beta$, ни $\beta\alpha$ эквивалентностями не являются.

$\{\alpha, \beta\}^e = \alpha\beta \cup \beta\alpha$ задаётся разбиением $(a,b,c \mid d,e,f)$.

Дробная эквивалентность

Пусть α и β — две эквивалентности на множестве A.

Включение $\beta \subseteq \alpha$ для них означает, что любой смежный класс по β лежит в некотором смежном классе по α, т.е. разбиение множества A на смежные классы по β есть подразбиение его разбиения на смежные классы по α.

Или: разбиение по β есть *измельчение* разбиения по α.

Для таких эквивалентностей определим на фактормножестве A/β *дробную эквивалентность* α/β по правилу

$$[x]_\beta \, (\alpha/\beta) \, [y]_\beta \stackrel{\text{def}}{=} [x]_\alpha = [y]_\alpha$$

для произвольных $x, y \in A$.

Таким образом, два смежных класса по β эквивалентны по α/β, если они находятся в одном смежном классе по α.

Ядро соответствия

Определение

Пусть A и B — непустые множества и $\rho \subseteq A \times B$ — непустое соответствие между ними.
Тогда *ядром соответствия* ρ называется однородное на A отношение $\operatorname{Ker}\rho$, определяемое соотношением для $a_1,\, a_2 \in A$.

$$a_1 (\operatorname{Ker}\rho)\, a_2 \overset{\text{def}}{=} \underset{B}{\forall}\, b : a_1 \rho b = a_2 \rho b \;\big(\leftrightarrow\; \rho(a_1) = \rho(a_2)\big).$$

Двойственно, *коядро соответствия* ρ — это однородное на B отношение $\operatorname{CoKer}\rho$, определяемое соотношением для $b_1,\, b_2 \in B$.

$$b_1 (\operatorname{CoKer}\rho)\, b_2 \overset{\text{def}}{=} \underset{A}{\forall}\, a : a \rho b_1 = a \rho b_2 \;\big(\leftrightarrow\; \rho^\sharp(b_1) = \rho^\sharp(b_2)\big).$$

Два элемента A находятся в отношении $\operatorname{Ker}\rho$, если совпадают их образы, а два элемента B в отношении $\operatorname{CoKer}\rho$, — если совпадают их прообразы.

Ядерная эквивалентность

Легко проверяется, что $\operatorname{Ker}\rho$ и $\operatorname{CoKer}\rho$ суть отношения эквивалентности на соответствующих множествах (наследуются свойства $=$).

$\operatorname{Ker}\rho$ — *ядерная эквивалентность*.

Смежные классы указанных эквивалентностей называются *ядрами* и *коядрами* соответственно.

Обозначения:

- $\mathrm{Core}(a)$ — ядро, содержащее элемент $a \in A$ (ясно, что $\mathrm{Core}(a) = [a]_{Ker\rho}$);
- $\mathrm{CoCore}(b)$ — коядро, содержащее элемент $b \in B$.

При задании отношения матрицей, ядрам будут соответствовать совокупности одинаковых строк.

Ядерная эквивалентность однородного отношения

Понятие ядерной эквивалентности и ядра может быть использовано для частного случая однородного отношения: два элемента множества A находятся в отношении $\operatorname{Ker}\rho$, если они связаны исходным отношением $\rho \in \mathcal{R}(A)$ в точности с одними и теми же элементами A.

Пример: для отношения на множестве $\{1, \ldots, 4\}$ заданного матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ядрами будут $\{1, 2\}$ и $\{3, 4\}$.

Числа Белла: определение

Числом Белла $B(n)$ называется число всевозможных разбиений n-элементного множества (формально $B(0) = 1$).

Например, трёхэлементное множество $\{\, a,\ b,\ c \,\}$ допускает пять разбиений ($B(3) = 5$):

$$(\, a \mid b \mid c \,),\ (\, a \mid b, c \,),\ (\, b \mid a, c \,),\ (\, c \mid a, b \,),\ (\, a, b, c \,).$$

Ясно, что для $|A| = n$ имеем $B(n) = |\mathcal{E}(A)|$.

Значения $B(n)$ для первых значений n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$B(n)$	1	1	2	5	15	52	203	877	4 140	21 147	115 975

Числа Белла быстро растут:
например, $B(20) = 51\,724\,158\,235\,372$.

Числа Белла: формулы

- $B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B(k)$;
- $B(n) = \dfrac{1}{e} \sum_{0 \leqslant k} \dfrac{k^n}{k!}$ — *формула Добинского*;
- $\sum_{0 \leqslant n} B(n) \dfrac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1}$ — производящая функция:

$$e^{e^x-1} = e^{\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\ldots\right)} =$$

$$= 1 + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots\right) + \frac{\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots\right)^2}{2} + \ldots =$$

$$= 1 + x + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right) + \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + \ldots =$$

$$= 1+x+(1+1)\frac{x^2}{2}+(1+3+1)\frac{x^3}{6}+\ldots = 1x^0+1x^1+2\frac{x^2}{2!}+5\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

Разделы

Отношение толерантности

Определение

Однородные рефлексивные и симметричные отношения называют *отношениями толерантности*, символически $\simeq$, τ.

$$\Delta \subseteq \simeq = \simeq^{\sharp}$$

Пример

Описанные ниже отношения τ суть толерантности.

1. A и B — точки евклидова пространства и $A\tau B \Leftrightarrow |A - B| \leqslant r$, где r — положительное число.
2. Слова русского языка находятся в отношении τ, если они отличаются не более, чем на на одну букву.
3. Для элементов x и y некоторого кольца

$$x\tau y \Leftrightarrow \textit{«элемент } x - y \textit{ необратим»}.$$

Пространства толерантности: пример

Определение

Пару $\mathfrak{T} = \langle A, \simeq \rangle$, где A — непустое множество, а $\simeq$ — толерантность на нём, называют *пространством толерантности*.

Пример

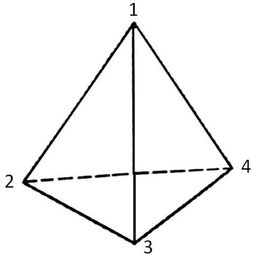
Пусть A — непустое множество и $\mathcal{P}^*(A)$ — совокупность всех его непустых подмножеств.
Для $X, Y \in \mathcal{P}^*(A)$ положим $X \simeq Y \overset{\text{def}}{=} (X \cap Y \neq \varnothing)$.
Тогда $\langle \mathcal{P}^*(A), \simeq \rangle$ — пространство толерантности.

Множество $\mathcal{P}^*(\{1, \ldots, n\})$ называют *$(n-1)$-мерным симплексом*, символически S^n.
Это обобщение понятия отрезка, треугольника и тетраэдра на многомерный случай.
Очевидно $|S^n| = 2^n - 1$.

Отношение толерантности: представление симплексами

Числа $1, \ldots, n$ интерпретируются как *вершины* симплекса,
2-элементные подмножества — как *рёбра*,
3-элементные — как *плоские (двумерные) грани*...,
k-элементные подмножества — как $(k-1)$*-мерные грани*.

Пример: симплекс S^4 (3-мерный тетраэдр) —

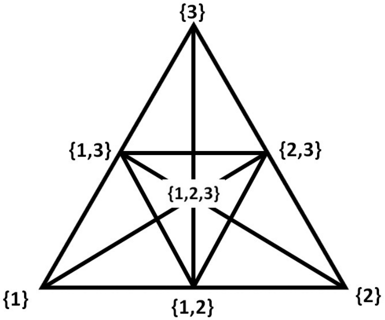


Толерантность граней симплекса S^n означает их геометрическую инцидентность — наличие общих вершин.

Представление симплексов графами

При таком представлении элементы S^n сопоставляются вершинам $(2^n - 1)$-элементного графа, рёбра которого отображают соответствующие толерантности.

Пример: графовое представление симплеса S^3 (треугольника) —



Отношение толерантности: представление $(0, 1)$-матрицами и графами

Представление $(0, 1)$-матрицами — матрица будет симметрична и содержать единицы на главной диагонали, а любая такая матрица — задавать толерантность.

Представление графами — как и любое бинарное отношение. При этом вершины x и y графа $G(\tau)$ при $x\tau y$ соединяют неориентированным ребром (симметричность), а петли при каждой вершине (рефлексивность) опускают.

Пример: задание матрицей и графом толерантности на трёхэлементном множестве $\{1, 2, 3\}$:

$$M(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 1 \text{ --- } 2 \text{ --- } 3$$

Алгебраические свойства операций над толерантностями

Транзитивное замыкание толерантности есть эквивалентность.

Если толерантность содержится в эквивалентности, то и её транзитивное замыкание содержится в этой эквивалентности.

Доказательство: применяем операцию ^{t} к $\simeq \subseteq \sim$.

Следствие

Транзитивное замыкание толерантности есть минимальная её включающая эквивалентность.

Утверждение

Пусть S — совокупность толерантностей на множестве A. Тогда $a\,S^e\,b$ для $a, b \in A$ справедливо, если и только если

$$\exists\, n\, \exists\, a_1, \ldots, a_n\ (\, a\tau_1 a_1 \tau_2 a_2 \tau_3 \ldots a_n \tau_{n+1} b\,),$$

где $\tau_1, \ldots, \tau_{n+1}$ — какие-то толерантности из S.

Свойства толерантности

Симметризованное произведение $\circ$ однородных отношений α и β:

$$\alpha \circ \beta \stackrel{\text{def}}{=} \alpha\beta \cup \beta\alpha.$$

Теорема (о свойствах толерантности)

1. *Толерантность инвариантна относительно* $\cup$, $\cap$, $^\sharp$, *а относительно* $\diamond$ *— если и только если толерантности перестановочны (и в этом случае* $\alpha \diamond \beta = \alpha \circ \beta$*).*
2. *Толерантность инвариантна относительно* $\circ$.
3. *Если* τ *— толерантность, то и* $\overline{\tau} \cup \triangle$ *толерантность.*
4. *Если* α *— рефлексивное однородное отношение, то отношения* $\alpha \cup \alpha^\sharp$, $\alpha \cap \alpha^\sharp$ *и* $\alpha \circ \alpha^\sharp$ *суть толерантности.*

Свойства толерантности: доказательство

Доказательство

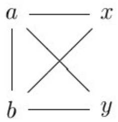
1. *Все утверждения следуют из пп. ❶ и ❷ теоремы об инвариантности "положительных" свойств однородных отношений.*
2. *Пусть α и β — толерантности. Тогда*
   R: *рефлексивность $\alpha \circ \beta$ следует из рефлексивности $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ (п. ❶ упомянутой теоремы);*
   S: $(\alpha \circ \beta)^\sharp = (\alpha\beta \cup \beta\alpha)^\sharp = (\alpha\beta)^\sharp \cup (\beta\alpha)^\sharp = $
   $= \beta^\sharp\alpha^\sharp \cup \alpha^\sharp\beta^\sharp = \beta\alpha \cup \alpha\beta = \alpha \circ \beta.$
3. *Дополнение сохраняет свойство симметричности, но превращает рефлексивное отношение антирефлексивное.*
4. *Отношения, являющиеся результатами указанных операций наследуют рефлексивность α и приобретают свойство симметричности.*

Ядра толерантности

Расщепление понятий при переходе от частного к общему:

эквивалентность	$\longleftrightarrow$	ядро $=$ класс
толерантность	$\longleftrightarrow$	ядро $+$ класс

Ядра толерантности суть классы эквивалентности $\mathrm{Ker}\,\tau$ (т.е. элементы принадлежат одному ядру, если они толерантны одним и тем же элементам).
Разбиение на ядра — покрытие носителя пространства толерантности.

Примеры:
- Ядра толерантности 1—2—3 суть $\{1\}$, $\{2\}$ и $\{3\}$.
- 

Для этой толерантности ядрами будут $\mathrm{Core}(a) = \{a, b\}$, $\mathrm{Core}(x) = \{x\}$ и $\mathrm{Core}(y) = \{y\}$. Элементы x и y не могут быть объединены в ядро, т.к. $x\tau x$, но $y\overline{\tau}x$.

Фактормножество пространства толерантности по его ядру

Фактормножество $A^* = A/\operatorname{Ker}\tau$ *пространства толерантности* $\langle\, A,\, \tau \,\rangle$ *по его ядру* состоит из ядер толерантности τ.

Если на A^* ввести отношение τ^* по правилу

$$\operatorname{Core}(x)\,\tau^*\,\operatorname{Core}(y) \;\Leftrightarrow\; x\tau y,$$

то τ^* оказывается отношением толерантности, а $\langle\, A/\operatorname{Ker}\tau,\, \tau^* \,\rangle$ — пространством толерантности.

Отображение $\varphi\colon A \to A/\operatorname{Ker}\tau$, $\varphi(x) = \operatorname{Core}(x)$ ставящее в соответствие каждому элементу его ядро, обладает свойством

$$x\tau y \;\equiv\; \varphi(x)\,\tau^*\varphi(y).$$

В таких случаях говорят, что *отображение* φ *тождественно согласованно с парой отношений* τ и τ^* на множествах A и $A/\operatorname{Ker}\tau$ соответственно.

Фактормножество пространства толерантности...: пример

1. На 9-элементном множестве $A = \{1, \ldots, 9\}$ толерантность τ задана матрицей

$$M(\tau) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} C_1 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_3 \\ C_5 \\ C_6 \\ C_5 \end{matrix} \end{array}.$$

Ядра τ:

$$C_1 = \mathrm{Core}(1) = \{1, 2\}, \quad C_2 = \mathrm{Core}(3) = \{3\},$$
$$C_3 = \mathrm{Core}(4) = \{4, 6\}, \quad C_4 = \mathrm{Core}(5) = \{5\},$$
$$C_5 = \mathrm{Core}(7) = \{7, 9\}, \quad C_6 = \mathrm{Core}(8) = \{8\}.$$

Фактормножество пространства толерантности...: пример...

Матрица толерантности τ^* на фактормножестве $A^* = A/\operatorname{Ker}\tau = \{C_1, \ldots, C_6\}$ есть

$$M(\tau^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Для толерантности τ на $\{1, 2, 3\}$ —

$$M(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad 1 \text{ ——— } 2 \text{ ——— } 3$$

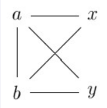
имеем $M(\tau^*) = M(\tau)$.

Классы толерантности

Определение

Пусть $\langle A, \tau \rangle$ — пространство толерантности. Подмножество $K \subseteq A$ называют *предклассом толерантности в A* или *τ-предклассом*, если в нём все пары элементов толерантны. Максимальный (по включению) предкласс называют *классом толерантности в A* или *τ-классом*.

Пример

1. Любое одноэлементное множество пространства толерантности — тривиальный пример предкласса.
2. Для $1 — 2 — 3$ классы толерантности суть $\{1, 2\}$ и $\{2, 3\}$.
3. 

Здесь классы толерантности суть $\{a, b, x\}$ и $\{a, b, y\}$.

Классы толерантности: пример...

Пример

4. Рассмотрим пространство толерантности $\langle S^n, \simeq \rangle$.
   Обозначим через $\widetilde{K}_i$ множество некоторых граней, содержащих элемент i, $1 \leqslant i \leqslant n$.
   Ясно, что $\widetilde{K}_i$ — предкласс.

   Если K_i объединяет все грани, содержащие элемент i, то он нерасширяем, и, следовательно, является классом толерантности в S^n.
   Геометрически класс K_i состоит из всевозможных граней симплекса, содержащих вершину i.

   Для S^3 получим, например,
   $$K_1 = \{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Предклассы толерантности и покрытия множеств

- Совокупность всех предклассов толерантности пространства $\langle A, \tau \rangle$ образует покрытие множества A, т.к. объединение всех одноэлементных предклассов уже образует покрытие A.

- Если заданы некоторое непустое множество A и покрытие его подмножествами, то тем самым задана и толерантность τ на A: любую пару элементов A, принадлежащих данному подмножеству считаем толерантными.
  При этом данные подмножества будут τ-классами.

(Ср. с теоремой о классах эквивалентности.)

Предкласс толерантности содержится в некотором классе

Лемма

Для всякого предкласса существует содержащий его класс.

Доказательство (для конечного случая)

Рассмотрим некоторый τ-предкласс K и все τ-предклассы, его содержащие. Любая цепь вложенных друг в друга таких предклассов, начинающаяся с K, будет конечной, а заключительный предкласс будет уже классом.

Теорема

Для всякой пары элементов пространства толерантности $\langle A, \tau \rangle$, находящихся в отношении τ, существует класс толерантности, их содержащий.

(Эта пара элементов образует предкласс; начинаем с него).

Разложение толерантности на квадраты

Утверждение

Если $K_1, \ldots, K_m$ *— все классы толерантности* τ*, то*

$$\tau = \bigcup_{i=1}^{m} K_i^2 .$$

Пример

Для 1—2—3 классы толерантности — $K_1 = \{1, 2\}$ и $K_2 = \{2, 3\}$;
$K_1^2 = \{\,(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\,\}$,
$K_2^2 = \{\,(2,2), (2,3), (3,2), (3,3)\,\}$.

При задании толерантности $(0, 1)$-матрицами:

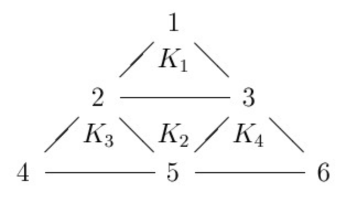
$$M(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Неприводимое разложение толерантности на квадраты

Разложение толерантности на квадраты *неприводимо*, если из него нельзя исключить если ни один квадрат.

Пример

Толерантность τ на множестве $A = \{1, \ldots, 6\}$:



Классы толерантности:

$K_1 = \{1, 2, 3\}, \ K_2 = \{2, 3, 5\},$
$K_3 = \{2, 4, 5\}, \ K_4 = \{3, 5, 6\}.$

Разложения

- $\tau = K_1^2 \cup K_2^2 \cup K_3^2 \cup K_4^2$ — избыточно (любой элемент из K_2 содержится в одном из остальных классов);
- $\tau = K_1^2 \cup K_3^2 \cup K_4^2$ — неприводимо.

Базис толерантности: определение

Определение

Базисом $\mathcal{B}(\tau)$ толерантности τ на конечном множестве называется всякий набор классов, определяющий её неприводимое разложение на квадраты.

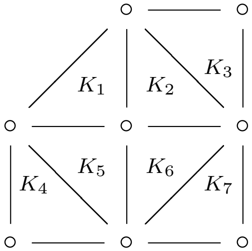
Толерантность может иметь несколько базисов с различным числом входящих в них классов.

В предыдущем примере единственный базис толерантности τ состоит из её классов K_1, K_3 и K_4.

Когда толерантность оказывается эквивалентностью её базис единственен и его составляют смежные классы.

Базис толерантности: пример

Толерантность на восьмиэлементном множестве:



Классы K_1–K_5 и K_7 образуют 6-элементный,
а классы K_1, K_3, K_4, K_6 и K_7 — 5-элементный базисы данного пространства толерантности.

Факторможество пространства толерантности по базису

Определение

Фактормножеством пространства толерантности $\langle\, A,\, \tau \,\rangle$ *по его базису* $\mathcal{B}(\tau)$ называется множество, элементами которого являются классы из $\mathcal{B}(\tau)$ и их всевозможные (не обязательно попарные) непустые пересечения.

Обозначение: $A/\mathcal{B}(\tau)$; в случае единственного базиса — A/τ.

Пример

1. Продолжение примера с пространством толерантности пространства $\langle\, A,\, \tau \,\rangle$ на 9-элементном множестве A, заданной матрицей.

   Единственный базис толерантности $\mathcal{B}(\tau)$:
   $K_1 = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $K_2 = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$, $K_3 = \{1, 2, 5, 8\}$.

Факторможество по базису: пример...

Находим непустые попарные пересечения:

$$K_1 \cap K_2 = \{1, 2, 3\} = K_4,$$
$$K_1 \cap K_3 = \{1, 2\} = K_1 \cap K_2 \cap K_3 = K_5,$$
$$K_2 \cap K_3 = \{1, 2, 5\} = K_6.$$

Таким образом, факторможество пространства A по базису есть $A/\tau = \{K_1, \ldots, K_6\}$.

Это факторможество имеет лишь один общий элемент $\{1, 2\}$ с также 6-элементным факторможеством по ядру $A/\operatorname{Ker}\tau$, и поэтому $A/\tau \neq A/\operatorname{Ker}\tau$.

Фактормножество по базису: пример...

2. Для 3-элементного пространства с толерантностью $1 — 2 — 3$ классы суть $K_1 = \{1, 2\}$ и $K_2 = \{2, 3\}$; они и составляют его единственный базис.
Добавив к этим классам $K_3 = K_1 \cap K_2 = \{2\}$, получим фактормножество по базису — $\{K_1, K_2, K_3\}$.

   Напомним, что фактормножество по ядру есть
$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} = \{K_1 \setminus K_3, K_2 \setminus K_3, K_3\}$.

Понятие фактормножества пространства толерантности по его базису оказывается особенно полезном в случаях, кода базис содержит небольшое число элементов.

Оно используется, в частности, при минимизации конечных автоматов.

Разделы

Разделы

Разделы