МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

На правах рукописи

Карпович Павел Алексеевич

К-СИНГУЛЯРНЫЕ СИСТЕМЫ ТОЧЕК В АЛГЕБРАИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К РАСПОЗНАВАНИЮ ОБРАЗОВ

01.01.09 – Дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
А. Г. Дьяконов

Москва 2010 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Методы теории распознавания образов широко используются для решения практических задач во многих областях науки (биология, социология, экономика и т.д.). Предполагается, что исследуемые объекты принадлежат некоторому множеству M. Данное множество может быть представлено в виде объединения конечного набора классов: $M = K_1 \cup ... \cup K_l$. Задача распознавания образов (задача классификации) состоит в следующем: по конечному набору пар $S = \{(s_1, y_1), ..., (s_n, y_n)\}$ (s_i - объект из множества M, y_i - информация о принадлежности объекта s_i к классам распознавания) требуется построить алгорим A, который для произвольного допустимого объекта s множества M вычисляет значение предикатов принадлежности к классам $\{K_j\}_{i=1}^{l}$.

Для решения задач распознавания в начале 1970х годов академиком РАН Журавлевым Ю.И. была предложена модель алгоритмов вычисления оценок (АВО) [16, 19]. Благодаря своей универсальности модель предоставляет широкие возможности для описания правил классификации. Многие известные эвристические алгоритмы являются частными случаями алгоритмов вычисления оценок при специальном выборе параметров. Алгоритм в модели АВО для распознавания набора из q объектов строит числовую $(q \times l)$-матрицу оценок близости, в которой элемент на пересечении i-й строки и j-го столбца характеризует близость i-го объекта к j-му классу. По этой матрице оценок близости осуществляется классификация объектов.

Модель АВО широко применяется на практике, однако прямая численная реализация систем распознавания с использованием классических формул вычисления оценок близости практически невозможна. Возникающие препятствия связаны с большой вычислительной сложностью явных реализаций АВО. Множество работ посвящены именно алгоритмической оптимизации моделей АВО [1, 16, 19, 8, 11, 12, 9]. Многие результаты исследований в данном направлении описывают способы упрощения формул вычисления оценок близости и их эффективной алгоритмической реализации при определенном выборе параметров модели.

В данной диссертационной работе рассматривается возможность эффективной реализации моделей АВО в зависимости от выбора системы опорных множеств - важного параметра модели. Вводится определение 0-эффективной системы опорных множеств, частичный порядок на множестве классов эквивалентностей таких систем и описываются основные свойства данного порядка. Показывается, что для моделей с 0-эффективными системами опорных множеств возможно упростить классические формулы вычисления оценок близости. Также исследуется задача построения алгоритма распознавания свойства 0-эффективности системы опорных множеств по ее описанию. Доказывается NP-полнота этой задачи с дополнительными ограничениями.

В конце 1970х годов Журавлевым Ю.И. был предложен алгебраический подход к распознаванию образов. Одной из основных идей, используемой в алгебраическом подходе, является идея конструирования алгоритма, решающего задачу классификации, из некорректных (эвристических) алгоритмов при помощи корректирующих операций. Например, для модели АВО вводятся операции умножения на константу, сложения и умножения алгоритмов модели. Результирующий алгоритм распознавания ищется в виде полинома от базовых алгоритмов модели АВО. Семейство полиномов степени не более k называется алгебраическим замыканием степени k для используемой модели АВО.

Одним из центральных понятий алгебраического подхода является корректность семейств алгоритмов распознавания. Семейство алгоритмов распознавания называется корректным тогда и только тогда, когда при помощи алгоритмов семейства можно получить любую матрицу классификации. Фактически, свойство корректности отражает мощность семейства алгоритмов распознавания.

Первые корректные семества алгоритмов рампознавания были построены Журавлевым Ю.И.[16]. В общем случае (для достаточно богатых моделей алгоритмов) корректность семейств полностью исследована в работах Рудакова К.В.[50, 51, 52, 55, 57]. Первые критерии корректности моделей АВО ограниченной мощности были получены Матросовым В.Л. [35, 36, 39, 40, 41, 42].

Для класса моделей АВО с пороговыми функциями близости критерий корректности при некоторых ограничениях был получен Дьяконовым А.Г. [10]. Оказывается, что корректность алгебраического замыкания степени k эквивалентна отсутствию свойства k-сингулярности у системы точек признаковых описаний контрольных объектов. Система q точек в конечномерном пространстве называется k-сингулярной, если размерность пространства значений полиномов (с поэлементным умножением) от столбцов матрицы попарных расстояний системы меньше q. В [10] получен геометрический критерий k-сингулярности для конечномерных пространств с l_1-метрикой и метрикой Хэмминга. Понятие k-сингулярности также возникает в задачах, связанных с теорией интерполяции [10, 62]. Возможность представления произвольной функции, определенной на конечном множестве точек S в $\mathbb{R}^m$, в виде суммы функций от меньшего числа аргументов зависит от наличия свойства k-сингулярности у системы S.

В данной работе приводится алгебраический критерий k-сингулярности, описывающий свойство k-сингулярности в виде линейной зависимости системы антипотенциальных функций $\rho^k(s, s_i)$, где ρ - l_1-метрика или метрика Хэмминга, s_i - точка системы.

Описана процедура построения алгоритма разделения системы точек в пространстве $\mathbb{R}^m$ с l_1-метрикой на подсистемы с невырожденными матрицами попарных расстояний. В рамках постановки задачи классификации, предложенной в работе [10], такой алгоритм позволяет разбивать множество контрольных объектов на “области компетентности“, для каждой из которых линейное замыкание операторов АВО является корректной моделью. Получена оценка на минимальное число подсистем без свойства 1-сингулярности, на которые может быть разбита произвольная система точек.

Основными результатами являются:

- описание моделей АВО с 0-эффективными системами опорных множеств и способов эффективных алгоритмических реализаций данных моделей;
- алгебраический критерий k-сингулярности для систем точек в $\mathbb{R}^m$;
- алгоритм разбиения произвольной конечной системы точек в $\mathbb{R}^m$ на минимальное число подсистем с невырожденными матрицами попарных l_1-расстояний и верхняя оценка на число таких подсистем.

Результаты диссертации докладывались на следующих конференциях:

- Международных конференциях студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2009» [28], «Ломоносов 2010» [32] (работа заняла третье место в конкурсе научных работ студентов и аспирантов факультета ВМК) (Москва, МГУ);
- 52-й научной конференции МФТИ «Современные и проблемы фундаментальных и прикладных наук» [31] (работа отмечена дипломом победителя (3 место) конкурса научно-исследовательских работ студентов и аспирантов) (Долгопрудный, МФТИ);
- Всероссийской конференции «Математические методы распознавания образов - 14» [30] (работа отмечена дипломом II степени за победу в конкурсе докладов молодых ученых) (Суздаль);

- Международной конференции «Интеллектуализация обработки информации - 2010» [34] (Пафос, Кипр);

Глава 1. Основные определения и обзор предыдущих работ

1.1. Задача распознавания образов

Рассматривается задача распознавания образов в стандартной постановке [16]. Имеется множество допустимых объектов M, разбитое на классы

$$M = K_1 \cup ... \cup K_l.$$

Для каждого из допустимых объектов $s \in M$ существует *полное признаковое описание* (значение набора признаков) $I(s) = (a_1, .., a_n)$ и вектор значений предикатов принадлежности в классам, на которые разбито множество допустимых объектов: $\tilde{\alpha}(s) = (\alpha_1(s), .., \alpha_l(s))$, где значение предиката "$s \in K_i$" равно $\alpha_i(s) \in \{0, 1\}$, $i = 1, 2, .., l$.

Для некоторого набора объектов $\widetilde{S} = \{\widetilde{s_1}, .., \widetilde{s_t}\}$ известны признаковые описания и значения предикатов принадлежности к классам распознавания $\{\alpha_j(\widetilde{s_i})\}_{i=1,j=1}^{t,l}$. Данное множество называется эталонным набором, а объекты из него называются эталонными объектами. Имеется также множество объектов $S = \{s_1, .., s_q\}$, называемое контрольным набором. Задача состоит в построении алгоритма A, который, используя информацию об эталонном наборе, правильно классифицирует объекты контрольного набора

$$A(I_0(K_1, .., K_l), I(s_i)) = (\alpha_1^A(s_i), .., \alpha_l^A(s_i))),$$

где $\alpha_j^A(s_i) = \alpha_j(s_i)$, $j = 1, 2.., l$, $1 = 1, 2, .., q$, $I_0(K_1, .., K_l)$ - совокупность признаковых описаний и предикатов принадлежности к классам распознавания для объектов эталонного набора (*истинная стандартная информация*[16]).

Алгоритму распознавания разрешается отказаться от вычисления конкретного предиката принадлежности. Рассматриваются также некорректные алгоритмы, допускающие ошибки при классификации. Для семейства таких алгоритмов $\{\mathbb{A}\}$ вводится функционал качества $\phi(A)$ и задача распознавания образов состоит в отыскании алгоритма $\tilde{A}$, максимизирующего данный функционал качества

$$\phi(\tilde{A}) = \sup_{A\in\mathbb{A}} \phi(A).$$

1.2. Алгоритмы вычисления оценок

При построении модели алгоритмов вычисления оценок предполагается, что множество допустимых объектов M является декартовым произведением множеств значений признаков

$$M = M_1 \times ... \times M_n,$$

M_j - метрическое пространство значений j-го признака с метрикой ρ_j. Множество признаков обозначим через $P_n = \{1, 2, .., n\}$.

Как было описано во введении, алгоритм модели АВО A строится в виде суперпозиции распознающего оператора и решающего правила: $A = B \circ C$. Оператор B вычисляет набор оценок близости распознаваемых объектов к классам K_j, на основании этой информации правило C принимает решение о вхождении объектов в тот или иной класс. Оценки близости к классам вычисляются по следующей формуле

$$\Gamma[B] = \ ||\Gamma_{ij}[B]||_{q\times l},$$

$$\Gamma_{ij}[B] = \sum_{a,b=0,0}^{1,1} x_{ab} \sum_{\omega\in\Omega_A} \sum_{\tilde{s}_p\in\tilde{K}_j^a} w^p w_\omega \mathrm{B}_\omega^{\varepsilon_\omega,b}(\tilde{s}_p, s_i), \tag{1.1}$$

где $w^p \in \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ при $p \in \{1, \ldots, t\}$ (вес p-го объекта), Ω_A - система опорных множеств (система опорных множеств - семейство подмножеств признаков $\omega \in \Omega_A, \omega \subseteq P_n$), $w_\omega \in \mathbb{R}^+$ при $\omega \in \Omega_A$ - вес опорного множества ω),$(a,b) \in \{0,1\}^2$, $x_{ab} \in \{0,(-1)^{a+b}\}$,

$$\tilde{K}_j^a = \begin{cases} \tilde{S} \cap K_j, & a = 1, \\ \tilde{S} \backslash K_j, & a = 0, \end{cases}$$

$\mathrm{B}_\omega^{\varepsilon_\omega,b}(\tilde{s}_p, s_i)$ - функция близости между объектами признакового пространства M.

В данной работе центральное место занимает исследование моделей АВО с пороговыми функциями близости. Для двух допустимых объектов $s^c, I(s^c) = (c_1,..,c_n)$, $s^d, I(s^d) = (d_1,..,d_n)$ и набора числовых порогов $\widetilde{\varepsilon} = (\varepsilon_1,...,\varepsilon_n)$ обозначим через $\delta^{\,\widetilde{\varepsilon}}(s^c, s^d) = (\delta_1,...,\delta_n)$ вектор результатов пороговых сравнений в признаковых пространствах

$$\delta_j = \begin{cases} 1, \text{ если } \rho_j(c_j, d_j) \leq \varepsilon_i \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Определение [16]. Функция близости $B_{\omega_j}(s^c, s^d)$, принимающая значения 0 и 1 называется пороговой, если она однозначно определяется значениями координат вектора $\delta^{\,\widetilde{\varepsilon}}(s^c, s^d)$, входящими в опорное множество ω_j. Также будем использовать для пороговых функции близости обозначения $B_{\omega_j}(\delta^{\,\widetilde{\varepsilon}}(s^c, s^d))$ и $B(\omega_j, \delta^{\,\widetilde{\varepsilon}}(s^c, s^d))$.

Пороговыми являются следующие функции близости:

$$B_{\omega_j}^q(\delta^{\,\widetilde{\varepsilon}}(s^c, s^d)) = \begin{cases} 1, \text{ если } \sum\limits_{j_k \in \omega_j} \delta_{j_k} > q \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \qquad (1.2)$$

функция равная 1 тогда и только тогда, когда выполняется более чем q пороговых сравнений;

$$B_{\omega_j}^{q_1,q_2}(\delta^{\widetilde{\varepsilon}}(s^c,s^d)) = \begin{cases} 1, \text{ если } \sum\limits_{j_k\in\omega_j} \delta_{j_k} > q_1 \text{ и } \sum\limits_{j_k\in\omega_j} 1-\delta_{j_k} < q_2 \\ 0, \text{ иначе} \end{cases} \tag{1.3}$$

функция равная 1 тогда и только тогда, когда выполняется более чем q_1 пороговых сравнений, и не выполняется менее чем q_2 сравнений.

Простым и очень важным примером пороговых функции близости являются пороговые функции близости для моделей АВО с системами одноэлементных опорных множеств.

$$\mathrm{B}_{\omega}^{\varepsilon_\omega,b}(s^c,s^d) = \begin{cases} b, & \rho_\omega(s_\omega^c,s_\omega^d) \le \varepsilon_\omega, \\ 1-b, & \rho_\omega(s_\omega^c,s_\omega^d) > \varepsilon_\omega, \end{cases}$$

где $\omega \in P_n$ и $b \in \{0,1\}$.

1.3. Эффективные реализации АВО

Ряд исследований моделей АВО были направлены на упрощение и оптимизацию прямых формул (1.1) вычисления оценок близости [1, 16, 19]. Для класса моделей с пороговыми функциями близости, в которых каждый признак имеет свой определенный вес, а вес опорного множества рассчитывается как сумма весов, входящих в него признаков, удалось найти условия, при которых модель АВО существенно опрощается.

Пусть $p_1,..,p_n$ - веса признаков из P_n. Как было обозначено выше, вес опорного множества $\omega_j = \{j_1,...,j_u\}$ в будет равен сумме весов признаков, входящих в него: $\gamma(\omega_j) = p_{j_1}+...+p_{j_u}$. Формула вычисления оценок близости преобразуется к следующему виду

$$\Gamma_{ij}[B] = \sum_{a,b=0,0}^{1,1} x_{ab} \sum_{\tilde{s}_p \in \tilde{K}_j^a} w^p \sum_{\omega \in \Omega_A} (\sum_{p_j \in \omega} p_j) \mathrm{B}_{\omega}^{\varepsilon_\omega}(\tilde{s}_p, s_i).$$

Результаты, связанные с упрощением данной формулы, показывают что при удачном выборе системы опорных множеств возможно свернуть часть формулы

$$\Gamma(\tilde{s}, s_i) = \sum_{\omega \in \Omega_A} (\sum_{p_j \in \omega} p_j) \mathrm{B}_{\omega}^{\varepsilon_\omega}(\tilde{s}, s_i).$$

В работе [16] явно показывается, что возможность построения быстрых алгоритмов типа вычисления оценок существенно зависит от выбора системы опорных множеств модели. Автором предлагается общий подход к изучению задачи об эффективной реализации моделей АВО и устанавливается, что возможность такой реализации тесно связана с "симметрией" системы опорных множеств.

Мы будем называть характеристическим вектором опорного множества $\omega : \omega \in P_n$ бинарный вектор $\chi(\omega) = (\chi_1^\omega, ..., \chi_n^\omega)$, в котором

$$\chi_i^\omega = \begin{cases} 1, \text{ если } i \in \omega \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Определение [16]. Пороговая функция B называется симметрической, если ее значение определяется только числом выполненных и невыполненных пороговых неравенств на опорном множестве, для которого она вычисляется.

Определение [16]. Система опорных подмножеств Ω_A называется правильной, если из условия $\omega_i \in \Omega_A$ и ω_i имеет мощность k $(1 \leq k \leq n-1)$ следует, что все подмножества мощности k принадлежат Ω_A.

Теорема [16]. Если функция близости $\mathrm{B}_{\omega}^{\varepsilon_\omega}$ является симметрической, и система опорных множеств Ω_A - правильной, то для произвольной пары объектов (s_a, s_b) в векторе суммы

$$\sum_{\omega \in \Omega_A} \chi(\omega) \mathrm{B}_{\omega}^{\varepsilon_\omega}(s_a, s_b)$$

координаты принимают не более двух различных значений. Вектор данной суммы может быть представлен в виде

$$\delta^{\tilde{\varepsilon}}(s_a, s_b) V^1 + (\tilde{1} - \delta^{\tilde{\varepsilon}}(s_a, s_b)) V^0,$$

где $\tilde{1}$ - вектор, все координаты которого равны 1. В данном случае общая формула для оценки близости может быть переписана в виде

$$\Gamma(\tilde{s}, s_i) = \tilde{p} \cdot (\delta^{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{s}, s_i) V^1 + (\tilde{1} - \delta^{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{s}, s_i)) V^0),$$

где $\tilde{p}$ - вектор весов признаков.

Для конкретных функций близости и систем опорных множеств возможно вычислить значения констант V^0 и V^1.

Утверждение [16]. Для системы функций близости (1.2) и правильной системы опорных множеств Ω_k, содержащей только подмножества мощности k, верны равенства

$$V^0 = \sum_{u=1}^{k-q} C_{n-r-1}^{u-1} C_r^{k-u},$$

$$V^1 = \sum_{u=0}^{k-q} C_{n-r}^{u} C_r^{k-u-1},$$

где r - число 1 среди координат вектора $\delta^{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{s}, s_i)$, q - параметр из описания семейства функций (1.2).

В предположении, что веса всех признаков одинаковы и равны p, и $k > n - q$, формула вычисления оценок близости может быть еще упрощена.

Утверждение [19].

$$\Gamma(\tilde{s}, s_i) = pk \cdot \sum_{u=0}^{k-q} C_r^{k-u} C_{n-r}^u$$

В работе [19] также рассматривается ряд различных функций близости и семейств опорных множеств, для которых приведены эффективные формулы вычисления формулы оценок близости в модели АВО.

В работе [1] было исследовано как изменяется число различных значений вектора суммы

$$\sum_{\omega \in \Omega_A} \chi(\omega) \mathrm{B}_{\omega}^{\varepsilon_\omega}(s_a, s_b) \tag{1.4}$$

при применении к системе опорных множеств Ω_A различных теоретико-множественных операций и изометрических подстановок. В работе вводится обобщенное семейство пороговых функций близости $B(\delta(\tilde{s}, s_i), \Delta, \varepsilon^1, \varepsilon^2)$ (см. [1]). Семейство включает в себя функции близости вида (1.2) и (1.3). При помощи данного семейства определяется понятие ранга системы опорных множеств.

Определение [1]. Система опорных множеств Ω_A имеет ранг $R(\Omega_A)$ равный k, если для любой функции близости обощенного семейства и произвольного вектора сравнений $\delta(s_a, s_b)$ число различных координат у вектора суммы (1.4) не превышает числа k и при каких-то значениях параметров число значений в точности равно k.

Вводится понятие симметрического ранга $SR(\Omega_A)$ для системы опорных множеств Ω_A. Основные результаты работы заключаются в установлении неравенств между рангом и симметрическим рангом для системы опорных множеств. Мы кратко опишем понятие симметрического ранга и результаты статьи [1].

Система опорных множеств Ω_A может быть рассмотрена как подмножество булева куба E_n(n - число признаков) - каждому опорному множеству ω соответствует его характеристический вектор $\chi(\omega)$. Для произвольного подмножества N координат данного булева куба обозначим через S_N минимальную группу, содержащую все преобразования следующего вида: перестановки значений координат i и j для точек куба при условии, что обе координаты i и j принадлежат подмножеству N. Группой симметрии $G(\Omega_A)$ для системы опорных множеств Ω_A называется максимальная подгруппа изометрических (преобразования должны сохранять метрику Хэмминга) перестановок вершин куба E_n, сохраняющая множество Ω_A: $\varphi \in G(\Omega_A), \omega \in \Omega_A \Rightarrow \varphi(\omega) \in \Omega_A$.

Определение [1]. Система опорных множеств Ω_A имеет симметрический ранг k, если множество координат куба E_n может быть разбито на k непересекающихся подмножеств $\{N_i\}_{i=1}^{k}$ и группа симметрии $G(\Omega_A)$ содержит подгруппу $S_{N_1} \times ... \times S_{N_k}$. Не существует такого же разбиения набора координат на меньшее число подмножеств.

В работе [1] приводится описание свойств ранга и симметрического ранга для систем опорных множеств.

Теорема [1]. Для любой системы опорных множеств Ω_A справедливо неравенство

$$R(\Omega_A) \leq 4SR(\Omega_A).$$

Теорема [1]. Для произвольного разбиения $\{N_i\}_{i=1}^{k}$ набора координат на k непересекающихся подмножеств существует опорное множество Ω_A такое, что симметрический ранг Ω_A равен k, и подгруппа $S_{N_1} \times ... \times S_{N_k}$ содержится в группе симметрий $G(\Omega_A)$.

Теорема [1]. Для произвольного изометрического преобразования φ булева куба выполнено неравенство

$$0.5R(\varphi(\Omega_A)) < R(\Omega_A) < 2R(\varphi(\Omega_A)).$$

Если преобразование φ принадлежит подгруппе $S_{\{1,..,n\}}$, то имеет место равенство рангов $R(\varphi(\Omega_A)) = R(\Omega_A)$.

Теорема [1]. Для произвольных опорных множеств Ω_1 и Ω_2 будут выполнены также соотношения

$$SR(\Omega_1 \cap \Omega_2) \leq SR(\Omega_1)SR(\Omega_2),$$

$$SR(\Omega_1 \cup \Omega_2) \leq SR(\Omega_1)SR(\Omega_2),$$

$$SR(\Omega_1) = SR(E_n/\Omega_1).$$

Теоремы, приведенные выше, позволяют оценивать ранги и симметрические ранги для различных систем опорных множеств и, как следствие, число различных координат у вектора суммы (1.4). Например, для системы опорных множеств Ω_A, представляющей собой шар булева куба E_n, (Ω_A - множество точек булева куба расстояние Хэмминга от которых до некоторого фиксированного центра α меньше a) результаты работы позволяют получить оценку $R(\Omega_A) < 12$.

Работа [8] развивает исследования, начатые в работах [16, 1]. Результат состоит в описании всех систем опорных множеств Ω таких, что для произвольной функции близости $B_\omega^{q_1,q_2}(\delta^{\widetilde{\varepsilon}}(s_c, s_d))$ из семейства (1.3) вектор суммы (1.4)

$$\sum_{\omega \in \Omega} \chi(\omega) B_\omega^{q_1,q_2}(\delta^{\widetilde{\varepsilon}}(s_c, s_d))$$

содержит не более двух различных координат.

Функции из семейства (1.3) являются симметрическими пороговыми функциями близости и для них верен результат работы [16], приведенный выше: для правильной системы опорных множеств координаты исследуемого вектора суммы (1.4) принимает не более двух различных значений. Оказывается, что правильными системами почти исчерпываются системы опорных множеств, для которых можно гарантировать, что с вектор суммы (1.4) с функцией близости из системы (1.3) принимают не более двух различных значений. Имеет место следующая теорема.

Теорема [8]. Если для системы опорных множеств Ω для любой функции близости из семейства (1.3) и произвольного вектора $\delta^{\widetilde{\varepsilon}}(s_c, s_d)$ в векторе суммы

$$\sum_{\omega\in\Omega}\chi(\omega)B_{\omega}^{q_1,q_2}(\delta^{\widetilde{\varepsilon}}(s_c, s_d))$$

не более двух различных координат, то набор подмножеств $\Omega/\ \{\{0,0,..,0\},\{1,1,..,1\}\}$ должен иметь один из трех видов:

- набор подмножеств является правильной системой опорных множеств;
- для любых опорных подмножеств ω_i и ω_j должно быть выполнено $\omega_i \cap \omega_j = \oslash$;
- для любых опорных подмножеств ω_i и ω_j должно быть выполнено $\overline{\omega_i} \cap \overline{\omega_j} = \oslash$, где $\overline{\omega}$ - дополнение к множеству ω.

В работах [11, 12] строятся эффективные способы вычисления формул оценок близости в случаях когда набор характеристических векторов для опорных множеств представляет собой интервал булевого куба. Интервалом булева куба в данном случае называется носитель функции вида

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_{i_1}^{\sigma_{i_1}} x_{i_2}^{\sigma_{i_2}} ... x_{i_k}^{\sigma_{i_k}}, \sigma_{i_j} \in \{1,0\}, x^{\sigma} = \begin{cases} x, \sigma = 1 \\ \overline{x}, \sigma = 0 \end{cases}.$$

Работа [9] рассматривает функцию близости вида (1.2), которая равна 1 тогда и только тогда, когда выполнены все пороговые сравнения. Для данной функции близости рассматриваются представления набора характеристических векторов для опорных множеств в виде объединения интервалов булева куба. В работе получены эффективные формулы вычисления оценок близости. Для данной ситуации набор характеристических векторов для опорных множеств может быть рассмотрен как носитель булевой функции f. Данная функция может быть записана в виде некоторой ДНФ. Сложность предложенного в работе способа вычисления формул оценок близости существенно зависит от длины данной ДНФ.

Результаты второй главы данной диссертационной работы продолжают исследования в рамках подхода работ [16, 1, 8]. Для конкретных систем пороговых функций близости осуществляется попытка описать все системы опорных множеств, для которых координаты у векторов-сумм вида (1.4) принимают не более двух значений.

1.4. k-сингулярные системы точек

Алгебраический подход к решению задач классификации был предложен в работе [18]. Алгоритм распознавания представляется в виде суперпозиции оператора вычисления оценок близости B и решающего правила C. Оператор B по признаковым описаниям объектов из контрольной выборки S получает числовую $(q \times l)$-матрицу $\Gamma[B]$ оценок близости этих объектов к классам распознавания: q - число объектов контрольной выборки, l - число классов, ij-й элемент матрицы - оценка близости объекта s_i к классу K_j. Решающее правило C реализует завершающую стадию распознавания: по матрице оценок близости строит $(q \times l)$- матрицу классификации. Элементы матрицы классификации могут принимать значения из множества $\{1, 0, \Delta\}$(объект принадлежит классу, объект не принадлежит классу, отказ от распознавания).

Подразумевается, что оператор вычисления оценок близости B принадлежит некоторому семейству $\mathbf{B}$. В алгебраическом подходе определяются операции сложения и умножения операторов семейства $\mathbf{B}$. Операции над алгоритмами вводят как операции над матрицами оценок близости, получаемыми операторами. Например, суммой операторов B_1 и B_2 является оператор, матрица оценок близости которого представляет собой поэлементную сумму матриц оценок близости операторов B_1 и B_2. Умножение определяется аналогично и матрица оценок близости для оператора $B_1 B_2$ представляет собой поэлементное произведение матриц оценок близости для B_1 и B_2. На основе введенных операций строится определение расширения семейства операторов $\mathbf{B}$: $U^k(\mathbf{B})$ - алгебраическое замыкание степени k операторов семейства $\mathbf{B}$.

Определение [18]. Алгебраическим замыканием степени k (далее используется обозначение $U^k(\mathbf{B})$) семейства $\mathbf{B}$ называется минимальное линейное пространство, содержащее все полиномы степени не выше k от операторов семейства $\mathbf{B}$. Алгебраическое замыкание степени 1 также называется линейным замыканием семейства $\mathbf{B}$ и обозначается $L(\mathbf{B})$.

Одним из центральных понятий алгебраического подхода является свойство корректности семейств распознающих операторов и их алгебраических замыканий. Семейство операторов является корректным тогда и только тогда, когда при помощи операторов семейства можно получить любую $(q \times l)$-матрицу оценок близости. Аналогичное определение вводится для алгебраических замыканий семейств. Для большинства моделей в рамках алгебраического подхода решающее правило C предполагается фиксированным, требуется только, чтобы оно было сюръективным отображением пространства действительных $(q \times l)$-матриц в пространство $(q \times l)$-матриц из элементов множества $\{1, 0\}$. В данном случае свойство корректности семейства операторов оценок близости представляет собой достаточное условие получения произвольной классификации контрольной выборки и отражает мощность модели.

Значительное число работ было посвящено установлению критериев корректности для различных семейств моделей АВО и их алгебраических замыканий. В работе [17] было показано существование корректных алгоритмов среди операторов алгебраического замыкания для модели кусочно-линейных разделяющих поверхностей.

В работе [7] рассматривается задача существования корректных алгоритмов для алгебраического замыкания модели АВО с пороговыми функциями близости. Рассматривается задача классификации на два непересекающихся класса. Признаковое пространство предполагается евклидовым действительны пространством размерности n. Для каждого признака используется l_1 расстояние - метрика $\rho(x, y) = |x - y|$.

Для исследуемой задачи применяется *решающее правило по максимуму*: если оценка близости к первому классу больше оценки близости ко второму, то объект относят к первому классу, при обратном отношении оценок объект относят ко второму классу, при равенстве оценок отказываются от классификации.

Определение [7]. Задача распознавания (в рассматриваемой постановке) называется *задачей с разнесенными эталонами*, если для любого признака $r \in \{1, .., n\}$ найдутся эталонные объекты s_i, s_j, различающиеся значением этого признака $f_r(s_i) \neq f_r(s_j)$.

Требование "разнесенности эталонов" достаточно естественное: если есть признак, принимающий одно значение на всех (эталонных) объектах, то обычно его исключают по причине низкой информативности. При рассмотрении задачи распознавания данное требование введено для упрощения формулировок результатов.

Теорема [7]. В задаче с двумя непересекающимися классами и разнесенными эталонами алгебраическое замыкание $\mathbf{U}(B^*)$ корректно тогда и только тогда, когда $|S| = q$ - для любых двух объектов контрольной выборки должен найтись признак, различающий их.

Данная теорема устанавливает факт существования корректного алгоритма для алгебраического замыкания модели АВО с пороговыми функциями близости. Однако, также вопрос о степени замыкания, достаточной для нахождения корректного алгоритма. Если говорить о совокупной оценке на степень корректного алгебраического замыкания, то имеет место следующая теорема:

Теорема [7]. Пусть $|S| = q$ в задаче с двумя непересекающимися классами и разнесенными эталонами. Алгебраическое замыкание k-й степени модели АВО с системой всех одноэлементных опорных множеств корректно при $k \geq \min[n, \lfloor \log_2 q \rfloor]$. Оценка степени является неулучшаемой.

При рассмотрении конкретных задач оказывается, что корректность алгебраического замыкания степени k тесно связана с размерностью пространства полиномов степени k от столбцов матрицы попарных расстояний(умножение и сложения поэлементные).

Теорема [7]. В задаче с двумя непересекающимися классами и разнесенными эталонами множество матриц оценок операторов замыкания $\mathbf{U}^k(B^*)$ есть

$$\{[h_1\, h_2] \mid \{h_1, h_2\} \subseteq \mathbf{U}^k(H)\},$$

где H — матрица попарных l_1-расстояний системы контрольных объектов S.

В рассматриваемой задаче добавление новых эталонных объектов не оказывает влияние на корректность алгебраических замыканий исследуемой модели [7].

В рассматриваемой задаче алгебраическое замыкание k-й степени модели АВО с системой всех одноэлементных опорных корректно тогда и только тогда, когда размерность пространства $\mathbf{U}^k(H)$ равна q [7].

Определение [10]. Система q точек в $\mathbb{R}^m$ с l_1-расстоянием называется k-сингулярной, если размерность минимального линейного пространства, содержащего все полиномы степени не больше k от столбцов матрицы попарных l_1-расстояний, строго меньше q (умножение столбцов поэлементное). 1-сингулярные системы - системы с вырожденными матрицами попарных l_1-расстояний.

В определении метрику l_1 можно заменить на метрику Хэмминга, имеет место равенство минимального линейного пространства, содержащего все столбцы матрица попарных l_1 расстояний и аналогичного пространства для метрики Хэмминга [10].

Последняя приведенная теорема устанавливает связь между корректностью алгебраического замыкания степени k алгоритмов АВО и отсутствием свойства k-сингулярности у системы точек признаковых описаний для контрольных объектов.

Исследования, связанные со свойством k-сингулярности для систем точек, возникают не только в задачах алгебраического подхода к распознаванию. Возможность представления функции, заданной на конечном множестве точек, в виде сумма суммы функций из определенного класса в некоторых случаях сводится к анализу свойства 1-сингулярности. Точное представление функции в классе радиальных базисных функций (RBF) [63] или жестких функций (riddle functions) [62] возможно тогда и только тогда, когда такая матрица попарных l_p-расстояний невырождена.

В работах И. Шенберга [65, 66, 67] устанавливается, что для конечной системы $\{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q$ попарно различных точек пространства $\mathbb{R}^m$ и метрики l_p, $p \in (1, 2]$, $q > 1$ матрица попарных расстояний является невырожденной. Интерес представляет случай $p = 1$. В работе [60] был построен критерий 1-сингулярности для $\mathbb{R}^2$.

Теорема [60]. Система точек в $\mathbb{R}^2$ является 1-сингулярной тогда и только тогда, когда она содержит подсистему вида $\{(a_i, b_i), (a_i, b_{i+1})\}_{i=1}^r, b_{r+1} = b_1$. В работе [60] такие подсистемы названы замкнутыми путями (closed paths).

Обобщение этого критерия дает достаточное условие 1-сингулярности в $\mathbb{R}^m$: если система точек содержит замкнутый путь, то она является 1-сингулярной [61]. Необходимые и достаточные условия 1-сингулярности для $\mathbb{R}^m$ были сформулированы в работе [62] при помощи техники размеченных прямоугольников (signed rectangles).

В работе [10] приводится геометрический критерий k-сингулярности, который является обобщением критерия из работы [62]. Критерий приводится в терминах *размеченных параллелепипедов*.

Определение [10]. *Размеченным параллелепипедом* размерности r называется функция $\Pi : \mathbb{R}^m \to \{-1, 0, 1\}$ такая, что в точке $(c_1, .., c_m)$ множества $X = \mathop{\times}\limits_{p=1}^{m} \{a_p, b_p\}$ она принимает значение $(-1)^c$, где c - количество совпадающих координат у точек $(c_1, .., c_m)$ и $(a_1, .., a_m)$, $r = |\{p \in \{1, 2, \ldots, m\} \mid a_p \neq b_p\}|$. В остальных точках пространства $\mathbb{R}^m$ функция равна 0.

Параллелепипед называется константным, если это функция принимающая только неотрицательные либо только неположительные значения. Точки, в которых значение параллелепипеда отличается от 0, называется вершинами параллелепипеда.

Пусть задана система попарно различных точек $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^{q}$ пространства $\mathbb{R}^m$, $|S| = q \geq 2$. Пусть

$$\{(\tilde{s}_i)_t \mid i \in \{1, \ldots, q\}\} = \{a_{t0}, \ldots, a_{tp(t)}\} = A_t,$$

$a_{t0} < \ldots < a_{tp(t)}$ при $t \in \{1, \ldots, m\}$, $(\tilde{s}_i)_t$ — t-я координата точки $\tilde{s}_i$.

Пусть множество A равно объединению подмножеств A_t:

$$A = \bigcup_{t=1}^{m} A_t.$$

Параллелепипед (размеченный или нет) называется *последовательным относительно множества* A, если совокупность его вершин равна $\mathop{\times}\limits_{t=1}^{m} Y^t$, $\forall t \in \{1, 2, \dots, m\}$ $\exists r \in \{1, 2, \dots, p(t)\}$: $Y^t \subseteq \{a_{t,r-1}, a_{tr}\}$.

Теорема [10]. Система точек S k-сингулярна тогда и только тогда, когда найдется конечная сумма Σ функций из множества Π^k, носитель которой является подмножеством S и функция отлична 0. Утверждение справедливо для множеств Π^k следующих функций:

1. К.п. размерности больше k с одной общей вершиной.
2. Р.п. размерности больше k с одной общей вершиной.
3. Р.п. размерности $(k+1)$.
4. Последовательных относительно A р.п. размерности $(k+1)$.
5. Последовательных относительно A к.п. размерности $(k+1)$.

Пункт 3 теоремы обобщает результат [62]. Мы приведем также некоторые известные критерии, описывающие данное свойство k-сингулярности.

Теорема [10]. Система точек S не является k-сингулярной при $k \le m$ тогда и только тогда, когда любая функция $f(x_1, \dots, x_m)$ на точках системы S может быть представлена в виде конечной суммы функций, каждая из которых зависит от k переменных. Любая функция $f(x_1, \dots, x_m)$ на точках множества S может быть представлена в виде конечной суммы функций, каждая из которых зависит от $\lfloor \log_2 |S| \rfloor$ переменных.

Пусть G — минимальная группа (с операцией суперпозиции), содержащая преобразования перестановки координат $g_{t,x,y}$: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ при всех $t \in \{1, \dots, m\}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$:

$g_{t,x,y}((s_1, \ldots, s_m)) =$

$$= \begin{cases} (s_1, \ldots, s_m) & s_t \notin \{x, y\}, \\ (s_1, \ldots, s_{t-1}, y, s_{t+1}, \ldots, s_m), & s_t = x, \\ (s_1, \ldots, s_{t-1}, x, s_{t+1}, \ldots, s_m), & s_t = y. \end{cases}$$

Теорема [10]. Для любого преобразования $g \in G$ справедливо равенство $\mathbf{U}^k[S] = \mathbf{U}^k[g(S)]$, где $g(S) = \{g(\tilde{s}_i)\}_{i=1}^q$.

Система точек S k-сингулярна тогда и только тогда, когда k-сингулярна система точек $g(S)$. Достаточно ограничиться рассмотрением систем точек на целочисленной решетке, поскольку преобразованиями из группы G можно привести произвольную систему точек к системе с целочисленными координатами [10].

Теорема [10]. Система точек $S = \{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q$ является 1-сингулярной тогда и только тогда, когда существует такое подмножество $X \subseteq \{1, \ldots, q\}$, что для любого преобразования $g \in G$ система точек $\{g(\tilde{s}_i)\}_{i \in X}$ не отделима от системы точек $\{g(\tilde{s}_i)\}_{i \in \{1,\ldots,q\} \setminus X}$ гиперплоскостью.

Условие теоремы можно переформулировать следующим образом: система точек не является 1-сингулярной тогда только тогда, когда при любом разбиении ее на две непересекающиеся подсистемы они разделимы с помощью “суперпозиции” некоторого преобразования $g \in G$ и гиперплоскости. В условии теоремы отделимость гиперплоскостью можно заменить отделимостью с помощью гиперплоскости, проходящей через ноль, или любой фиксированной с уравнением $a_1x_1 + \ldots + a_mx_m + a_0 = 0$, $0 \notin \{a_1, \ldots, a_m\}$.

Для системы точек S в $\mathbb{R}^m$ можно построить набор отношений эквивалентности $\{\theta_i\}_{i=1}^m$. Две точки s_k и s_t эквивалентны согласно отношению θ_i, если у них равны i-е координаты. Нас будет интересовать матрица $T = [T_1, .., T_m]$, где каждый из блоков T_i составлен из характеристических q-мерных векторов всех классов эквивалентности для отношения θ_i. Блок T_i представляет собой бинарную матрицу размера $q \times r_i$, где r_i - количество различных значений, которые может принимать i-я координата. Можно заметить, что в каждой строке подматрицы T_i матрицы T ровно одна единица и в каждой строке матрицы T ровно m единиц. Данная матрицу T мы будем называть *характеристической матрицей классов эквивалентностей.*

Лемма [10]. Для системы точек S в $\mathbb{R}^m$ имеет место равенство линейных пространств:

$$U^k(P) = U^k(T) = U^k(\acute{P}),$$

где P - матрица попарных l_1-расстояний, $\acute{P}$ - матрица расстояний Хэмминга, T - матрица с характеристическими векторами классов эквивалентностей в качестве столбцов, описанная выше.

Данная лемма описывает свойство k-сингулярности в терминах ранга бинарной характеристической матрицы классов эквивалентностей.

1.5. Теория матроидов

Свойство корректности алгебраического замыкания k-й степени модели АВО с одноэлементными опорными множествами эквивалентна отсутствию свойства k-сингулярности у множества точек признаковых описания для контрольных объектов. Однако интерес также представляет задача о разделении системы точек для контрольных объектов на подмножества без свойства 1-сингулярности. Эффективный алгоритм позволял бы разбивать систему контрольных объектов на “области компетентности”, для каждой из которых линейное замыкание АВО было бы корректной моделью.

В третьей главе данной диссертационной работы показано, что разделение на подмножества без 1-сингулярности эквивалентно разделению строк характеристической матрицы классов эквивалентностей на подмножества, каждое из которых представляет собой линейно-независимую систему векторов. Таким образом, основной задачей является задача о разделении набора векторов в $\mathbb{R}^n$ минимальное число линейно-независимых наборов. Данная задача была решена во второй половине прошлого века с помощью теории матроидов [69, 64]. Мы приведем основные определения и краткое описание полиномиального алгоритма разбиения из работы [69].

Определение. *Матроидом* называется пара (X, I), где X - конечное множество, называемое носителем матроида, а I - система подмножеств носителя, называемое системой независимыми подмножеств и обладающее следующими свойствами:

- $\oslash \in I$;
- если $B \subset A$ и $A \in I$, то $B \in I$;
- если $A, B \in I$ и мощность A больше мощности B, то существует $x \in A$ и $x \notin B$ такой, что $B \cup \{x\} \in I$.

Базами матроида называются максимальные по включению независимые множества. Следствием второй аксиомы определения является то, что мощность всех баз является одинаковой. Используя данный факт, вводится *ранговая функция* для матроида, $rg(U)$ - мощность максимальных по включению независимых подмножеств, содержащихся в U, где U - некоторое подмножество носителя. Цепью для матроида называется зависимое множество, любое подмножество которого является независимым (минимальные по включению зависимые подмножества).

Естественным примером матроида является *матричный матроид* для конечной системы векторов в R^m, в качестве множества X выступает само конечное множество векторов, а множество I содержит в себе все линейно-независимые подмножества. Для произвольного графа G можно построить матроид циклов графа - ребра графа будут элементами множества X, а ациклические наборы ребер будут независимыми подмножествами из системы I.

В третьей главе данной работы мы также покажем, система точек S и набор ее подмножеств без свойства k-сингулярности является матроидом и при помощи алгоритмов, описанных в работах [69, 64] может быть решена задача о разделении на подмножества без свойства k-сингулярности.

Определение [68]. Пусть $M_1 = (X_1, I_1), M_2 = (X_2, I_2), .., M_k = (X_k, I_k)$ некоторый конечный набор матроидов. Объединением матроидов называется матроид $M = M_1 \vee M_2 \vee .. \vee M_k = (X_1 \cup .. \cup X_k, I_1 \vee .. \vee I_k)$:

$$I_1 \vee .. \vee I_k = \{i_i \cup .. \cup i_k | i_1 \in I_1, .., i_k \in I_k\}.$$

Доказательство корректности данного определения можно найти в книге [68]. Если говорить о задаче разделения на минимальное число независимых множеств, покрывающих носитель матроида M, то задача состоит нахождении минимальной числа p такого, что объединение p копий матроида M содержит в качестве независимого множества весь носитель M.

Фактически, нам необходимо найти минимальное число независимых подмножеств матроида M, которые покрывали бы все элементы носителя. Мы кратко расскажем об алгоритме, описанном в работе [69], и поясним некоторые моменты доказательства его корректности. Следуя за автором работы, переформулируем задачу. Будем искать алгоритм, которому на вход подается некоторое число k, а он находит раскраску элементов матроида M в k цветов, где для подмножества элементов одного цвета являются независимыми подмножествами, либо говорит, что раскраска в k цветов невозможна. При помощи такого алгоритма, очевидно, возможно построить минимальную раскраску.

Утверждение о том, что объединение матроидов степени k является матроидом позволяет говорить, что если есть правильная раскраска в k цветов двух подмножеств носителя A и B и $|A| < |B|$, то существует правильная раскраска некоторого множества $A \cup \{x\}$. Построение жадного алгоритма, априори, выглядит обоснованным.

Предполагается, что сначала все элементы являются неокрашенными. Алгоритм, пробующий построить раскраску, будет последовательно брать неокрашенные элементы и стараться добавить их к раскраске. Предположим, что часть элементов у нас уже окрашена и множества E_i являются подмножествами элементов различных цветов. Пусть мы хотим добавить неокрашенный элемент x к раскраске.

Допустим, что мы красим элемент x в цвет i и множество $E_i \cup \{x\}$ перестает быть независимым, в этом случае есть уникальная цепь из элементов объединения $E_i \cup \{x\}$ такая, что множество $E_i \cup \{x\} \backslash \{y\}$ является независимым для любого элемента данной цепи.

Используя этот факт, построим ориентированный граф D. Вершинами нашего графа будут элементы носителя и k дополнительных вершин O_i. Ребра будут строится по следующим принципам:

- ребро $x \rightarrow y$ для элементов носителя будет присутствовать в графе, если элемент y уже покрашен в какой-то из цветов $j (y \in E_j)$ и множество $E_j \cup \{x\} \backslash \{y\}$ является независимым;
- ребро $x \rightarrow O_j$ будет присутствовать в графе, если вершину можно покрасить, либо перекрасить в цвет j не нарушая раскраски и независимости множеств E_i.

Путь в нашем графе $x \rightarrow x_1 \rightarrow ... \rightarrow x_p = O_h$ называется неукорачиваемым, если если не существует ребер $x_i \rightarrow x_j$ для $j > i + 1$. Имеет место следующее утверждение.

Утверждение [69]. Для неукорачиваемого пути $x \rightarrow x_1 \rightarrow ... \rightarrow x_p = O_p$ с началом в неокрашенной вершине возможно осуществить "перекраску"не нарушая независимости множеств E_i. Вершина x_i перекрашивается в цвет вершины x_{i+1} для $i < p$, элемент x_p перекрашивается в цвет h.

Алгоритм ищет неукорачиваемые пути и осуществляет по ним раскраску. Требование неукорачиваемости является существенным. Если алгоритм не может добавить никакой из элементов в раскраске, то он останавливается и это означает, что раскрасить в k цветов нельзя. Мы кратко покажем корректность данного алгоритма.

Утверждение. Если для элемента x не существует пути в гафе D из него в какую-либо из вершин O_i, то его нельзя добавить в существующую раскраску $\{E_i\}$.

Доказательство этого факта основано на следующих соображениях. Выделим из элементов носителя два подмножества: T - вершины, до которых можно добраться из x; F - вершины, соединенные с одной из вершин O_i. Заметим, что из множества T не выходит никаких ребер. В этом случае для множеств раскраски E_i верны равенства $rg(T) = E_i \cap T$. Если бы для какого-то j было верно $rg(T) > E_j \cap T$, то существовал бы элемент $t \in T \backslash E_j$ такой, что $(E_j \cap T) \cup \{t\}$ является независимым множеством, а $E_j \cup \{t\}$ не является независимым множеством, поскольку $t \notin F$ - не существует ребра $t \to O_j$. Это говорит о том, что должен найтись элемент $u \notin E_j \cap T$ и $u \in E_j$ такой, что $E_j \cup \{t\} \backslash \{u\}$ является независимым множеством, то есть существует ребро $t \to u$, что противоречит выбору множества T. Таким образом для всех индексов i выполнено $rg(T) = E_i \cap T$.

Но это и означает, что элемент x нельзя добавить к раскраске, возможно даже перекрашивая некоторые другие элементы. Если это возможно было бы сделать, то множество $(T \cap (E_1 \cup .. \cup E_k)) \cup \{x\}$ было бы независимым множеством объединения k копий матроида M, однако выполнение равенств $rg(T) = E_i \cap T$ и тот факт, что множества E_i не пересекаются, говорит, что множество $T \cap (E_1 \cup .. \cup E_k)$ является максимальным по мощности независимым множеством объединения k матроидов, содержащемся в T.

Из данного доказательства корректности алгоритма вытекает следующая теорема.

Теорема [68]. Носитель матроида M может быть разбит на k независимых подмножеств тогда и только тогда, когда для любого подмножества U элементов носителя выполнено:

$$|U| \leq k \cdot rg(U),$$

где $rg(U)$ - ранг подмножества U.

Замечание. В доказательстве корректности алгоритма данное условие нарушается для подмножества $(T \cap (E_1 \cup .. \cup E_k)) \cup \{x\}$.

Глава 2. Эффективная реализация алгоритмов вычисления оценок

2.1. Постановка задачи и результаты

В данной главе изложены результаты, которые развивают подход, предложенный в работах [1, 16, 19], к построению эффективных формул вычисления оценок близости в модели АВО. Исследуется вопрос о числе различных координат у вектора суммы

$$\sum_{\omega \in \Omega_A} \chi(\omega) \mathrm{B}_{\omega}^{\varepsilon_\omega}(s_a, s_b)$$

при рассмотрении некоторых семейств функций близости $\mathrm{B}_{\omega}^{\varepsilon_\omega}$. Раздел 2.2 содержит описания данных семейств функций близости. Также приводится определение *эффективной системы опорных множеств* и общие результаты, касающееся описания эффективных систем опорных множеств. В разделе 2.3 вводится определение *0-эффективной системы опорных множеств*, частичный порядок на множестве классов эквивалентности таких систем, и описываются основные свойства данного порядка. В разделе 2.4 рассматривается алгоритмический подход к поиску эффективных систем опорных множеств - содержится постановка задачи построения алгоритма распознавания свойства 0-эффективности системы опорных множеств модели АВО по ее описанию. Доказывается NP-полнота этой задачи с дополнительными ограничениями.

2.2. Эффективные системы опорных множеств

В работе рассматриваются пять семейств пороговых функций близости:

$$B^{q_1,q_2}(\omega,x)=\begin{cases}1, \text{ если } \chi(\omega)\cdot x\geq q_1 \text{ и } \chi(\overline{\omega})\cdot x\leq q_2,\\ 0, \text{ иначе}\end{cases}$$

$$B^{q_1,n+1}(\omega,x)=\begin{cases}1, \text{ если } \chi(\omega)\cdot x\geq q_1 \text{ и } \chi(\overline{\omega})\cdot x\leq n+1,\\ 0, \text{ иначе}\end{cases}$$

$$B^{*,n+1}(\omega,x)=\begin{cases}1, \text{ если } \chi(\omega)\cdot x=x\cdot\chi(P_n),\\ 0, \text{ иначе}\end{cases}$$

$$B^{q_1,0}(\omega,x)=\begin{cases}1, \text{ если } \chi(\omega)\cdot x\geq q_1 \text{ и } \chi(\overline{\omega})\cdot x\leq 0,\\ 0, \text{ иначе}\end{cases}$$

$$B^{*,0}(\omega,x)=\begin{cases}1, \text{ если } \chi(\omega)\cdot x=\chi(\omega)\cdot\chi(P_n),\\ 0, \text{ иначе}\end{cases}$$

где x - бинарный пороговый вектор, ω - опорное множество, $\overline{\omega}$ - дополнение ω до P_n $(\chi(\omega)+\chi(\overline{\omega})=\chi(P_n))$, под умножением$(\cdot)$ векторов понимается скалярное произведение.

Относительно каждого из пяти семейств определяется понятие эффективной системы опорных множеств.

Определение. Система опорных множеств Ω называется ***эффективной*** для семейства функций близости $B^{-,-}$, если для любой функции семейства

$B \in B^{-,-}$ и бинарного вектора x вектор суммы

$$\sum_{\omega \in \Omega} \chi(\omega) B(\omega, x)$$

содержит не более двух различных координат. Класс эффективных систем для семейства пороговых функции $B^{-,-}$ будем обозначать через $KB^{-,-}$. Работа посвящена изучению классов KB^{q_1,q_2}, $KB^{q_1,n+1}$, $KB^{*,n+1}$, $KB^{q_1,0}$, $KB^{*,0}$.

Можно заметить, что справедливы вложения:

$$KB^{q_1,q_2} \subseteq KB^{q_1,0} \subseteq KB^{*,n+1},$$

$$KB^{q_1,q_2} \subseteq KB^{q_1,n+1} \subseteq KB^{*,0}.$$

$KB^{*,n+1}$ и $KB^{q_1,0}$ совпадают в силу частичного равенства функций близости из семейств определяющих эти классы:

$$B^{*,n+1}(\omega, x) = B^{q_1,0}(\omega, x), \text{ при } q_1 \leq x \cdot \chi(P_n)$$

$$B^{q_1,0} = 0, \text{ при } q_1 > x \cdot \chi(P_n)$$

Между классами $KB^{*,0}$ и $KB^{*,n+1}$ можно установить взаимно однозначное соответствие. Система множеств Ω принадлежит классу $KB^{*,0}$ тогда и только тогда, когда система $\overline{\Omega}$, состоящая из дополнений опорных множеств Ω до $P_n(\overline{\Omega} = \{\omega | \overline{\omega} \in \Omega\})$ содержится в классе $KB^{*,n+1}$. Доказательство следует из равенств:

$$B^{*,0}(\omega, x) = B^{*,n+1}(\overline{\omega}, \chi(P_n) - x),$$

$$\sum_{\omega \in \Omega} \chi(\omega) B^{*,0}(\omega, x) + \sum_{\omega \in \Omega} \chi(\overline{\omega}) B^{*,n+1}(\overline{\omega}, \chi(P_n) - x) = |\{\omega | \omega \in \Omega, B^{*,0}(\omega, x) = 1\}| \chi(P_n),$$

где $|C|$- количество элементов множества C. В силу этих замечаний, можно уточнить цепочки вложений:

$$KB^{q_1,q_2} \subseteq KB^{q_1,n+1} \subseteq KB^{*,n+1} \cong KB^{*,0} \cong KB^{q_1,0}.$$

Класс KB^{q_1,q_2} полностью изучен и описан. В работе [8] получен критерий эффективности систем опорных множеств для функций близости из семейства B^{q_1,q_2}. Данный критерий приведен в первой главе.

2.3. 0-эффективные системы опорных множеств

В данном разделе мы рассмотрим подкласс 0-эффективных систем опорных множеств для семейства функций $B^{*,0}$. Определим и опишем структуру частичного порядка для этого класса.

Определение. Эффективную систему опорных множеств из класса $KB^{*,0}$ будем называть 0-эффективной, если для любого бинарного вектора x у суммы

$$\sum_{\omega\in\Omega} \chi(\omega) B^{*,0}(\omega, x)$$

в любой паре различных координат одна из них равна 0.

Для любой эффективной системы опорных множеств Ω из класса $KB^{*,0}$ можно получить 0-эффективную систему опорных множеств $\Omega_n = \{\omega | \omega \in \Omega, n \notin \omega\}$, взяв множества которые не содержат последней координаты из P_n.

Будем называть две 0-эффективные системы опорных множеств Ω и $\widehat{\Omega}$ эквивалентными если выполнено хотя бы одно из условий:

1. $\widehat{\Omega}$ и Ω определены для множества P_n, и $\widehat{\Omega}$ переходит в Ω под действием некоторой перестановки набора признаков σ, то есть σ - перестановка множества $P_n = \{1, ..., n\}$ и

$$\Omega = \{\{\sigma(j_1), ..., \sigma(j_k)\} |\, \omega \in \widehat{\Omega}, \omega = \{j_1, ..., j_k\}\}$$

2. Ω - система для признаков P_n. Два признака с номерами n и $n-1$ одновременно входят или не входят во все опорные множества системы Ω, в

этом случае $\widehat{\Omega}$ определена для меньшего набора признаков P_{n-1} и является набором опорных множества Ω, из которых удален признак с номером n, где он присутствует:

$$\forall \omega \in \Omega : \; n \in \omega \Leftrightarrow n-1 \in \omega \Rightarrow \widehat{\Omega} = \{\omega \backslash \{n\} | \omega \in \Omega\},$$

$\backslash$ - оператор разности множеств.

3. Ω - система для набора P_n, признак с номером n не входит ни в одно опорное множество из Ω. Тогда $\widehat{\Omega}$ - система для набора P_{n-1} и просто состоит из опороных множеств входящих в Ω(удаление незначащей координаты):

$$\nexists \omega \in \Omega : \; n \in \omega \Rightarrow \widehat{\Omega} = \Omega.$$

Произведя операцию замыкания по транзитивности, получим отношение эквивалентности для систем 0-эффективных опорных множеств. Выделим некоторые свойства отношения. Во-первых, заметим, что для всех систем из одного класса эквивалентности количество опорных множеств, входящих в них, одинаково. В дальнейшем, говоря о количестве опорных множеств класса, мы будем иметь ввиду это число. Во-вторых, каждый класс эквивалентности содержит канонических представителей - системы опорных множеств Ω, для которых размерность признаковых пространств, где они определены, минимальна. Для канонических систем выполнены два свойства: для любого признака, найдется опорное множество содержащее его; для любой пары признаков найдется опорное множество, в которое один из них входит, а другой нет

$$\forall i \in P_n \exists\, \omega \in \Omega : i \in \omega,$$

$$\forall i, j \in P_n \exists\, \omega \in \Omega : |\omega \cap \{i, j\}| = 1.$$

Канонические представители для класса эквивалентности могут быть получены друг из друга перестановкой набора признаковых координат.

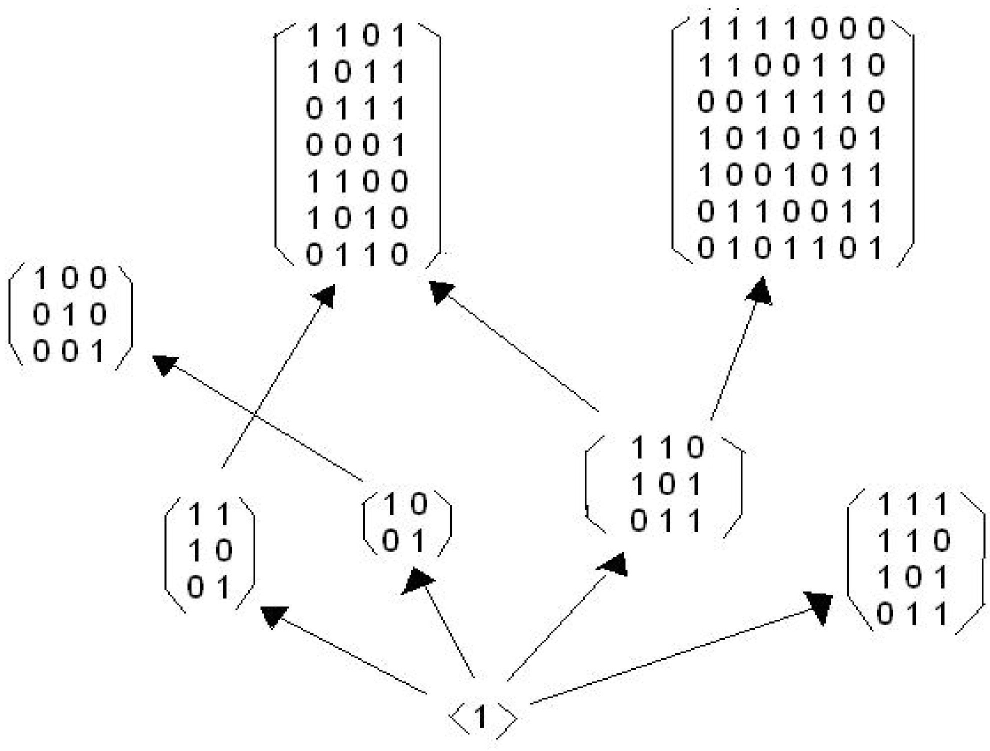
Введем для классов эквивалентности отношение порядка. Пусть есть два различных класса эквивалентности E_1 для набора признаков P_n и E_2 для набора $P_{n-k}(k > 1)$, Ω_{E_1} и Ω_{E_2} - их представители, причем Ω_{E_1} - канонический представитель. Будем писать, что $E_1 > E_2$, если Ω_{E_2} состоит из множеств входящих в Ω_{E_1} и не содержащих координаты $\{n-k+1, ..., n\}$

$$\Omega_{E_2} = \{\omega |\, \omega \in \Omega_{E_1}, n-k+1 \notin \omega, ..., n \notin \omega\}.$$

Несложно проверить, что это будет отношение порядка. Заметим также, что если $E_1 > E_2$, то количество опорных множеств в классе E_2 меньше чем в классе E_1.

Обозначим через $E_1 \succ E_2$ факт того, что $E_1 > E_2$ и не существует такого E_3, что $E_1 > E_3 > E_2$. Очевидно, что для введенного отношения порядка существует минимальный элемент - это класс эквивалентности в P_1, где каноническим представителем является система состоящая ровно из одного множества, в которое входит единственный признак. Обозначим минимальный класс через $\mathcal{Z}$.

Также можно привести фрагмент диаграммы Хассе для данного отношения порядка.



Теорема. Пусть A - класс эквивалентности 0-эффективных множеств. Тогда длинна любой цепочки $A \succ A_1 \succ A_3 \succ \ldots \succ \mathcal{Z}$ одинакова.

Доказательство. Рассмотрим отдельно случай получения из 0-эффективной системы Ω новой системы $\widetilde{\Omega}$ путем удаления из Ω множеств, содержащих какой-либо конкретный признак. Итак, пусть Ω и $\widetilde{\Omega}$ определены для набора признаков P_n, $E\Omega$, $E\widetilde{\Omega}$ - их классы эквивалентности, и

$$\widetilde{\Omega} = \{\omega |\, \omega \in \Omega, j \notin \omega\}$$

Очевидно, что в этом случае возможны два варианта: либо $E\widetilde{\Omega} = E\Omega$, либо $E\Omega > E\widetilde{\Omega}$. Если выполняется $E\Omega > E\widetilde{\Omega}$, то верно более сильное утверждение: $E\Omega \succ E\widetilde{\Omega}$. Это напрямую следует из определения порядка для классов эквивалентности. Представитель класса A, для которого верно соотношение $E\Omega \succ A$, может быть получен из какой-то канонической системы для $E\Omega$ путем удаления из нее множеств содержащих последний признак и сокращения количества признаков на единицу. Из этого факта и свойства 0-эффективности также следует, что все такие классы A содержат одинаковое число опорных множеств и оно является максимальным для классов меньших $E\Omega$.

Перейдем теперь напрямую к доказательству теоремы. Предположим противное. Пусть существуют разные цепочки, начинающиеся с одного класса. Рассмотрим класс, для которого есть цепочки разной длинны, с минимальным количеством опорных множеств.

$$A \succ A_1 \succ A_2 \succ ... \succ \mathcal{Z}$$

$$A \succ \overline{A_1} \succ \overline{A_2} \succ ... \succ \mathcal{Z}$$

$A_1 \neq \overline{A_1}$ в силу минимальности количества опорных множеств. Существует каноническая система Ω для A такая, что опорные множества из Ω не содержащие первого признака - есть система опорных множеств для A_1, а множества, не содержащие второго признака - есть система опорных множеств для $\overline{A_2}$. Тогда система, состоящая из опорных множеств Ω, не содержащих первый и второй признак будет системой из класса эквивалентности B, для которого выполнено $A_1 \succ B$ и $\overline{A_1} \succ B$. Ω содержит опорные множества, в которые первый признак входит, а второй нет, либо наоборот, поэтому в B меньше опорных множеств чем в A_1 и $\overline{A_1}$, и B не может совпадать с A или $\overline{A_1}$. Рассмотрев цепочку для B - $B \succ B_1 \succ B_2 \succ ... \succ \mathcal{Z}$ получим, что либо для A_1, либо для $\overline{A_1}$ должны существовать цепочки различной длинны, что противоречит минимальности размерности канонического представителя.

2.4. Алгоритмы распознавания свойства 0-эффективности

В этом разделе мы рассмотрим алгоритмическую постановку задачи распознавания свойства 0-эффективности. Докажем NP-полноту задачи для одного частного случая.

Задача 1. На множестве $P_n = \{1, 2, ..., n\}$ задана некоторая система подмножеств Ω, количество подмножеств ограничено полиномом от n. Требуется узнать, существует ли подмножество $Y \subseteq P_n$ такое, что в сумме

$$\sum_{\omega\in\Omega} \chi(\omega) \cdot B^{*,0}(\omega, \chi(Y))$$

есть две различные положительные координаты (контрпример к свойству 0-эффективности).

Заметим, что **Задача 1** - NP задача. Переформулируем ее.

Задача 1(эквивалентная переформулировка). Пусть P_n - множество $\{1, 2, ..., n\}$. На нем задана некоторая система подмножеств Ω, количество множеств ограничено полиномом от n. Требуется узнать, существует ли подмножество $Y \subseteq P_n$, и два элемента из Y такие, что количество подмножеств Y, входящих в Ω и содержащих первый элемент больше числа таких же множеств, содержащих второй элемент, и оба числа положительны

$$\exists i, j \in Y : |\{\omega \in \Omega : \omega \subseteq Y, i \in \omega\}| > |\{\omega \in \Omega : \omega \subseteq Y, j \in \omega\}| > 0.$$

Теперь поставим новую задачу(контрпример, для которого свойство 0-эффективности нарушается для конкретных индексов).

Задача 2. Пусть P_n - множество $\{1, 2, ..., n\}$. На нем задана некоторая система подмножеств Ω, количество множеств ограничено полиномом от n. Требуется узнать, суествует ли подмножество $Y \subseteq P_n$ с элементами 1 и 2 такое, что количество подмножеств Y, входящих в Ω и содержащих элемент 1 больше числа таких же множеств, содержащих элемент 2, и оба числа положительны

$$1, 2 \in Y : |\{\omega \in \Omega : \omega \subseteq Y, 1 \in \omega\}| > |\{\omega \in \Omega : \omega \subseteq Y, 2 \in \omega\}| > 0.$$

Задача 3. Пусть P_n - множество $\{1, 2, ..., n\}$. Пусть имеются две системы подмножеств P_n $R = \{R_1, ...R_p\}$ и $S = \{S_1, ...S_u\}$(общее количество ограничено полиномом от n). Верно ли, что сществует $Y \subseteq P_n$ такое, что количество подмножеств Y в системе R больше числа таких же подмножеств в системе S, оба числа положительны

$$|\{R_i, R_i \subseteq Y\}| > |\{S_i, S_i \subseteq Y\}| > 0.$$

Задача 2, с дополнительным условием на отсутствие в Ω опорных множеств, одновременно содержащих оба элемента 1 и 2 ($|\{\omega|\ \omega \in \Omega, 1 \in \omega, 2 \in \omega\}|$=0), становится задачей **Задачей 3**.

Теорема. Задача 3 является NP-полной.

Доказательство. Задача является NP задачей. Для доказательства свойства NP-трудности сведем задачу КЛИКА к нашей задаче.

Задача КЛИКА [13]. Дан граф $G = (V, E)$ и положительное целое число $1 < J < |V|$. Верно ли, что G содержит некоторую клику мощности не менее J, т.е. такое подмножество $V' \subseteq V$, что $|V'| \geq J$ и любые две вершины из V' соединены ребром из E.

Выберем множество $A = \{1, 2, ..., 2 \cdot |V|\}$, для него будем строить **Задачу 3**. Разобьем A на два подмножества $A_1 = \{1, 2, ..., |V|\}$ и $A_2 = \{|V| + 1, ..., 2 \cdot |V|\}$. Теперь построим два множества $R = \{R_1, ..., R_p\}$ и $S = \{S_1, ..., S_u\}$.

1. S будет состоять из двух групп. В первую группу будут входить $J - 1$ каких-то одноэлементных подмножеств A_2. Вторая группа - это все трехэлементные подмножества A такие, что они содержат по два элемента из A_1 и по одному из A_2. Всего в S будет $\frac{|V|^2 \cdot (|V|-1)}{2} + J - 1$ подмножеств.

2. R также будет состоять из двух групп. В первую группу будут входить такие $|V|$ элементов, что они содержат по одному элементу из A_1 и все элементы из A_2. Сопоставим каждой вершине графа по одному элементу из

A_1(i-ой вершине будет соответствовать элемент i). Теперь вторую группу составим из всех множеств , содержащих по $|V|+1$ элементов таких, что $|V|-1$ элементов берутся из A_2 и два элемента из A_1, при чем это двухэлементное подмножество должно соответствовать ребру в исходном графе. Всего в R будет $(|E|+1)\cdot|V|$ множеств.

Выберем некоторое подмножество Y и посчитаем сколько в него входит множеств из S и R. Пусть $|Y\cap A_1| = a$ и $|Y\cap A_2| = b$

$$|\{S_i|S_i \subseteq Y\}| = \frac{a(a-1)b}{2} + |\{\text{элементы первой группы для } S \text{ из } Y\cap A_2\}|$$

$$|\{R_i|R_i \subseteq Y\}| =$$
$$\begin{cases} 0, \text{ если } b < |V|-1, \\ |\{\text{ребра в подграфе с вершинами } Y\cap A_1\}|, \text{ если } b = |V|-1, \\ |V||\{\text{ребра в подграфе с вершинами } Y\cap A_1\}| + a, \text{ если } b = |V|. \end{cases}$$

Неравенство $0 < |\{S_i|S_i \subseteq Y\}| < |\{R_i|R_i \subseteq Y\}|$ может выполняться только если верно, что $|Y\cap A_2| = |V| = b$, и более того, тогда должно выполняться неравенство:

$$\frac{a(a-1)|V|}{2} + J - 1 < |V||\{\text{ребра в подграфе с вершинами } Y\cap A_1\}| + a$$

так как $a - J + 1 < |V|$, то неравенство может быть выполнено только если

$$|\{\text{ребра в подграфе с вершинами } Y\cap A_1\}| = \frac{a(a-1)}{2}$$

и выполнено неравенство

$$\frac{a(a-1)|V|}{2} + J - 1 < |V|\frac{a(a-1)|V|}{2} + a$$

и $a > J-1$. Это наблюдение, в свете предыдущих замечаний, говорит о том, что неравенство может выполнено только если в графе найдется клика мощности не меньше J. Теорема доказана.

Глава 3. Корректность моделей АВО и k-сигнулярность

3.1. Алгебраический критерии k-сингулярности

Теорема. *Система точек $S = \{s_i\}_{i=1}^q$ пространства $\mathbb{R}^m$ является k-сингулярной тогда и только тогда, когда существует ненулевой вектор $(c_1, .., c_q)$ такой, что для всех $s \in \mathbb{R}^m$ справедливо равенство:*

$$\sum_{i=1}^{q} c_i \rho^k(s, s_i) = 0,$$

где ρ - метрика Хэмминга или l_1-метрика($k \leq m$).

В работе [10] критерий доказан для случая 1-сингулярных систем, данная теорема является обобщением этого результата.

Доказательство.

Сначала мы докажем необходимость выполнения равенства из условия теоремы. Если система S является k-сингулярной и существует вектор $(c_1, .., c_q)$ ортогональный пространствам $U^k(P)$ и $U^k(T)$, то для l_1-расстояния $\rho(x, y)$ и любой точки s в $\mathbb{R}^m$ будет выполнено равенство

$$\sum_{i=1}^{q} c_i \rho^k(s, s_i) = 0.$$

Действительно, если вектор $(c_1, .., c_q)$ ортогонален пространству $U^k(T)$, то вектор $(c_1, .., c_q, 0)$ будет ортогонален пространству $U^k(\tilde{T})$, где $\tilde{T}$ - бинарная матрица для классов эквивалентностей системы $\tilde{S} = S \cup \{s\}$. Блоки матрицы $\tilde{T}$ получаются из соответствующих блоков матрицы T приписыванием снизу одной строки, в которой одна 1, или добавлением нулевой строки и столбца $(0, .., 0, 1)^T$. Из леммы также следует, что вектор $(c_1, .., c_q, 0)$ будет ортогонален пространству $U^k(\tilde{P})$, где $\tilde{P}$ - матрица попарных l_1-расстояний для системы $\tilde{S}$. Что является доказательством равенства. В приведенном рассуждении используется матрица l_1-расстояний(P), но, как легко видеть, эти же рассуждения будут верны и для случая метрики Хэмминга.

Для доказательства достаточности условия теоремы нам понадобится определение.

Определение 1. Для системы точек $S = \{s\}_{i=1}^{q}$ пространства $\mathbb{R}^m$ с метрикой ρ обозначим через $H_\rho^k(S)$ минимальное линейное пространство, содержащее векторы вида $(\rho^k(s, s_1), .., \rho^k(s, s_q))$ для всех точек $s \in \mathbb{R}^m$. В случаях когда метрика ясна из контекста, мы будем использовать обозначение $H^k(S)$.

Вариант теоремы для 1-сингулярных систем, доказанный в работе [10], фактически устанавливает равенство линейных пространств $H_\rho^1(S)$ и $U^1(T)$. Нашей целью является построение более общего изоморфизма $H_\rho^k(S) \cong U^k(T)$. Выше приведено доказательство факта $H_\rho^k(S) \subseteq U^k(T)$. Мы покажем, что базис пространства $U^k(T)$ содержится в $H_\rho^k(S)$, что будет доказывать обратное вложение. Случаи метрики Хэмминга и метрики l_1 рассмотрим отдельно.

Метрика Хэмминга. Доказательство будет конструктивным. Рассматривая различные точки $s \in \mathbb{R}^m$, сначала покажем, что среди векторов вида $(\rho^k(s, s_1), .., \rho^k(s, s_q))$ и их линейных комбинаций содержатся все векторы пространства $U^1(T)$. Далее, отталкиваясь от утверждения $U^1(T) \subseteq H^k(S)$, по индукции докажем центральное утверждение $U^k(T) \subseteq H^k(S)$.

Если взять в качестве s точку, отличающуюся всеми координатами от любой точки из S, то мы получим, что вектор $(\rho^k(s, s_1), .., \rho^k(s, s_q)) = (m^k, .., m^k)$ и, как следствие, вектор $(1, .., 1) \in H^k(S)$. В дальнейшем вектор $(1, .., 1)$ будем обозначать через $\tilde{1}$.

Выберем теперь какой-нибудь столбец матрицы T, пусть это бинарный вектор $\tilde{v}$. Допустим, что мы взяли его из блока T_i. Данному вектору соответствует подмножество $S_{\tilde{v}}$ точек системы S с одинаковой i-й координатой - класс эквивалентности для отношения θ_i. Выберем теперь в качестве s точку, i-я координата которой совпадет с i-й координатой точек из класса $S_{\tilde{v}}$, а остальные координаты отличаются от всех координат точек из S. В этом случае вектор $(\rho^k(s,s_1),..,\rho^k(s,s_q))$ будет равен $(m\cdot\tilde{1}-\tilde{v})^k$. Учитывая, что вектор $\tilde{v}$ является бинарным, получим соотношение $(m\cdot\tilde{1}-\tilde{v})^k = a\cdot\tilde{1}+b\cdot\tilde{v}(b\neq 0)$, поэтому $\tilde{v}\in H^k(S)$. Так как рассуждение верно для любого столбца T, то $U^1(T)\subseteq H^k(S)$.

Утверждение о том, что $U^1(T)\subseteq H^k(S)$ используем как базу индукции.

База индукции. $U^1(T)\subseteq H^k(S)$.

Шаг индукции. Если $U^p(T)\subseteq H^k(S)$, то $U^{p+1}(T)\subseteq H^k(S)$ для $p+1\leq k$.

Выберем $p+1$ столбец матрицы T из разных блоков T_i, пусть это будут столбцы $\tilde{v}_1,..,\tilde{v}_{p+1}$. Мы докажем, что $\tilde{v}_1\cdot..\cdot\tilde{v}_{p+1}\in H^k(S)$; в произведении выбираем столбцы из разных блоков T_i (напомним, что $k\leq m$), так как произведение двух разных столбцов одного блока равно нулю. Пусть x - число, не равное ни одной из координат векторов множества S. Вспомним также о том, что к каждому вектору $\tilde{v}_i$ привязан номер n_i блока из которого взят вектор и подмножество S_i точек системы S с одинаковыми координатами под номером n_i. Возьмем в качестве $\tilde{s}$ точку у которой координата n_i совпадает с n_i-й координатой точек из множества S_i для индексов i из множества $\{1,..,p\}$, а остальные координаты примем равными значению x. В этом случае получаем

$$(\rho^k(s,s_1),..,\rho^k(s,s_q)) = (m\cdot\tilde{1}-\sum_{i=1}^{p+1}\tilde{v}_i)^k.$$

Учитывая, что $\tilde{v}_i$ бинарные векторы и условие $p+1\leq k$:

$$(m\cdot\tilde{1}-\sum_{i=1}^{p+1}\tilde{v}_i)^k = \tilde{g}+(-1)^{p+1}\cdot\prod_{i=1}^{p+1}\tilde{v}_i,$$

где $\tilde{g}$ некоторый вектор из пространства $U^p(T)$. Из этого равенства следует требуемое.

Метрика l_1. Доказательство для случая метрики l_1 также будет конструктивным. Мы покажем, что все векторы вида $\tilde{v}_1 \cdot .. \cdot \tilde{v}_k$ содержатся в пространстве $H^k(S)$, где векторы множества $\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^k$ являются столбцами матрицы T.

Напомним, что матрица T состоит из блоков $T = [T_1, .., T_m]$. В дальнейшем мы будем использовать обозначение $\tilde{v} \in T_i$ подразумевая факт того, что вектор $\tilde{v}$ является столбцом блока T_i.

Выпишем выражение для k-й степени вектора l_1-расстояний от точки $s = (\delta_1, .., \delta_m)$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ до точек системы S

$$V(s,T) = (\rho^k(s,s_1), .., \rho^k(s,s_q)) = (\sum_{i=1}^{m} \sum_{\tilde{v} \in T_i} |\delta_i - \alpha_{\tilde{v}}| \cdot \tilde{v})^k,$$

где $\alpha_{\tilde{v}}$ для вектора $\tilde{v}$ из блока T_i является значением i-й координаты точек в классе эквивалентности соответствующем вектору $\tilde{v}$.

Предположим теперь, что i-я координата точки $s = (\delta_1, .., \delta_m)$ не равна ни одному из чисел множества $\{\alpha_{\tilde{v}}\}_{\tilde{v} \in T_i}$ для всех i. Рассмотрим точку z с координатами $(\delta_1 + \delta, .., \delta_m)$ и выражение

$$\frac{V(z,T) - V(s,T)}{\delta}. \tag{3.1}$$

При стремлении δ к 0 данное выражение стремится к точке пространства $H^k(S)$, так как $H^k(S)$ - замкнутое линейное подпространство конечномерного пространства $\mathbb{R}^q$, и выражения вида $V(s,T)$ принадлежат $H^k(S)$. Функция $V(s,T)$ является кусочно-полиномиальной, и поэтому значение выражения (3.1) при δ стремящемся к нулю может быть вычислено как частная производная $V(s,T)$ по первой координате.

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{V(z,T_S)-V(s,T_S)}{\delta}=k\cdot(\sum_{i=1}^{m}\sum_{\tilde{v}\in T_i}|\delta_i-\alpha_{\tilde{v}}|\cdot\tilde{v})^{k-1}\cdot(\sum_{\tilde{v}\in T_1}(\delta_1-\alpha_{\tilde{v}})\cdot\tilde{v}), \quad (3.2)$$

где

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}-1, \text{ если } x<0\\ 0, \text{ если } x \text{ равен } 0\\ 1, \text{ иначе}\end{cases}.$$

Учитывая тот факт, что мы выбрали точку s так, чтобы она всеми координатами отличалась от координат векторов множества S мы можем продолжить проводить операцию дифференцирования и рассмотреть частные производные выражения (3.2). Заметим, что значение сумм вида

$$\sum_{\tilde{v}\in T_i}\mathrm{sgn}(\acute{\delta}_i-\alpha_{\tilde{v}})\cdot\tilde{v}$$

являются константами в окрестности точки s. Операцию покоординатного дифференцирования будем проводить по различным координатам, и учитывая неравенство $k\le m$, получим, что все вектора вида

$$k!\cdot\prod_{i=1}^{m}(\sum_{\tilde{v}\in T_i}\mathrm{sgn}(\delta_i-\alpha_{\tilde{v}})\cdot\tilde{v})^{k_i}, \quad (3.3)$$

где $k_1+..+k_m=k(k_i\in\{0,1\})$ содержатся в $H^k(S)$.

Для каждого блока T_i обозначим через L_i минимальное линейное пространство, содержащее все вектора вида

$$\sum_{\tilde{v}\in T_i}\mathrm{sgn}(\delta-\alpha_{\tilde{v}})\cdot\tilde{v}$$

для δ отличных от значений $\{\alpha_{\tilde{v}}\}_{\tilde{v}\in T_i}$.

Рассматривая всевозможные линейные комбинации векторов вида (3.3) для различных точек s и различных разбиений числа k на слагаемые $\{k_i\}_{i=1}^m$ мы можем утверждать, что все вектора вида

$$\prod_{i=1}^{m}(l_i)^{k_i},$$

где $l_i \in L_i$ и $k_1 + .. + k_m = k(k_i \in \{0,1\})$ содержатся в $H^k(S)$. Мы покажем, что для всех i вектора $\tilde{v} \in T_i$ содержатся в пространстве L_i. Это будет доказывать, что вектора вида

$$\prod_{i=1}^{m}(\tilde{v}_i)^{k_i},$$

где $\tilde{v}_i \in T_i$ и $k_1+..+k_m = k(k_i \in \{0,1\})$ содержатся в $H^k(S)$, что и требовалось доказать. Осталось показать, что для всех i вектора $\tilde{v} \in T_i$ содержатся в пространстве L_i.

Лемма. Вектора $\tilde{v} \in T_i$ могут быть представлены в виде линейных комбинаций векторов вида

$$\sum_{\tilde{v}\in T_i} \operatorname{sgn}(\delta - \alpha_{\tilde{v}}) \cdot \tilde{v}, \tag{3.4}$$

где δ не равно никакому из значений $\{\alpha_{\tilde{v}}\}_{\tilde{v}\in T_i}$.

Доказательство. Упорядочим множество векторов из T_i по значению соответствующих им чисел $\alpha_{\tilde{v}}$, то есть у нас есть набор векторов $V = \{\tilde{v}_j \in T_i\}$ таких, что если для индексов выполнено $a < b$, то $\alpha_{\tilde{v}_a} < \alpha_{\tilde{v}_b}$. Вектора вида (3.4) могут принимать ровно $|V|+1$ значений для всевозможных допустимых значений δ

$$\{\sum_{p=1}^{a} \tilde{v}_p - \sum_{l=a+1}^{|V|} \tilde{v}_l\}_{a=0}^{|V|}. \tag{3.5}$$

Напомним, что мы можем выбирать значения δ, которые не совпадают с числами $\alpha_{\tilde{v}}$, $\tilde{v} \in T_i$. Легко видеть, что вектора-столбцы T_i линейно выражаются через вектора вида (3.5).

Замечание. Теорема верна и без условия $k \leq m$, однако, доказательство становится очень громоздким.

3.2. Разделение на подсистемы с невырожденными матрицами попарных расстояний

В данном разделе будет рассмотрена задача о разбиении системы точек на минимальное количество подсистем, каждая из которых не является 1-сингулярной. Мы приведем оценку на количество таких подсистем и покажем существование полиномиального алгоритма, который находит разбиение на минимальное количество подсистем. Для задачи распознавания с двумя непересекающимися классами в постановке из работы [30] такой алгоритм позволяет разбивать множество контрольных объектов на „области компетентности“, для каждой из которых линейное замыкание семейства операторов АВО является корректным.

В предыдущем разделе мы описали как сопоставить системе S из q точек бинарную матрицу T с q строками (каждой точке соответствует строка) такую, что система S является 1-сингулярной тогда и только тогда, когда ранг матрицы T меньше q. Легко видеть, что подсистема $\grave{S}$ системы S не является 1-сингулярной тогда и только тогда, когда подматрица $\grave{T}$ матрицы T, составленная из строк соответствующих точкам из $\grave{S}$, имеет ранг равный $|\grave{S}|$. Таким образом, задача разбиения на минимальное количество подсистем, каждая из которых не является 1-сингулярной сводится к задаче разбиения множества строк матрицы T на подмножества, каждое из которых является набором линейно-независимых бинарных векторов.

Задача о разбиении произвольного множества векторов V на минимальное количество линейно-независимых подсистем была успешно решена [64, 69] с применением теории матроидов [68]. Нам необходимо найти минимальное количество баз матричного матроида, соответствующего множеству векторов V, таких, что их объединение полностью покрывает носитель матроида. Описание полиномиальных алгоритмов, решающих данную задачу можно найти в работах [68, 64, 69]. Мы воспользуемся теоремой из книги [68] для получения оценки на минимальное количество подсистем в разбиении на системы без свойства 1-сингулярности.

Теорема [68] Множество векторов V в $\mathbb{R}^m$ разбивается на k линейно-независимых подсистем тогда и только тогда, когда для любого подмножества U векторов из V выполнено

$$|U| \leq k \cdot rg(U),$$

где $rg(U)$ - ранг подсистемы U.

Мы докажем следующее неравенство для системы точек S в пространстве $\mathbb{R}^m$.

Теорема. Для системы точек S пространства $\mathbb{R}^m$ и соответствующей ей матрицы $T(S)$ верно неравенство

$$\frac{|S|}{rg(T(S))} \leq \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} c_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i + 1 - m},$$

где c_i - количество значений, которые может принимать i-я координата точек из системы S.

Доказательство. Введем некоторые обозначения, которые нам понадобятся в процессе доказательства. Для системы точек S будем обозначать через $T(S)$ бинарную матрицу классов эквивалентностей, построенную по системе S.

Назовем решеткой множество $X \in \mathbb{R}^m$, являющееся декартовым произведение множеств D_i, $X = (x_1, .., x_m)(x_i \in D_i)$, где множества D_i являются некоторыми конечными наборами действительных чисел. Решетка X является декартовым произведением множеств D_i и содержит ровно $|D_1| \cdot .. \cdot |D_m|$ точек. Для системы S мы будем обозначать через X_S минимальную решетку, содержащую все точки из S. Мы будем последовательно добавлять к системе S точки из X_S не уменьшая величины

$$\frac{|S|}{rg(T(S))}$$

пока не получим саму решетку X_S и покажем, что величина $|X_S|/rg(T(X_S))$ в точности равна числу в правой части неравенства из условия теоремы. Сначала мы добавим к системе S все точки, которые не увеличивают ранг матрицы $T(S)$. Предположим, что мы получили систему $\acute{S}$. В случае, когда $\acute{S}$ совпадет с X_S, ранги матриц $T(S)$ и $T(X_S)$ будут совпадать и условие теоремы очевидно выполнено. Рассмотрим случай, когда $\acute{S}$ не совпадает с X_S. Мы покажем, что система $\acute{S}$ является объединением непересекающихся решеток $\acute{S} = \bigcup\limits_{i=1}^{d} \acute{X}_i$, которое обладает двумя свойствами. Во-первых, любые две точки s_1 и s_2, принадлежащие разным решеткам различаются значениями, по крайней мере, двух координат. Во-вторых, для любой координаты p и любых двух решеток $\acute{X}_a$ и $\acute{X}_b$ множества значений p-й координаты у точек решеток $\acute{X}_a$ и $\acute{X}_b$ либо не пересекаются, либо полностью совпадают. Это равносильно тому, что множество M значений p-й координаты точек системы $\acute{S}$ разбивается на непересекающиеся подмножества $M = \bigcup\limits_{j=1}^{h} M_j$ такие, что для любой решетки $\acute{X}_a$ множество значений p-й координаты точек решетки совпадает с одним из подмножеств M_j.

Предположим, что по этому принципу для некоторой координаты k множество N ее значений для точек системы $\acute{S}$ разбивается на v подмножеств $N = \bigcup\limits_{j=1}^{v} N_j$ и $v > 1$. Такая координата обязательно найдется, так как в противном случае $\acute{S}$ совпадало бы с X_S. Мы построим систему $\tilde{S}$, которая будет являтся объединением непересекающихся решеток $\tilde{S} = \bigcup\limits_{i=1}^{d} \tilde{X}_i$, где каждая из решеток $\tilde{X}_a$ получена из соответствующей решетки $\acute{X}_a$ расширением множества значений k-й координаты до множества N, то есть $\tilde{X}_a$ - это множество точек, которое содержит все точки для которых значение k-й координаты содержится в множестве N и найдется точка из решетки $\acute{X}_a$ отличающаяся значением не более одной координаты. Решетки $\tilde{X}_a$ не будут пересекаться, это гарантируется первым свойством из описания множества $\acute{S}$. Мы покажем, что верна цепочка неравенств

$$\frac{|\acute{S}|}{|\tilde{S}|} \leq \frac{|N| - v + 1}{|N|} \leq \frac{rg(T(X_{\acute{S}}))}{rg(T(X_{\tilde{S}}))}. \tag{3.6}$$

Это будет доказывать, что при переходе от $\acute{S}$ к $\tilde{S}$ отношение мощности множества точек к рангу бинарной матрицы классов эквивалентностей не падает. Таким способом мы постепенно перейдем к X_S.

Первая часть неравенства (3.6)

$$\frac{|\acute{S}|}{|\tilde{S}|} \leq \frac{|N| - v + 1}{|N|}$$

следует из цепочки неравенств

$$\frac{|\acute{S}|}{|\tilde{S}|} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{d} |\acute{X}_i|}{\sum\limits_{i=1}^{d} |\tilde{X}_i|} \leq \max_{i=1}^{d} \frac{|\acute{X}_i|}{|\tilde{X}_i|} = \frac{\max\limits_{j=1}^{v} |N_j|}{|N|} \leq \frac{|N| - v + 1}{|N|}.$$

Системы $\acute{S}$ и $\tilde{S}$ представляют собой объединения наборов непересекающихся решеток $\acute{X}_i$ и $\tilde{X}_i$, поэтому верно первое равенство в цепочке. Следующее неравенство является простым алгебраическим фактом. Второе равенство вытекает из того факта, что отношение количества точек в решетках $\acute{X}_i$ и $\tilde{X}_i$ равно $|N_x|/|N|$, где $|N_x|$ - одно из подмножеств $\{N_j\}_{j=1}^{v}$. Последнее неравенство является следствием того, что множество N разбивается на v непересекающихся непустых подмножеств N_j.

Мы покажем, что верны два неравенства

$$rg(T(X_{\acute{S}})) \geq |N|, \tag{3.7}$$

$$rg(T(X_{\tilde{S}})) \leq rg(T(X_{\acute{S}})) + v - 1. \tag{3.8}$$

Это будет доказывать необходимое нам неравенство

$$\frac{|N| - v + 1}{|N|} \leq \frac{|N|}{|N| + v - 1} \leq \frac{rg(T(X_{\acute{S}}))}{rg(T(X_{\tilde{S}}))}.$$

Из множества точек $\acute{S}$ можно выбрать подсистему Z из $|N|$ точек, которые будут различаться значением k-й координаты. Просто выбрать для каждого значения k-й координаты по одной точке с этим значением. Подсистема Z не является 1-сингулярной - k-й блок матрицы $T(Z)$ будет диагональным и $rg(T(Z)) = |N|$, из этого следует неравенство (3.7).

Несложно также заметить, что к матрице $T(X_{\acute{S}})$ можно дописать $v-1$ строку так, что линейная оболочка строк новой матрицы будет совпадать с линейной оболочкой строк матрицы $T(X_{\tilde{S}})$. Действительно, необходимо взять некоторою точку $\acute{s}$ из $\acute{S}$ со значением k-й координаты из подмножества N_1 и добавить $v-1$ строк вида $\tau(\acute{s}) - \tau(\acute{s_{N_j}})(j > 1)$, где $\tau(s)$ - бинарная строка соответствующая точке s; $\acute{s}_{N_j}$ - точки, отличающиеся от $\acute{s}$ значением k-й координаты, для точки s_{N_j} берется значение из подмножества N_j(все такие строки содержатся в линейной оболочке строк матрицы $T(\tilde{S})$, так как все точки вида s_{N_j} содержатся в системе $\tilde{S}$). Заметим, что строки вида $\tau(s_a)-\tau(s_b)$, где точки s_a и s_b отличаются значением только k-й координаты и ее значения взяты из одного подмножества N_j уже содержатся в линейной оболочке строк матрицы $T(\acute{S})$. Таким образом, линейной комбинацией строк расширенной матрицы мы сможем получить любую строку вида $\tau(\tilde{s})$, где $\tilde{s}$ - точка из множества $\tilde{S}$, что доказывает неравенство (3.8).

Для завершения доказательства теоремы нам осталось доказать два факта: показать, что система $\acute{S}$ является объединением непересекающихся решеток с требуемыми свойствами; доказать, что величина $|X_S|/rg(T(X_S))$ равна в точности числу в правой части неравенства. Мы сформулируем данные утверждения в виде двух лемм.

Лемма1. Для системы точек S в пространстве $\mathbb{R}^m$ верно равенство:

$$\frac{|X_S|}{rg(T(X_S))} = \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} c_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i + 1 - m},$$

где c_i - количество значений, которые может принимать i-я координата точек из системы S.

Доказательство. Равенство $|X_S| = \prod\limits_{i=1}^{m} c_i$ очевидно. Мы покажем, что

$$rg(T(X_S)) = \sum_{i=1}^{m} c_i + 1 - m.$$

Для этого рассмотрим какую-то точку $s \in X_S$ и набор O всех точек из X_S, которые отличаются от s значением ровно одной координаты. Таких точек ровно $c_1 + .. + c_m - m$. Несложно заметить, что данный набор O вместе с точкой s образует систему без 1-сингулярности. Действительно, в бинарной матрице $T(O \cup \{s\})$ будет $c_1 + .. + c_m - m$ столбцов, в каждом из которых будет стоять ровно по одной единице. Каждый такой столбец соответствует одной точке из O и поэтому $rg(T(O \cup s)) = c_1 + .. + c_m - m + 1$. Из этого следует

$$rg(T(X_S)) \geq \sum_{i=1}^{m} c_i + 1 - m.$$

Можно также заметить, что линейными комбинациями строк вида $\tau(s) - \tau(o)(o \in O)$ и строки $\tau(s)$ можно получить любую строку вида $\tau(x)(x \in X_S)($ $\tau(a)$ - бинарная строка из матрицы $T(X_S)$, соответствующая точке a). Что доказывает неравенство в обратную сторону и утверждение леммы.

Лемма2. Система точек $\acute{S}$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ такая, что добавление к ней произвольной точки $s \notin \acute{S}$ увеличивает ранг бинарной матрицы классов эквивалентностей, соответствующей системе, может быть представлена в виде объединения набора непересекающихся решеток

$$\acute{S} = \bigcup_{i=1}^{d} \acute{X}_i,$$

которое обладает двумя свойствами:

- любые две точки s_1 и s_2, принадлежащие разным решеткам различаются значениями по крайней мере двух координат,
- для любой координаты p и любых двух решеток $\acute{X}_a$ и $\acute{X}_b$ множества значений p-й координаты у точек решеток $\acute{X}_a$ и $\acute{X}_b$ либо не пересекаются, либо полностью совпадают.

Доказательство. Сначала опишем представление в виде непересекающихся решеток и докажем первое свойство из теоремы. Построим по системе

$\acute{S}$ граф G. В качестве вершин у нас будут точки из $\acute{S}$, две точки-вершины буду соединены ребром тогда и только тогда, когда они отличаются значением ровно одной координаты. Граф G распадается на какие-то компоненты связности. Для компонент связности, очевидно, выполняется первое свойство теоремы. Мы покажем, что каждая из компонент связности представляет собой решетку. Для этого нам понадобится утверждение.

Утверждение. Если для системы точек $\bar{S}$ в $\mathbb{R}^m$ граф $\bar{G}$ с вершинами-точками и ребрами, соединяющими пары вершин-точек отличающихся значением ровно одной координаты, связен, то ранг матрицы $T(\bar{S})$ равен в точности

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i + 1 - m,$$

где $\bar{c}_i$ - количество значений, которые может принимать i-я координата точек из системы $\bar{S}$.

Согласно утверждению и первой лемме, для каждой компоненты связности K графа G верно равенство $rg(T(K)) = rg(T(X_K))$. При условии, что в систему $\acute{S}$ нельзя добавить ни одной точки не увеличивая ранга бинарной матрицы классов эквивалентностей, это и означает, что каждая из компонент связности является решеткой. Докажем теперь само утверждение.

Доказательство утверждения. Доказательство несложно провести по индукции по количеству точек в $\bar{S}$.

База. Для одной точки все верно.

Шаг индукции. Предположим, что у нас все доказано для k точек, докажем для $k+1$. Выберем точку a и подсистему из k точек $\bar{S}_a(\bar{S} = \bar{S}_a \cup \{a\})$ такую, что для подсистемы $\bar{S}_a$ соответствующий граф связен и условие утверждения выполнено. Относительно точки a возможны два случая.

Во-первых, точка a может содержаться в решетке $X_{\bar{S}_a}$. В этом случае, согласно *Лемме1* и предположению индукции

$$rg(T(X_{\bar{S}_a})) = \sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i + 1 - m = rg(T(\bar{S}_a)) = rg(T(\bar{S}_a \cup a)).$$

Во-вторых, точка a может не лежать в решетке $X_{\bar{S}_a}$, но тогда среди точек системы $\bar{S}_a$ должна найтись точка b, которая отличается от a значением ровно одной координаты. В этом случае, добавление точки a увеличивает ранг бинарной матрицы эквивалентности на 1, но ровно на 1 увеличивается при этом и величина

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{c}_i + 1 - m,$$

что доказывает утверждение.

Для завершения доказательства леммы, нам необходимо показать, что выполнено второе свойство из условия. Это можно сделать от противного. Допустим, что нашлись две разные решетки X_a и X_b из разложения $\acute{S}$ на непересекающиеся решетки, что M_a - множество значений, которые может принимать p-я координата точек из решетки X_a, а M_b - аналогичное множество для решетки X_b, и найдутся два таких числа y и z, что $y \in M_a \cap M_b$, $z \in M_a$, $z \notin M_b$. Тогда найдется точка $s_{by} \in X_b$ со значением p-й координаты равным y и две точки $s_{ay}, s_{az} \in X_a$ такие, что они отличаются значением только p-й координаты и для первой оно равно y, а для второй z. В этом случае, точка s_{bz}, которая отличается от s_{by} значением p-й координаты и она у нее равна z, должна принадлежать системе $\acute{S}$, так если бы ее не было, то добавление ее к системе не увеличивало бы ранга матрицы классов эквивалентностей - бинарная строка для нее может быть выражена через строки для точек s_{ay}, s_{az} и s_{by}. Но она не может содержаться в решетке X_a, так как $z \notin M_a$, и она не может содержаться ни в какой другой решетке их объединения, так как, согласно первому свойству из леммы, доказанному выше, точки из других решеток отличаются от точек решетки X_a значениями, по крайней мере, двух координат. Полученное противоречие, доказывает лемму.

Из теоремы можно извлечь два важных для нас следствия:

- **Следствие 1.** Произвольная система S точек в $\mathbb{R}^m$ может быть разбита на
$$\left\lceil \frac{\prod\limits_{i=1}^{m} c_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} c_i + 1 - m} \right\rceil$$
подмножеств с невырожденными матрицами попарных l_1-расстояний, где c_i - количество значений, которые может принимать i-я координата точек из системы S.

- **Следствие 2.** Для множества являющегося решеткой, это точное значение минимального числа подсистем с невырожденными матрицами попарных l_1-расстояний, на которые может быть разбита решетка.

3.3. Разделение систем точек на подсистемы без k-сингулярности

Рассмотрим общий вопрос о разделении произвольной системы точек на подсистемы без k-сингулярности. Справедлива следующая теорема:

Теорема. Для системы q точек S в $\mathbb{R}^m$ пара (S, I) является матроидом, где I - набор подсистем S, которые не являются k-сингулярными.

Доказательство. В начале предыдущего раздела было замечено, что подсистема $\acute{S}$ системы S не обладает свойством 1-сингулярности тогда и только тогда, когда подмножество строк бинарной матрицы классов эквивалентностей T, соответствующих точкам из $\acute{S}$, является линейно-независимым набором векторов. Таким образом, подсистемам без 1-сингулярности соответствуют линейно-независимые подмножества строк матрицы T и мы можем говорить, что матроид (S, I) изоморфен матричному матроиду $M_T = (S_T, I_T)$, где S_T - строки матрицы T, а I_T - линейно-независимые подмножества строк.

Для рассмотрения случая k-сингулряности при $k > 1$ напомним теорему:

Теорема [10]. Пусть z — биективное отображение множества $\{1, \dots, C_m^k\}$ на множество сочетаний без повторений объема k (из множества $\{1, \dots, m\}$). Система точек $\{\tilde{s}_i\}_{i=1}^q$ является k-сингулярной тогда и только тогда, когда является 1-сингулярной система точек $D_S = \{\tilde{d}_i\}_{i=1}^q$ пространства $\mathbb{R}^{C_m^k}$ такая, что для всех $t \in \{1, \dots, C_m^k\}$ справедливо

$$(\tilde{d}_i)_t = (\tilde{d}_j)_t \quad \Leftrightarrow \quad \forall r \in z(t) \quad (\tilde{s}_i)_r = (\tilde{s}_j)_r.$$

Согласно теореме, каждой точке s_i системы S в $\mathbb{R}^{>}$ можно сопоставить точку d_i в пространстве $\mathbb{R}^{C_m^k}$ таким образом, что свойство k-сингулярности системы S эквивалентно свойству 1-сингулярности полученной системы D_S в $\mathbb{R}^{C_m^k}$. Можно также заметить, что для подсистемы $\acute{S}$ системы S наличие свойства k-сингулярности у нее эквивалентно наличию свойства 1-сингулярности у подсистемы точек в $\mathbb{R}^{C_m^k}$, сопоставленных точкам $\acute{S}$. Данное замечание доказывает теорему для свойства k-сингулярности при $k > 1$.

Факт, говорящий о том, что система точек S и ее подмножества без свойства k-сингулярности являются матроидом позволяют использовать алгоритм отыскания минимального покрытия носителя матроида независимыми множествами. Алгоритмы, описанные в работах [69, 64] являются полиномиальными при условии, что они используют процедуру проверки подмножеств на независимость в качестве оракула. Формально, при фиксированных значениях размерности m исходного пространства $\mathbb{R}^m$ и параметра k мы можем считать, что полиномиальная процедура проверки нам доступна: для множества S можно посчитать его образ D_S в пространстве $\mathbb{R}^{C_m^k}$ и проверить на 1-сингулярность. Мы покажем, как построить процедуру проверки другим способом.

Для системы q точек S рассмотрим $q \times q$ матрицу $\acute{H}_S$

$$\acute{H}_S = \sum_{i=1}^{m} \delta_i E - \acute{P}_S,$$

где $\acute{P}_S$ - матрица попарных l_1 расстояний для S, E - $q \times q$ матрица из одних 1, δ_i - разница между максимальным и минимальным значением i-й координаты для системы S. Имеет место следующая Лемма.

Лемма [10]. Для функции

$$G_k(x) = x^k$$

и системы q точек S выполнено следующее: система S является k-сингулярной тогда и только тогда, когда вырождена матрица

$$G_k(\acute{H}_S).$$

Применение функции G_k к матрице $\acute{H}_S$ означает, что мы применяем функцию к каждому элементу матрицы.

Данная лемма позволяет построить эффективную процедуру проверки на k-сингулярность. Исходя из того, что разделение системы S на подсистемы без k-сингулярности эквивалентно разделению системы D_S на подсистемы без 1-сингулярности можно в явном виде выписать оценку из раздела 3.2. Произвольную систему S можно разделить на

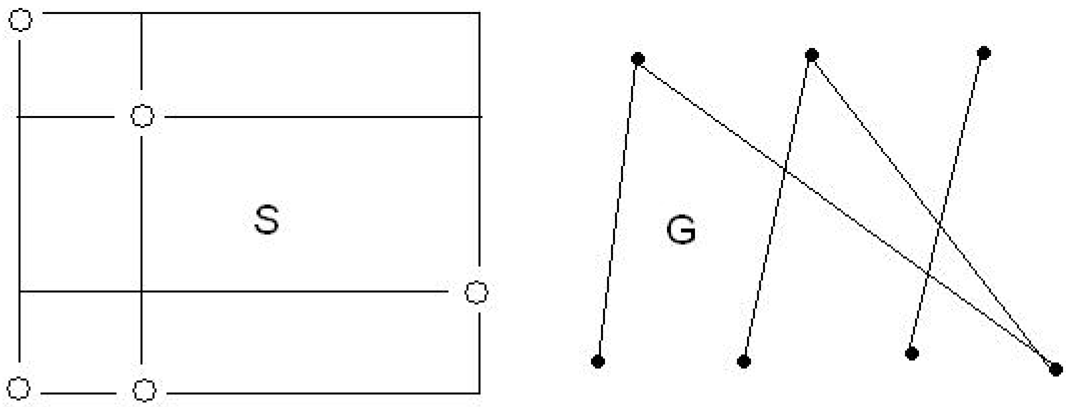
$$\left\lceil \frac{\prod_{i}^{C_m^k} f_i}{\sum_{i}^{C_m^k} f_i + 1 - C_m^k} \right\rceil$$

подмножеств, где f_i - число различных значений, которые может принимать координата с номером i системы D_S.

3.4. Разделение на подсистемы для пространства $\mathbb{R}^2$

В данном разделе мы кратко рассмотрим задачу разделения на подсистемы без 1-сингулярности для плоскости. Заметим, что 2-сингулярных систем на плоскости не существует.

Сопоставим нашей системе S двудольный граф G. Выберем c_1 вершин для первой доли и c_2 вершин для второй доли, где c_1 - число различных значений, которые может принимать первая координата точек из S; c_2 - аналогичное число для второй координаты. Каждой вершине сопоставляется свое значение первой либо второй координаты. Точке (x, y) из системы S будет соответствовать в графе ребро e, соединяющее вершины, которые помечены числами x и y.



Утверждение. Системам на плоскости, не обладающим свойством 1-сингулярности, при сопоставлении, описанном выше, соответствуют ацикличные графы.

Данное утверждения является простым следствием критерия 1-сингулярности для плоскости из работы [60]. Система является 1-сингулярной тогда и только тогда, когда она не содержит замкнутых путей - подсистем вида $\{(a_i, b_i), (a_i, b_{i+1})\}_{i=1}^{r}, b_{r+1} = b_1$. Можно заметить, что замкнутые пути как раз соответствуют циклам в графе G. Разделение на подсистемы без 1-сингулярности эквивалентно разделению множества ребер графа G на ациклические подмножества.

Задача разделения множества ребер произвольного графа G на минимальное число ациклических подмножества является частным случаем задачи поиска минимального покрытия независимыми множествами носителя некоторого матроида M. Данная задача может быть решена при помощи алгоритмов, описанных в работах [64, 69]. Применительно к самой задаче разделения произвольного графа на леса можно отметить также работу [46], в которой алгоритм разделения приведен конкретно для графов.

Для множеств, являющихся решетками на плоскости, то есть систем точек, которые могут быть представлены в виде декартового произведения $S = A \times B, A = \{a_1, .., a_k\}, B = \{b_1, .., b_n\}$, оценка из раздела 3.2 дает точное значение числа подсистем, на которые может быть разбита решетка

$$\left\lceil \frac{k \cdot n}{k+n-1} \right\rceil.$$

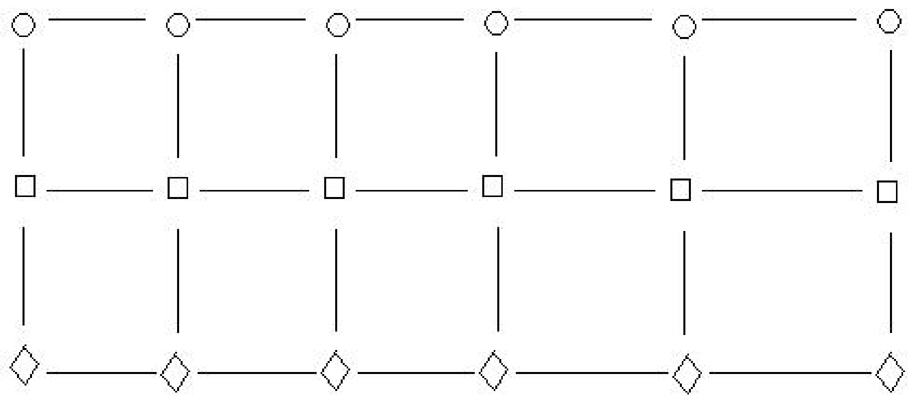
Предположим для определенности, что $k \le n$. При данном предположении верны два неравенства

$$\frac{k}{2} < \left\lceil \frac{k \cdot n}{k+n-1} \right\rceil \le k.$$

При условии $(k-1)^2 < n$ будет также выполнено равенство

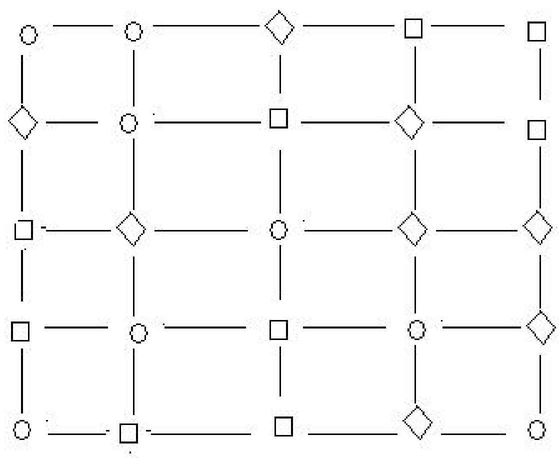
$$\left\lceil \frac{k \cdot n}{k+n-1} \right\rceil = k.$$

Таким образом, при фиксированном k и возрастающем n, минимальное число подсистем, на которые может быть разбита решетка возрастает от $k/2$ до k. При условии $(k-1)^2 < n$ данное число становится равным k и решетка может быть разбита на минимальное число решеток довольно простым способом.



Пример разделения решетки 3×7 на 3 решетки без 1-сингулярности

Критерий в терминах замкнутых путей также является простым способом проверки систем на 1-сингулярность и корректности разбиения систем на плоскости на подсистемы без 1-сингулярности.



Пример разделения решетки 5×5 на 3 подсистемы без 1-сингулярности

3.5. Эффективные критерии k-сингулярности

Рассмотрим некоторую систему S из q различных точек в пространстве R^m. В разделе 3.3 мы привели критерий, при помощи которого можно достаточно эффективно проверять наличие свойства k-сингулярности для систем точек. Необходимо вычислить полином $G(x) = x^k$ от матрицы $\acute{H}_S$

$$\acute{H}_S = \sum_{i=1}^{m} \delta_i E - \acute{P}_S,$$

где $\acute{P}_S$ - матрица попарных l_1 расстояний для S, E - $q \times q$ матрица из одних 1, δ_i - разница между максимальным и минимальным значением i-й координаты для системы S. Проверить на невырожденность полученную матрицу $G(\acute{H}_S)$. В работе [10] доказано более общее утверждение и построено семейство полиномов, которые можно использовать вместо x^k, и проверять системы точек на k-сингулярность.

Обозначим H_S целочисленную матрицу следующего вида:

$$H_S = mE - P_S,$$

где P_S - матрица попарных расстояний Хэмминга. Имеет место следующая лемма:

Лемма [10]. Для функций

$$F_k(x) = \sum_{r=0}^{k} a_r \prod_{j=1}^{r} (x - j + 1), G_k(x) = \sum_{r=0}^{k} b_k x^k$$

(произведение по пустому множеству считается равным единице), $a_k > 0$, $b_k > 0$, $a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$ при $i \in \{0, 1, .., k-1\}$ и системы попарно различных точек S в пространстве $\mathbb{R}^m$, где $k \leq m$ и $q \geq 2$ справедливы равенства

$$U^k(H_S) = U^k(P_S) = L(F_k(H_S)) = U^k(T(S)) = L(G_k(\acute{H}_S)) = U^k(\acute{H}_S) = U^k(\acute{P}_S),$$

где T(S) - бинарная матрица классов эквивалентностей, описанная в разделе

(1.3).

В предположении, что все коэффициенты a_i целочисленные, семейство отображений $F_k(x)$ обладает также тем свойством, что для матрицы $F_k(H_S)$ найдется система точек $\tilde{S}$ такая, что $F_k(H_S) = H_{\tilde{S}}$. Имеет место также следующее утверждение:

Теорема. Рассмотрим систему точек S пространстве $\mathbb{R}^m$. Если полином $F(x)$ обладает следующими двумя свойствами:

- для произвольной системы S в $\mathbb{R}^p$ попарно различных точек выполнено равенство $L(F(H_S)) = U^k(P_S)$ $(p \leq m)$,
- для произвольной системы S в $\mathbb{R}^p$ попарно различных точек найдется система $\tilde{S}$ такая, что $F(H_S) = H_{\tilde{S}}$ $(p \leq m)$;

то он является одним из полиномов вида $\tilde{F}_k(x)$

$$\tilde{F}_k(x) = \sum_{r=0}^{k} \frac{a_r}{r!} \prod_{j=1}^{r} (x - j + 1)$$

с целочисленными положительными коэффициентами a_r.

Доказательство. Второе условие утверждения говорит о том, что многочлен $F(x)$ должен принимать неотрицательные целые значения при целых неотрицательных значениях x. Поэтому многочлен $F(x)$ должен иметь следующий вид

$$F(x) = \sum_{r=0}^{u} \frac{c_r}{r!} \prod_{j=1}^{r} (x - j + 1),$$

где c_r - целые числа. Доказательство данного факта можно найти в книге [47]. Далее мы покажем, что все коэффициенты должны быть неотрицательные. Предположим противное, пусть некоторый коэффициент $c_p < 0$ $(p \leq u)$ и $c_r \geq 0$ для $r < p$. Рассмотрим системы точек S в пространстве $\mathbb{R}^p$. На пересечении i-й строки и j-го столбца у матрицы H_S стоит число совпадающих координат у i-й и j-й точек. Поэтому для выбранных нами систем точек числа в матрице

H_S принадлежат множеству $\{0, 1, .., p\}$. Слагаемые многочлена $F(x)$

$$\frac{c_r}{r!}\prod_{j=1}^{r}(x-j+1)$$

для $r > p$ равны нулю и мы можем считать, что многочлен $F(x)$ равен

$$\sum_{r=0}^{p-1}\frac{c_r}{r!}\prod_{j=1}^{r}(x-j+1)-\frac{|c_p|}{p!}\prod_{j=1}^{p}(x-j+1).$$

Более того, так как S является системой попарно различных точек, то на диагонали у матрицы H_S стоят числа p, а вне диагонали числа меньшие p. Верно равенство

$$\prod_{j=1}^{p}(H_S-j+1)=p!I,$$

где I - матрица с единицами на главной диагонали и нулями вне ее. Матрица $F(H_S)$ может быть рассмотрена в виде

$$\sum_{r=0}^{p-1}\frac{c_r}{r!}\prod_{j=1}^{r}(H_S-j+1)-|c_p|I.$$

Согласно второму условию утверждения для некоторой системы $\tilde{S}$ верно равенство

$$\sum_{r=0}^{p-1}\frac{c_r}{r!}\prod_{j=1}^{r}(H_S-j+1)-|c_p|I=H_{\tilde{S}}.$$

Мы можем переписать его в виде

$$\sum_{r=0}^{p-1}\frac{c_r}{r!}\prod_{j=1}^{r}(H_S-j+1)=|c_p|I+H_{\tilde{S}}.$$

Допустим, что система $\tilde{S}$ - это некоторая система точек в пространстве $\mathbb{R}^d$.

Рассмотрим систему $\acute{S}$ в пространстве $\mathbb{R}^{d+|c_p|}$, точки которой получаются их точек системы $\tilde{S}$ приписыванием им дополнительных $|c_p|$ координат так, что значения каждой дополнительной координаты различны для точек системы. Для системы $\acute{S}$ матрица $H_{\acute{S}}$ будет в точности равна

$$|c_p|I + H_{\tilde{S}}.$$

Согласно лемме, приведенной в начале раздела, верно равенство

$$L(\sum_{r=0}^{p-1} \frac{c_r}{r!} \prod_{j=1}^{r} (H_S - j + 1)) = U^b(H_S),$$

где b максимальный индекс такой, что $c_b > 0 (b < p)$. С другой стороны, тогда должно выполняться

$$U^b(H_S) = L(H_{\acute{S}}).$$

Мы покажем, что ранг матрицы $H_{\acute{S}}$ в точности равен q, где q - число точек системы S. Из этого будет следовать, для любой системы S в пространстве $\mathbb{R}^p$ размерность пространства $U^b(H_S)$ в точности равна q для некоторого $b < p$. Однако это и является противоречием, так как в пространстве $\mathbb{R}^p$ возможно построить $(p-1)$-сингулярную систему точек. Осталось показать, что ранг матрицы $H_{\acute{S}}$ равен q. Данный факт следует из леммы.

Лемма. Система q точек S в пространстве $\mathbb{R}^m$ такая, что найдется координата i, значения которой для всех точек системы S различны, не является 1-сингулярной.

Доказательство. Для доказательства необходимо вспомнить, что верно равенство

$$L(H_S) = L(T(S)),$$

где $T(S)$ - бинарная матрица классов эквивалентностей. Матрица $T(S)$ состоит их блоков. Блок, соответствующий координате i, будет равен I - матрице с единицами на диагонали и нулями вне ее. Из этого следует, что ранг матрицы $T(S)$ в точности равен q и система S не является 1-сингулярной.

Мы показали, что коэффициенты c_r многочлена $F(x)$ должны быть целыми неотрицательными числами. Мы покажем также, что они не могут ровняться 0. Предположим, что некоторый коэффициент c_p равен нулю, а коэффициенты с индексами меньше чем p положительные. Рассмотрим систему точек S в пространстве $\mathbb{R}^p$. Для данной системы будет верно равенство

$$F(H_S) = \sum_{r=0}^{p-1} \frac{c_r}{r!} \prod_{j=1}^{r} (H_S - j + 1).$$

В данном случае, согласно лемме в начале раздела должно быть выполнено равенство

$$L(F(H_S)) = U^{p-1}(H_S).$$

С другой стороны, согласно первому условию утверждения, должно выполнятся

$$L(F(H_S)) = U^k(H_S).$$

А для систем точек в пространстве $\mathbb{R}^p$ будет также выполнено

$$L(F(H_S)) = U^k(H_S) = U^p(H_S).$$

Как следствие, должно быть выполнено равенство

$$U^p(H_S) = U^{p-1}(H_S).$$

Очевидно, что оно не может выполнятся для любых систем точек пространства $\mathbb{R}^p$. Поэтому у многочлена $F(x)$ должны быть все коэффициенты положительные. А, согласно лемме, степень многочлена должна быть в точности равна k.

Замечание. Для матрицы H_S системы точек S верно равенство

$$H_S = T(S)T(S)^T.$$

Если второе условие утверждения заменить на условие:

- для произвольной системы точек S в $\mathbb{R}^p$ $(p \leq m)$ найдется матрица T такая, что $F(H_S) = TT^T$,

то условие целочисленности коэффициентов отпадет и теорема будет описывать семейство $F_k(x)$ из леммы с положительными коэффициентами.

Замечание. Теорема фактически устанавливает следующий тезис: если от многочлена $F(x)$ требуется, чтобы для любой системы точек S нашлась система точек $\acute{S}$ такая, что выполнено равенство $F(H_S) = H_{\acute{S}}$, то многочлен $F(x)$, записанный в виде

$$\sum_{r=0}^{k} \frac{a_r}{r!} \prod_{j=1}^{r} (x - j + 1)$$

должен иметь целые неотрицательные коэффициенты a_i. Очевидно также, что один из коэффициентов a_0 или a_1 должен быть отличен от нуля, в противном случае для матриц H_S систем точек в $\mathbb{R}^1$ значение многочлена будет равно нулю. Оказывается, данным видом многочленов описываются все многочлены, для которых верно утверждение о том, что они переводят матрицу H_S в некоторую другую матрицу $H_{\acute{S}}$. Мы показали необходимость, покажем достаточность.

Для каждого многочлена вида

$$F(x) = \sum_{r=0}^{k} \frac{a_r}{r!} \prod_{j=1}^{r} (x - j + 1), a_0 a_1 \neq 0$$

с неотрицательными целыми коэффициентами и системы точек S найдется система точек $\acute{S}$ такая, что

$$F(H_S) = H_{\acute{S}}.$$

Сначала, мы покажем как построить такую систему точек $\acute{S}$, для многочлена

$$\frac{1}{r!} \prod_{j=1}^{r} (x - j + 1).$$

в предположении, что система S - это система точек в пространстве $\mathbb{R}^m$ и $m \leq r$. Рассмотрим матрицу

$$\frac{1}{r!} \prod_{j=1}^{r} (H_S - j + 1).$$

При условии, что система S содержится в пространстве $\mathbb{R}^m$ и $m \leq r$ данная матрица будет отлична от нулевой. Элементы этой матрицы можно описать следующими двумя пунктами:

- на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 0, если i-я и j-я точки системы S имеют менее r совпадающих координат;
- на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит C_p^r, если i-я и j-я точки системы S имеют p совпадающих координат и $p \geq r$.

Поэтому рассмотрим систему $\acute{S}$ из q точек в пространстве $R^{C_m^r}$. В данном пространстве каждой координате сопоставим упорядоченный набор r индексов $\{i_1, .., i_r\}$ $i_f \in \{1, .., m\}$, таких наборов ровно C_m^r штук и каждой координате приписан свой набор. Мы рассмотрим систему q точек $\acute{S}$, для которой выполнено условие: значения координаты с набором индексов $\{i_1, .., i_r\}$ совпадают у i-й и j-й точки $\acute{S}$ тогда и только тогда, когда совпадают значения всех координат с номерами из множества $\{i_1, .., i_r\}$ для i-й и j-й точек из S. Несложно видеть, что в этом случае матрица $H_{\acute{S}}$ будет в точности равна

$$\frac{1}{r!}\prod_{j=1}^{r}(H_S - j + 1).$$

Данная конструкция фактически доказывает факт замечания. Если у нас есть две системы точек S_1 и S_2 по q в пространствах $\mathbb{R}^{m_1}$ и $\mathbb{R}^{m_2}$, соответственно, с матрицами H_{S_1} и H_{S_2}, то несложно построить систему S_3 в пространстве $\mathbb{R}^{m_1+m_2}$ с матрицей $H_{S_1}+H_{S_2}$. Поэтому мы можем строить системы точек для многочленов

$$\frac{c_r}{r!}\prod_{j=1}^{r}(H_S - j + 1).$$

Далее для суммы таких многочленов, которые не равны нулю для матрицы H_S нашей исходной системы S. Условие $a_0a_1 \neq 0$ будет нам гарантировать, что значение всего многочлена $F(H_S)$ будет отлично от нулевой матрицы и наша конструкция будет невырожденной.

При рассмотрении вопроса о многочленах $G(x)$ для критерия k-сингулярности с метрикой l_1 можно показать, что имеет место следующая теорема.

Теорема. Если полином $F(x)$ обладает следующими двумя свойствами:

- для произвольной системы S попарно различных точек с целочисленными координатами выполнено равенство $L(F(\acute{H}_S)) = U^k(\acute{P}_S)$,
- для произвольной системы S попарно различных точек с целочисленными координатами найдется матрица T такая, что $F(\acute{H}_S) = TT^T$;

то он является одним из полиномов вида $F_k(x)$ с положительными коэффициентами.

Доказательство. Доказательство данного утверждения основано на том факте, что для произвольной системы точек S с целочисленными координатами возможно найти множество точек S_1, координаты которого принимают значения из множества $\{0, 1\}$ такое, что выполнено два равенства

$$\acute{P_S} = \acute{P}_{S_1}, \acute{H_S} = \acute{H}_{S_1}.$$

Так как система S_1 является подмножеством гиперкуба, то для нее будет верно

$$\acute{P}_{S_1} = P_{S_1}, \acute{H}_{S_1} = H_{S_1}.$$

Далее мы можем воспользоваться предыдущей теоремой данного раздела и первым замечанием после него.

Построение системы S_1 по системе S мы приведем явно. Допустим, что точки системы S являются точками некоторого пространства $\mathbb{R}^m$. Точки системы S_1 будут лежать в пространстве $\mathbb{R}^n$, для которого размерность n будет равна

$$\sum_{i=1}^{m} \delta_i,$$

где δ_i - разность между максимальным и минимальным значением i-й координаты у точек системы S. Согласно условию, δ_i - целые неотрицательные числа. Координаты пространства $\mathbb{R}^n$ будут разбиты на m групп, в i-й группе будет содержаться ровно δ_i координат. Также мы предполагаем, что внутри каждой группы координаты упорядочены. Далее мы сопоставим каждой точке s_j системы S некоторую точку $\tilde{s_j}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Допустим, что точка s_j имеет координаты $(a_1, ..., a_m)$. Тогда сопоставим ей точку $\tilde{s_j}$, у которой будет стоять в i-ом блоке ровно $a_i - m_i$ единиц, где m_i - минимальное значение, которое может принимать i-я координата точек системы S, и для этих единиц выбраны первые $a_i - m_i$ координат согласно порядку для блока i. Несложно заметить, что полученная система точек S_1 будет удовлетворять всем необходимым свойствам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексанян А. А., Журавлев Ю. И. Об одном подходе к вопросу построения эффективных алгоритмов распознавания // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. **25.** № 2 С. 283–291.
2. Дьяконов А. Г. Алгебра над алгоритмами вычисления оценок: минимальная степень корректного алгоритма // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2005. Т.45. № 6. С.1134-1145.
3. Дьяконов А. Г. Алгебра над алгоритмами вычисления оценок: Учебное пособие // М.: Издательский отдел ф-та ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова 2006. 72 с. (ISBN 5-89407-252-2).
4. Дьяконов А. Г. Метрики алгебраических замыканий в задачах распознавания образов с двумя непересекающимися классами // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т.48. № 5. С. 916-927.
5. Дьяконов А. Г. Критерии корректности алгебраических замыканий модели алгоритмов вычисления оценок // Докл. РАН. 2008. Т.420. № 6. С.732-735.
6. Дьяконов А. Г. Исследование алгебраических замыканий алгоритмов распознавания: операторы разметки // Таврический вестник информатики и математики. 2008. № 1. С.199-203.
7. Дьяконов А. Г. Алгебраические замыкания обобщенной модели алгоритмов вычисления оценок // Докл. РАН. 2008. Т.423. № 4. С.461-464.
8. Дьяконов А.Г. О выборе системы опорных множеств для эффективной реализации алгоритмов вычисления оценок // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т.40. № 7 С.1104-1118
9. Дьяконов А.Г. Эффективные формулы вычисления оценок для алгоритмов распознавания с произвольными системами опорных множеств // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1999 Т.39. № 11. С.1904-1918

10. Дьяконов А. Г. Критерии вырожденности матрицы попарных l_1-расстояний и их обобщения // Докл. РАН. 2009. **425.** № 1. С. 11–14.
11. Гуревич И.Б. О выборе ансамбля признаков распознающих систем по принципу распознавания // Автоматика. Киев. 1974. № 5. С.43-52
12. Гуревич И.Б. Проблема распознавания изображений // Распознавание, классификация, прогноз. 1989. Вып. 2. С.280-329.
13. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи // М.: Мир, 1982.
14. Деза М. М., Лоран М. Геометрия разрезов и метрик // М.: МЦНМО. 2001. 736с.
15. Докукин А. А. О построении в алгебраическом замыкании одного алгоритма распознавания // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2001. **41.** № 12. С.1873-1877.
16. Журавлев Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания образов или классификации // Пробл. кибернетики. № 33. М.: Наука, 1978. С. 5–68.
17. Журавлев Ю. И. Корректные алгоритмы над множествами некорректных (эврис- тических) алгоритмов. I // Кибернетика. 1977. № 6. С. 21–27.
18. Журавлев Ю. И. Корректные алгоритмы над множествами некорректных (эврис- тических) алгоритмов. II // Кибернетика. 1977. № 6. С. 21–27.
19. Журавлев Ю.И., Никифоров В.В., Алгоритмы распознавания, основанные на вычислении оценок // Кибернетика. 1971. № 3 С. 1-11.
20. Журавлев Ю. И. Непараметрические задачи распознавания образов // Кибернетика. 1976. № 6. С. 93–103.
21. Журавлев Ю. И. Корректные алгоритмы над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. I // Кибернетика. 1977. № 4. С. 5–17.
22. Журавлев Ю. И. Корректные алгоритмы над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов. III // Кибернетика. 1978. № 2. С. 35–43.

23. Журавлев Ю. И. Избранные научные труды // М.: "Магистр". 1998. 420 с.
24. Журавлев Ю. И., Исаев И. В. Построение алгоритмов распознавания, корректных для заданной контрольной выборки // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т.19. № 3. С. 726–738.
25. Журавлев Ю. И., Камилов М. М. Туляганов Ш.Е. Алгоритмы вычисления оценок и их применение // "ФАН". Ташкент. 1974.
26. Журавлев Ю. И., Рудаков К. В. Об алгебраической коррекции процедур обработки (преобразования) информации // Проблемы прикладной математики. 1987. С. 187–198.
27. Журавлев Ю. И., Рязанов В. В., Сенько О. В. "РАСПОЗНАВАНИЕ". Математические методы. Программная система. Практические применения // М.: Фазис, 2006. 176 с. (ISBN 5-7036-0108-8).
28. Карпович П. А. Критерий k-сингулярности системы точек и оптимальное разбиение на подсистемы // Материалы XVI Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых: секция ВМК. — М.: Изд. отд. ф-та ВМК МГУ, МАКС Пресс, 2009. — С. 33.
29. Карпович П. А. Эффективная реализация алгоритмов распознавания образов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2009. **49.** № 8 С. 1510–1516.
30. Карпович П. А., Дьяконов А. Г. Критерии k-сингулярности систем точек в алгебраическом подходе к распознаванию // Материалы XIV Всероссийской конференции 'Математические методы распознавания образов'. М.: МАКС Пресс, 2009. С. 41–44.
31. Карпович П. А. О задаче разделения системы точек в пространстве l_1 на подсистемы с невырожденными матрицами попарных растояний // Материалы 52-й научной конференции МФТИ 'Современные проблемы фундаментальных и прикладных наук'. Часть VII. Управление и прикладная математика. М:МФТИ. 2009. — С. 70–73.

32. Карпович П. А. Разделение системы точек на подмножества с невырожденными матрицами попарных расстояний // Материалы XVII Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых: секция ВМК. — М.: Изд. отд. ф-та ВМК МГУ, МАКС Пресс, 2010. — С. 87-88.

33. Карпович П. А. Критерии k-сингулярности и разделения 1-сингулярных систем // Вестник Московского университета (серия 15) 'Вычислительная математика и кибернетика'.

34. Карпович П. А., Дьяконов А. Г. k-сингулярные системы точек, приложения в алгебраическом подходе к распознаванию образов // Материалы конференции 'Интеллектуализация обработки информации-8'.

35. Матросов В. Л. Корректные алгебры ограниченной емкости над множествами некорректных алгоритмов // Докл. АН СССР. 1980. Т.253. № 1. С. 25-30.

36. Матросов В. Л. Корректные алгебры ограниченной емкости над множеством алгоритмов вычисления оценок // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1981. Т.21. № 5. С. 1276-1291.

37. Матросов В. Л. О критериях полноты модели алгоритмов вычисления оценок и ее алгебраических замыканий // Докл. АН СССР. 1981. Т.258. № 4. С. 791-796.

38. Матросов В. Л. Оптимальные алгебры в алгебраических замыканиях операторов вычисления оценок // Докл. АН СССР. 1982. Т.262. № 4. С. 818-822.

39. Матросов В. Л. Нижние оценки емкости многомерных алгебр алгоритмов вычисления оценок // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т.24. № 12. С. 1881-1892.

40. Матросов В. Л. Емкость алгебраических расширений модели алгоритмов вычисления оценок // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1984. Т.11. № 5. С. 1719-1730.

41. Матросов В. Л. Емкость полиномиальных расширений множества алгоритмов вычисления оценок // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т.25. № 1. С. 122-133.

42. Матросов В. Л. Корректные алгебры алгоритмов распознавания ограниченной емкости: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. / Гос. пед. инст-т им. В.И.Ленина. // М. 1985. 220 с.

43. Матросов В. Л. Синтез оптимальных алгоритмов в алгебраических замыканиях моделей алгоритмов распознавания // Распознавание, классификация, прогноз. Математические методы и их применение. М.: Наука 1989. Вып. 1. С. 149-176.

44. Плохонина Т. В. О некорректности алгебраического замыкания второй степени семейства алгоритмов вычисления оценок // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1985. Т.25. № 7. С.1073-1086.

45. Плохонина Т. В. Вопросы корректности алгебраических замыканий конечной степени семейства алгоритмов вычисления оценок для регулярных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1987. Т.27. № 5. С.763-770.

46. Полесский В. П. Покрытие конечного графа минимальным числом лесов // Пробл. передачи информ. 1976. № 12:2 С. 76-82

47. Прасолов В. В. Могочлены // М.: МЦНМО. 2001. С. 100-101

48. Растригин Л. А., Эренштейн Р. Х. Коллективные правила распознавания // М.: Энергия 1981. 244 с.

49. Рудаков К. В. О симметрических и функциональных ограничениях для алгоритмов классификации // Докл. АН СССР. 1987. Т.297. № 1. С. 43-46.

50. Рудаков К. В. Универсальные и локальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов // Кибернетика. 1987. № 2. С. 30-35.

51. Рудаков К. В. Полнота и универсальные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов классификации // Кибернетика. 1987. № 3. С. 106-109.
52. Рудаков К. В. Симметрические и функциональные ограничения в проблеме коррекции эвристических алгоритмов классификации // Кибернетика. 1987. № 3. С. 73-77.
53. Рудаков К. В. О применении универсальных ограничений при исследовании алгоритмов классификации // Кибернетика. 1988. № 1. С. 1-5.
54. Рудаков К. В. Об алгебраической теории универсальных и локальных ограничений для задач классификации // Распознавание, классификация, прогноз. Математические методы и их применение. М.: Наука, 1989. Вып. 1. С. 176-201.
55. Рудаков К. В. Алгебраическая теория универсальных и локальных ограничений для алгоритмов распознавания: Дис. ... докт. физ.-матем. наук. / ВЦ РАН. // М. 1992. 144 с.
56. Рудаков К. В. Монотонные и унимодальные корректирующие операции для алгоритмов распознавания // Математические методы распознавания образов-VII: Тез. Докл. М.: 1995.
57. Рудаков К. В., Воронцов К. В. О методах оптимизации и монотонной коррекции в алгебраическом подходе к проблеме распознавания // Докл. РАН. 1999. Т.367. № 3. С. 314-317.
58. Рязанов В.,В. Оптимизация алгоритмов вычисления оценок по параметрам, характеризующим представительность эталонных строк // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1976. Т.16. № 6. С.1559-1570.
59. Braess D., Pinkus A. Interpolation by ridge functions // J. Approx. Theory. V.73. 1993. Pp.218-236.
60. Dyn N., Light W. A., Cheney E. W. Interpolation by piecewise-linear radial basis functions // J. Approx. Theory. 1989. N 59. P. 202–223.

61. Light W. A. The singularity of distance matrices // Multivariate Approximation Theory. Berlin: Birkhauser-Verlag, 1989. P. 233-240.
62. Reid L., Sun X. Distance matrices and ridge function interpolation // Canadian Journal of Mathematics. 1993. N 45. P. 1313-1323.
63. Baxter B. J. C. Conditionally positive functions and p-Norm distance matrices // Constr. Approx. — 1991. — N 7. — P. 427–440.
64. Edmonds J. Matroid partition // Math. Decision Sciences. Proceedings 5th Summer Seminary Stanford. Part 1 (Lectures of Applied Mathematics 11). 1968. P. 335–345.
65. Schoenberg I. J. On certain metric spaces arising from Euclidean spaces by a change of metric and their imbedding in Hilbert space // Ann. Math. 1937. N 38. Pp.787-793.
66. Schoenberg I. J. Metric spaces and positive definite functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1938. N44. Pp.522-536.
67. Schoenberg I. J. Metric spaces and completely monotone functions // Ann. Math. 1938. N39. Pp.811-841.
68. Schrijver A. Combinatorial optimization: polyhedra and efficiency. Berlin: Springer., 2003. **1.** P. 651-761.
69. Knuth D. E. Matroid patrtitioning // Stanford University STAN-CS-73-342 - 1973 - P. 1-12