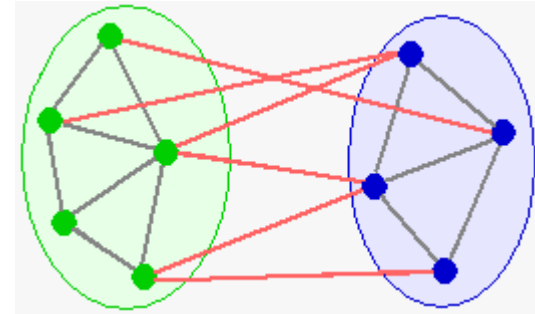
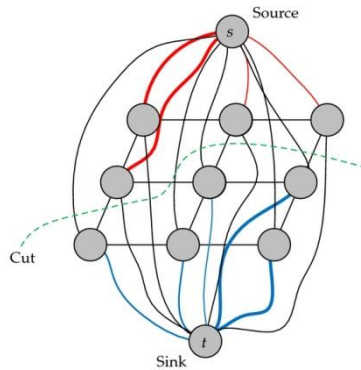
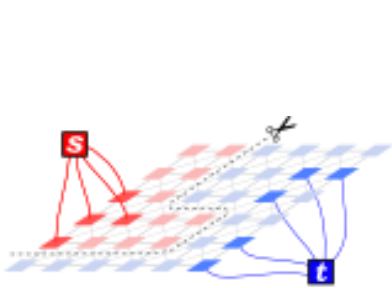


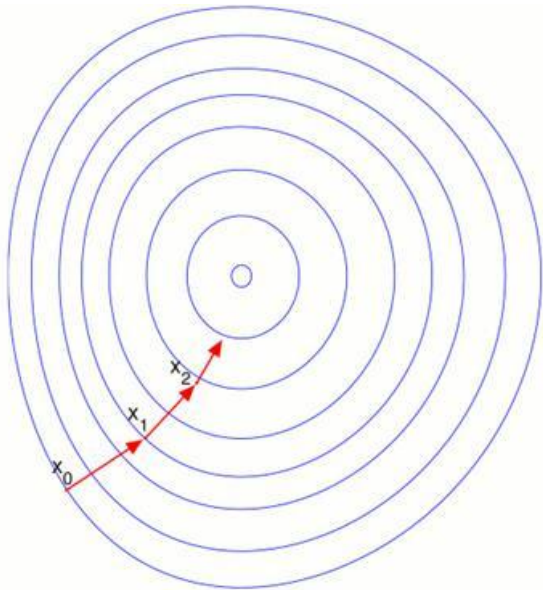
Глобальная дискретная оптимизация при помощи разрезов графов



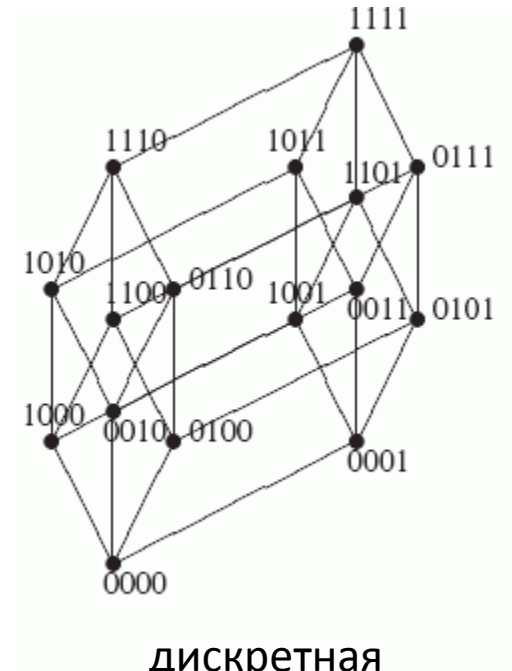
Петя

Оптимизация

$$E(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{C}$$



непрерывная



дискретная
(комбинаторная)

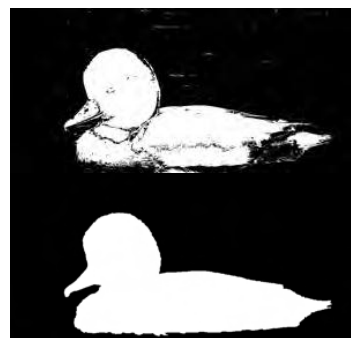


План

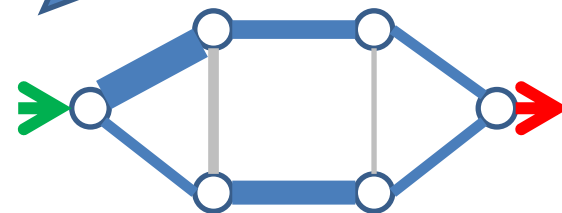


$$E(\mathbf{x}) \rightarrow \min$$

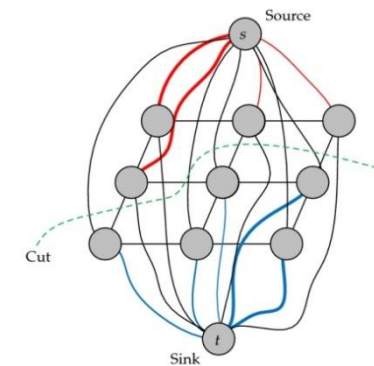
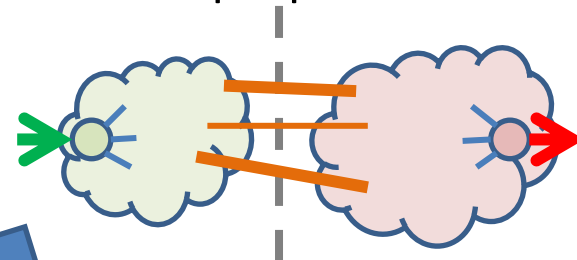
Семейство функций



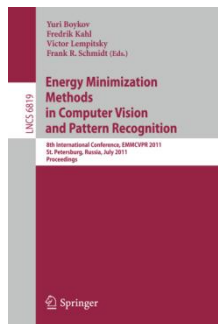
Пример задачи



Потоки и разрезы в сетях



Сведение задачи
ОПТИМИЗАЦИИ

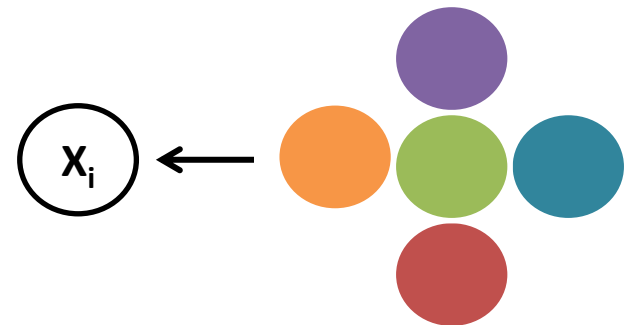
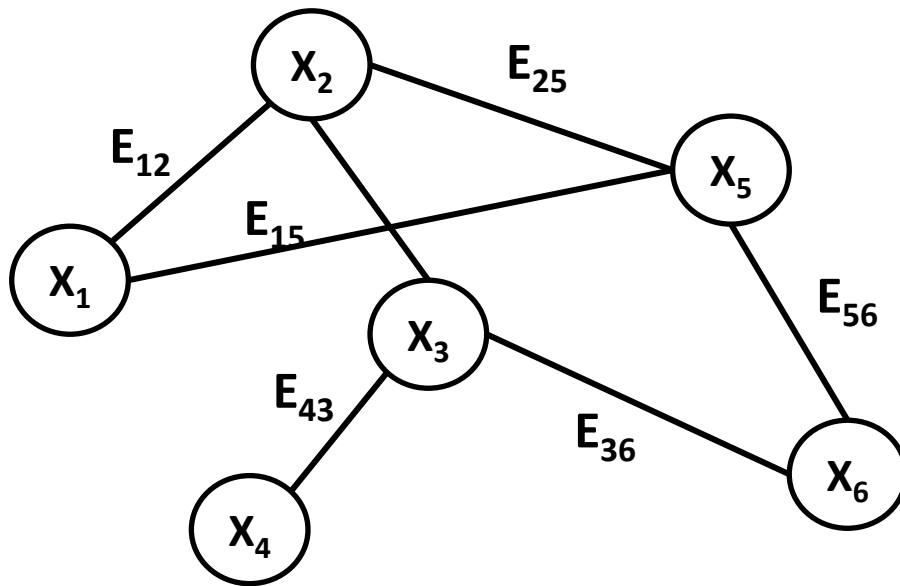


Заключение

Семейство функций

$$E(\mathbf{x}) = \sum_i E_i(x_i) + \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} E_{ij}(x_i, x_j) \rightarrow \min$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$$



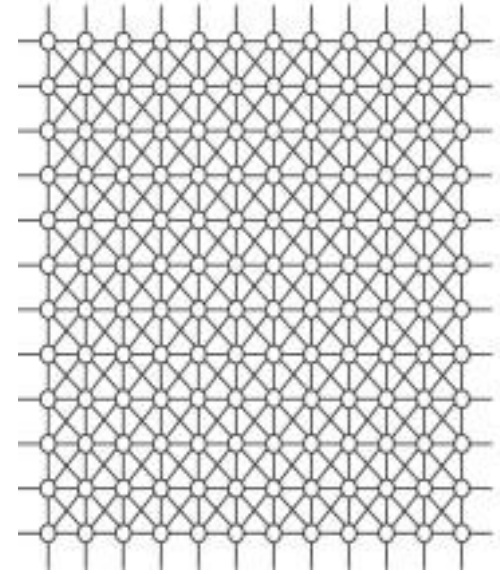
Пример: вырезание фона

$$E(\mathbf{x}) = \sum_i E_i(x_i) + \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} E_{ij}(x_i, x_j)$$

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{pixel } i \text{ — background} \\ 1, & \text{pixel } i \text{ — object} \end{cases}$$

$$E_{ij}(x_i, x_j) = \delta_{ij}[x_i \neq x_j]$$

$$E_i(x_i) = \dots \text{ Локальное предсказание}$$



Локальная модель

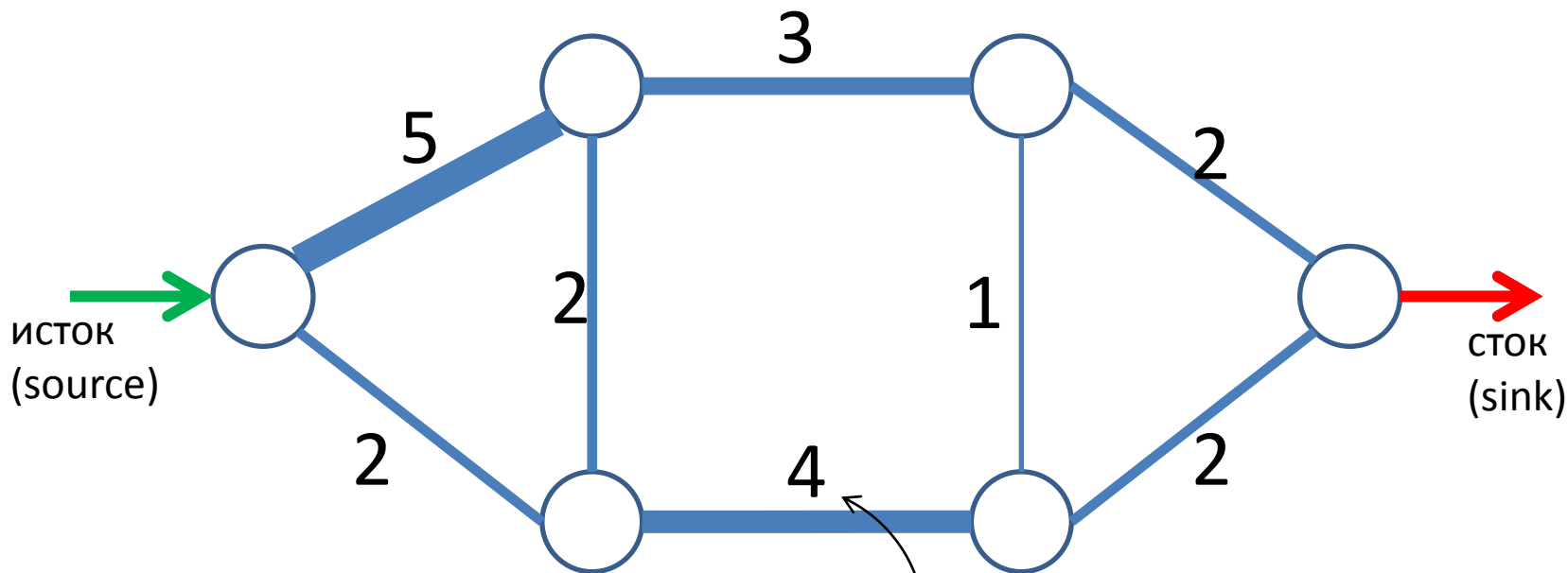
Глобальная модель

Сеть



трубопроводная

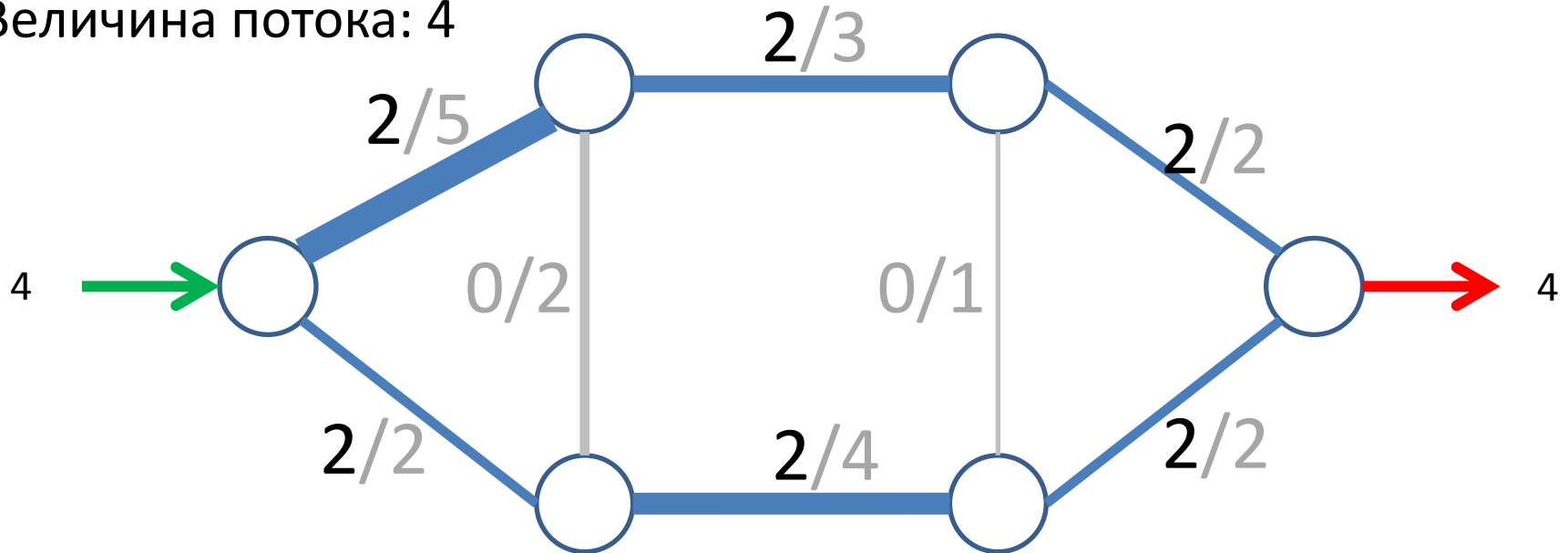
Сеть (теория графов)



Пропускная способность ребра

Поток (flow)

Величина потока: 4

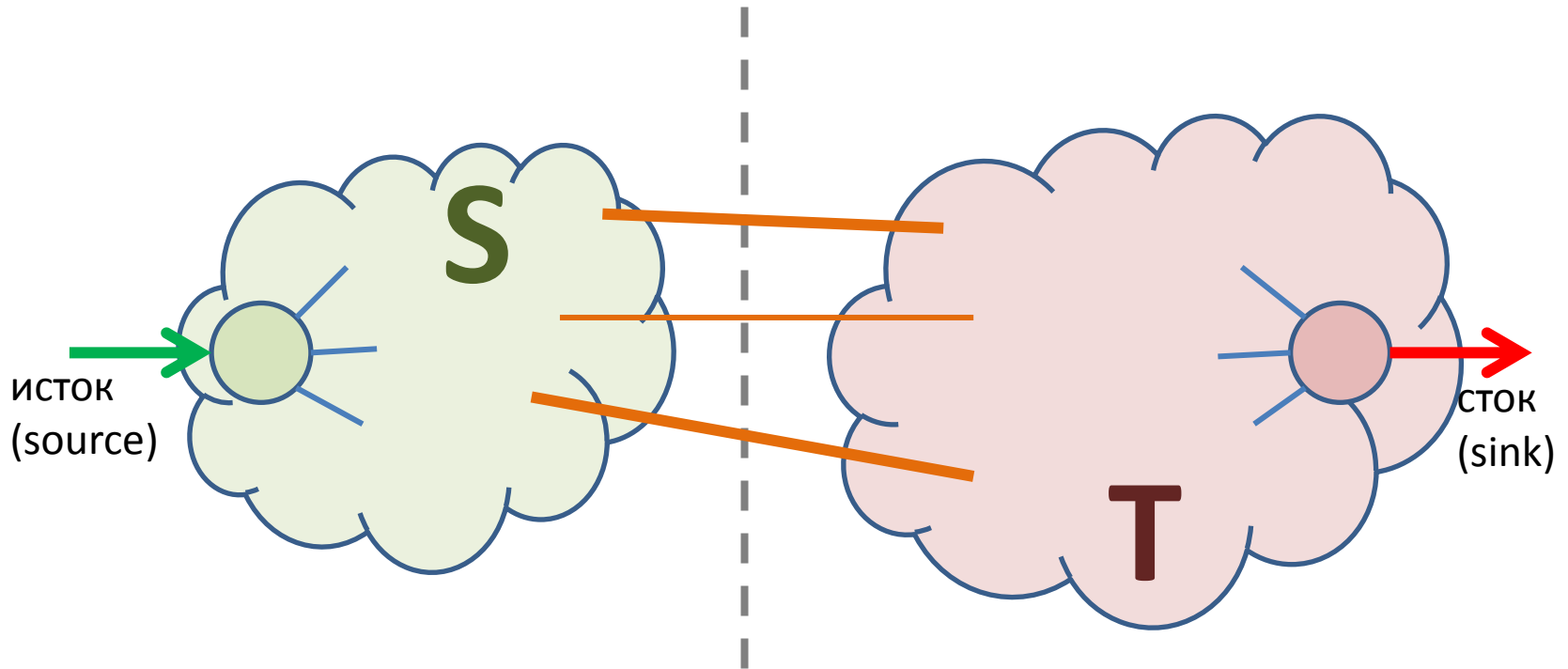


Поток: функция $f(\text{○} \text{---} \text{○}) \rightarrow \mathbb{R}$

С ограничениями:

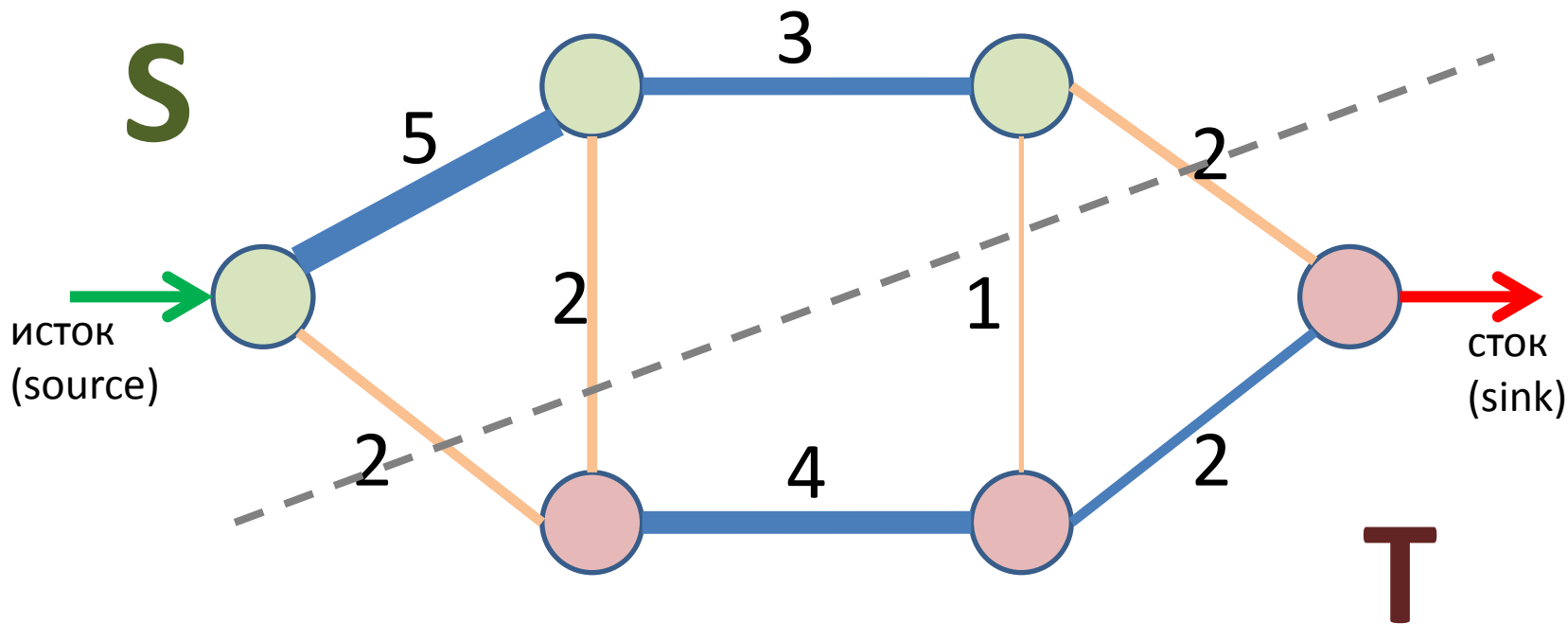
1. В узлах вода не проливается
2. Трубы не лопаются

Разрез (s-t cut)



Максимальный поток \leq Пропускной способности разреза

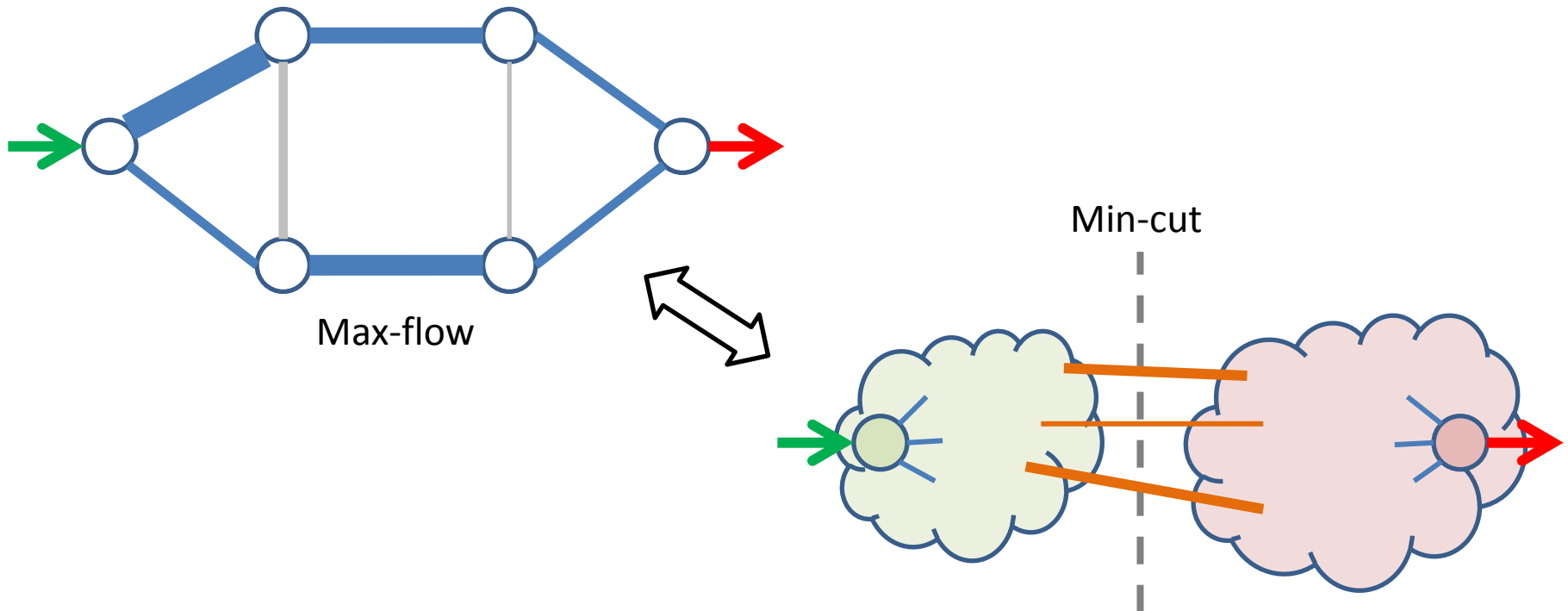
Разрез (s-t cut)



Пропускная способность разреза: 7

Min-cut \rightarrow Max-flow

- Теорема Форда-Фалкерсона:
 - Задачи Min-cut и Max-flow равносильны



Семейство функций

$$E(\mathbf{x}) = \sum_i E_i(x_i) + \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} E_{ij}(x_i, x_j)$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$$

1 шаг

$$x_i \in \{0, 1\}$$

+ условие *субмодулярности*
на $E_{ij}(\cdot, \cdot)$

- Точный эффективный алгоритм
- Глобальное решение

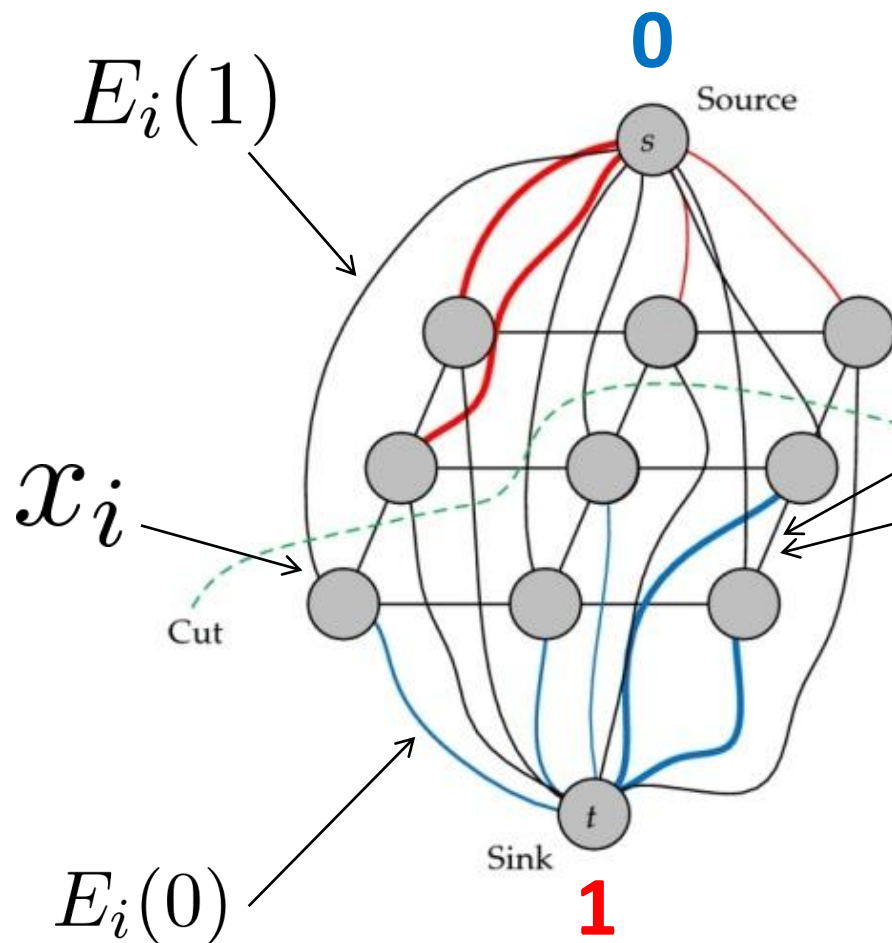
2 шаг

$$x_i \in \{1, \dots, K\}$$

- NP-complete
- Приближенное решение
- Эффективные алгоритмы
- Частные случаи



Минимизация $E \rightarrow \text{Min-cut}$



$$E(\mathbf{x}) = \sum_i E_i(x_i) + \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} E_{ij}(x_i, x_j)$$

$$x_i \in \{0, 1\}$$

+ условие субмодулярности
на $E_{ij}(\cdot, \cdot)$

$$\tilde{E}_{ij}(0, 1)$$

$$\tilde{E}_{ij}(1, 0)$$

Условие субмодулярности

$$E_{ij}(0, 0) + E_{ij}(1, 1) \leq$$

$$E_{ij}(0, 1) + E_{ij}(1, 0)$$

$$E_i(\cdot), E_{ij}(\cdot, \cdot) \rightarrow \tilde{E}_{ij}(\cdot, \cdot), \tilde{E}_i(\cdot)$$

$$\tilde{E}_{ij}(0, 0) = \tilde{E}_{ij}(1, 1) = 0$$

Max-flow: алгоритмы решения



- ✓ Эффективны в теории
- ✓ Сверхэффективны на практике

$$O(nm \log(n))$$

IBFS with dynamic trees
data structure

Реализации

- BK (Boykov, Kolmogorov)
- IBFS (Goldberg et. al)
- *Доступен исходный код*

Google

graph cut optimization code



Расширение задачи

$$E(\mathbf{x}) = \sum_i E_i(x_i) + \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} E_{ij}(x_i, x_j)$$

$$x_i \in \{0, 1\}$$

~~+ условие субмодулярности на $E_{ij}(\cdot, \cdot)$~~

«Minimizing Nonsubmodular Functions with Graph Cuts»

Kolmogorov & Rother, PAMI 2007

QPBO

Quadratic Pseudo-Boolean Optimization

Google

kolmogorov qpbo code



- Приближенное решение
- Оценка снизу оптимального значения $E(x)$

NP-complete

Расширение задачи

$$E(\mathbf{x}) = \sum_i E_i(x_i) + \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} E_{ij}(x_i, x_j)$$

~~$$x_i \in \{0, 1\}$$~~

$$x_i \in \{1, \dots, K\} \quad + \text{ограничения}$$

Множество методов:

- α -expansion
- $\alpha\beta$ -replace
- SMD
- SMR
- Модификации α, β -замены
- ...

(учет специфики задачи, различные ограничения)

Совсем универсального метода нет

Вернее есть (TRW), но
основан не на graph-cuts.
Работает значительно
дольше.



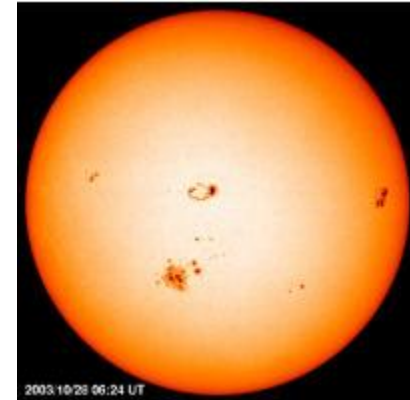
NP-complete

Приложения



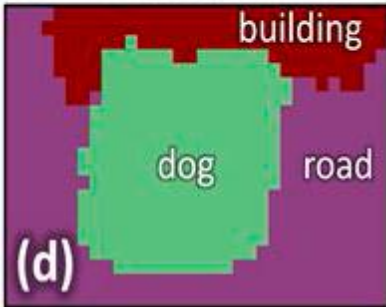
GrabCut, вырезание фона MS Office

Анализ
медицинских
изображений

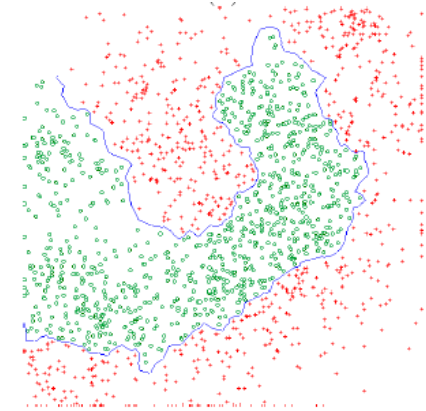


Прогнозирование вспышек

Разметка изображения

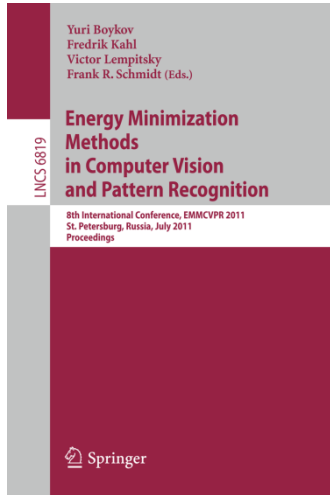


Карта глубины по стерео
изображению



Метрический классификатор
Визильтер, 2011

Что читать дальше



Energy Minimization Methods in Computer Vision and Pattern Recognition
Boykov, Y.; Kahl, F.; Lempitsky, V.; Schmidt, F.R. (Eds.), 2011

Kolmogorov, Zabini, PAMI 2004
«What energy functions can be minimized via graph cuts?»

Structured Learning and Prediction in Computer Vision
Nowozin, Lampert, 2011 Now Publishers

