Лекция 10. Линейные динамические системы. Фильтр Калмана.

А. С. Конушин[1] Д. П. Ветров[2] Д. А. Кропотов[3]
В. С. Конушин[1] О. В. Баринова[1]

[1]МГУ, ВМиК, лаб. КГ

[2]МГУ, ВМиК, каф. ММП

[3]ВЦ РАН

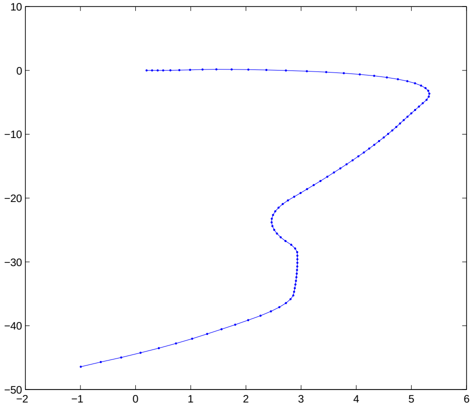
Спецкурс «Структурные методы анализа изображений и сигналов»

План лекции

План лекции

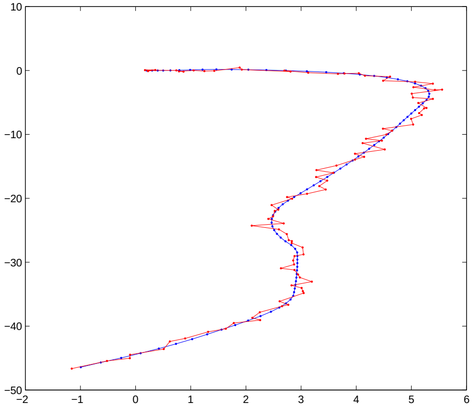
Пример - задача трекинга

Пусть имеется траектория движения объекта во времени



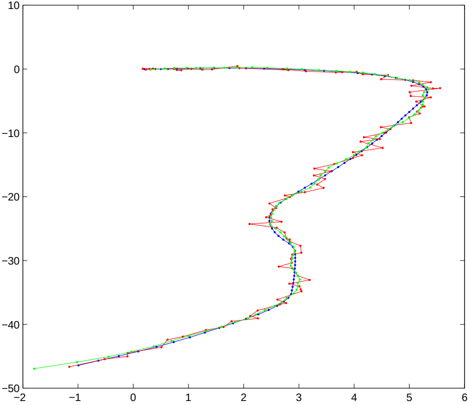
Пример - задача трекинга

Координаты объекты измерены с некоторой погрешностью

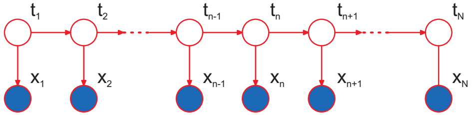


Пример - задача трекинга

Задача - оценить истинные координаты объекта с использованием координат объекта в различные моменты времени



Вероятностная модель



- $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N$ — наблюдаемая последовательность
- $\boldsymbol{t}_1, \dots, \boldsymbol{t}_N$ — истинные параметры объекта
- $p(\boldsymbol{t}_n|\boldsymbol{t}_{n-1})$ — модель движения объекта
- $p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{t}_n)$ — модель шума

Пример спецификации модели

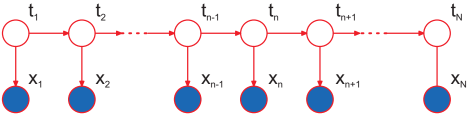
- $\boldsymbol{t}_n = \{\xi_1(n), \xi_2(n), \dot{\xi}_1(n), \dot{\xi}_2(n), \ddot{\xi}_1(n), \ddot{\xi}_2(n)\}$ - истинные координаты, скорости и ускорения объекта в момент времени n
- Модель движения объекта

$$\xi_i(n) = \xi_i(n-1) + \dot{\xi}_i(n-1)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\xi}_i(n-1)(\Delta t)^2 + \varepsilon_1,\ \ i = 1,2$$
$$\dot{\xi}_i(n) = \dot{\xi}_i(n-1) + \ddot{\xi}_i(n-1)\Delta t + \varepsilon_2,\ \ i = 1,2$$
$$\ddot{\xi}_i(n) = \ddot{\xi}_i(n-1) + \varepsilon_3,\ \ i = 1,2$$
$$\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0,\sigma_i),\ \ i = 1,2,3$$

- Модель сенсора (шума)

$$x_i(n) = \xi_i(n) + \nu_i, \quad i = 1,2$$
$$\nu_i \sim \mathcal{N}(0,s_i),\ \ i = 1,2$$

Скрытая марковская модель



- Переменные $\boldsymbol{x}_n$ — произвольные
- Переменные $\boldsymbol{t}_n$ — дискретные, принимают значения из $\{1, \dots, K\}$
- Распределения $p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{t}_n)$ и $p(\boldsymbol{t}_n|\boldsymbol{t}_{n-1})$ — произвольные.

Наша вероятностная модель имеют такую же структуру. Основное отличие - переменные $\boldsymbol{t}_n$ непрерывные.

Обучение и вывод в скрытой марковской модели

$$p(\boldsymbol{t}_n|X) = \frac{p(\boldsymbol{t}_n, X)}{p(X)} = \frac{p(\boldsymbol{t}_n, \boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)}{p(\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)} \cdot \frac{p(\boldsymbol{x}_{n+1}, \dots, \boldsymbol{x}_N|\boldsymbol{t}_n)}{p(\boldsymbol{x}_{n+1}, \dots, \boldsymbol{x}_N|\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)} = \hat{\alpha}(\boldsymbol{t}_n)\hat{\beta}(\boldsymbol{t}_n)$$

Формулы пересчета

$$c_n\hat{\alpha}(\boldsymbol{t}_n) = p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{t}_n)\sum_{\boldsymbol{t}_{n-1}}\hat{\alpha}(\boldsymbol{t}_{n-1})p(\boldsymbol{t}_n|\boldsymbol{t}_{n-1})$$

$$c_{n+1}\hat{\beta}(\boldsymbol{t}_n) = \sum_{\boldsymbol{t}_{n+1}}\hat{\beta}(\boldsymbol{t}_{n+1})p(\boldsymbol{x}_{n+1}|\boldsymbol{t}_{n+1})p(\boldsymbol{t}_{n+1}|\boldsymbol{t}_n)$$

В случае непрерывных $\boldsymbol{t}_n$ сумма заменяется на интеграл.

Ограничения на вероятностную модель

- Алгоритм вывода должен иметь линейную по N сложность.
- Формулы пересчета

$$c_n\hat{\alpha}(\boldsymbol{t}_n) = p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{t}_n)\int \hat{\alpha}(\boldsymbol{t}_{n-1})p(\boldsymbol{t}_n|\boldsymbol{t}_{n-1})d\boldsymbol{t}_{n-1}$$

$$c_{n+1}\hat{\beta}(\boldsymbol{t}_n) = \int \hat{\beta}(\boldsymbol{t}_{n+1})p(\boldsymbol{x}_{n+1}|\boldsymbol{t}_{n+1})p(\boldsymbol{t}_{n+1}|\boldsymbol{t}_n)d\boldsymbol{t}_{n+1}$$

  Эти интегралы должны вычисляться аналитически и модель не должна усложняться при переходе от $\hat{\alpha}(\boldsymbol{t}_{n-1})$ к $\hat{\alpha}(\boldsymbol{t}_n)$.
- Пример усложнения модели. Пусть $p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{t}_n)$ - смесь K гауссиан. Тогда если $\hat{\alpha}(\boldsymbol{t}_1)$ гауссиана, то $\hat{\alpha}(\boldsymbol{t}_2)$ - смесь из K гауссиан, $\hat{\alpha}(\boldsymbol{t}_3)$ - смесь из K^2 гауссиан и т.д.
- Для решения задачи сегментации функция Беллмана должна вычисляться аналитически.

Линейная динамическая система (ЛДС)

$$p(\boldsymbol{t}_n|\boldsymbol{t}_{n-1}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{t}_n|A\boldsymbol{t}_{n-1}, \Gamma)$$
$$p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{t}_n) = \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_n|C\boldsymbol{t}_n, \Sigma)$$
$$p(\boldsymbol{t}_1) = \mathcal{N}(\boldsymbol{t}_1|\boldsymbol{\mu}_0, V_0)$$

Эквивалентная формулировка

$$\boldsymbol{t}_n = A\boldsymbol{t}_{n-1} + \boldsymbol{w}_n$$
$$\boldsymbol{x}_n = C\boldsymbol{t}_n + \boldsymbol{v}_n$$
$$\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{\mu}_0 + \boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{w} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{w}|\boldsymbol{0}, \Gamma)$$
$$\boldsymbol{v} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{v}|\boldsymbol{0}, \Sigma)$$
$$\boldsymbol{u} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{u}|\boldsymbol{0}, V_0)$$

Параметры модели $\{A, \Gamma, C, \Sigma, \boldsymbol{\mu}_0, V_0\}$

Свойство ЛДС

$$p(X,T|\Theta) = p(\boldsymbol{t}_1)\prod_{n=2}^{N} p(\boldsymbol{t}_n|\boldsymbol{t}_{n-1})\prod_{n=1}^{N} p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{t}_n)$$

Все атомарные распределения представляют собой линейную гауссовскую модель. Поэтому совместное распределение $p(X,T|\Theta)$, а также все его маргинальные и условные распределения будут также гауссовскими. Наиболее вероятная последовательность T_* определяется по индивидуально наиболее вероятным значениям $\boldsymbol{t}_n$:

$$\boldsymbol{t}_n^* = \arg\max_{\boldsymbol{t}_n} p(\boldsymbol{t}_n|X,\Theta)$$

Вывод: если известны $p(\boldsymbol{t}_n|X,\Theta)$, то аналог алгоритма Витерби для сегментации не требуется!

Многомерное нормальное распределение

$$\boldsymbol{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^d \det \Sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right)$$

Пусть $\boldsymbol{x}$ состоит из двух групп переменных $\boldsymbol{x}_a$ и $\boldsymbol{x}_b$, т.е.

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}_a \\ \boldsymbol{x}_b \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_a \\ \boldsymbol{\mu}_b \end{pmatrix}, \ \Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{aa} & \Sigma_{ab} \\ \Sigma_{ba} & \Sigma_{bb} \end{pmatrix}, \ \Lambda = \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \Lambda_{aa} & \Lambda_{ab} \\ \Lambda_{ba} & \Lambda_{bb} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$p(\boldsymbol{x}_a) = \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_a|\boldsymbol{\mu}_a, \Sigma_{aa})$$
$$p(\boldsymbol{x}_a|\boldsymbol{x}_b) = \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_a|\boldsymbol{\mu}_a - \Lambda_{aa}^{-1}\Lambda_{ab}(\boldsymbol{x}_b - \boldsymbol{\mu}_b), \Lambda_{aa}^{-1})$$

План лекции

Вывод в ЛДС

Для решения задачи сегментации, а также для EM-алгоритма обучения ЛДС важно уметь вычислять характеристики:

$$\hat{\alpha}(\boldsymbol{t}_n) = p(\boldsymbol{t}_n|\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n) = \mathcal{N}(\boldsymbol{t}_n|\boldsymbol{\mu}_n, V_n)$$

$$\hat{\beta}(\boldsymbol{t}_n) = \frac{p(\boldsymbol{x}_{n+1},\dots,\boldsymbol{x}_N|\boldsymbol{t}_n)}{p(\boldsymbol{x}_{n+1},\dots,\boldsymbol{x}_N|\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n)}$$

Для их вычисления можно применять алгоритм «вперед-назад». Проход вперед для ЛДС получил название фильтра Калмана, а проход назад - PTC уравнения (Rauch-Tung-Striebel).

Проход вперед (фильтр Калмана)

Формула пересчета

$$c_n\hat{\alpha}(\boldsymbol{t}_n) = p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{t}_n)\int \hat{\alpha}(\boldsymbol{t}_{n-1})p(\boldsymbol{t}_n|\boldsymbol{t}_{n-1})d\boldsymbol{t}_{n-1}$$

Подставляем

$$c_n\mathcal{N}(\boldsymbol{t}_n|\boldsymbol{\mu}_n, V_n) = \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_n|C\boldsymbol{t}_n, \Sigma) \int \mathcal{N}(\boldsymbol{t}_n|A\boldsymbol{t}_{n-1}, \Gamma)\mathcal{N}(\boldsymbol{t}_{n-1}|\boldsymbol{\mu}_{n-1}, V_{n-1})d\boldsymbol{t}_{n-1}$$

Результат

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}_n &= A\boldsymbol{\mu}_{n-1} + K_n(\boldsymbol{x}_n - CA\boldsymbol{\mu}_{n-1}) \\
V_n &= (I - K_nC)P_{n-1} \\
c_n &= \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_n|CA\boldsymbol{\mu}_{n-1}, CP_{n-1}C^T + \Sigma) \\
P_{n-1} &= AV_{n-1}A^T + \Gamma \\
K_n &= P_{n-1}C^T(CP_{n-1}C^T + \Sigma)^{-1}
\end{aligned}$$

Фильтр Калмана

Традиционно в фильтре Калмана рассматривают два этапа:
Прогноз. Оценивается распределение

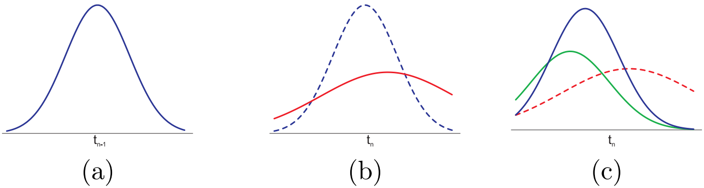
$$p(\boldsymbol{t}_n|\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_{n-1}) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{t}_n|\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n,\tilde{V}_n)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n &= A\boldsymbol{\mu}_{n-1}\\
\tilde{V}_n &= P_{n-1}\\
\tilde{\boldsymbol{x}}_n &= C\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n
\end{aligned}$$

Коррекция.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}_n &= \tilde{\boldsymbol{\mu}}_n + K_n(\boldsymbol{x}_n - \tilde{\boldsymbol{x}}_n)\\
V_n &= (I - K_nC)\tilde{V}_n\\
c_n &= \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_n|\tilde{\boldsymbol{x}}_n, C\tilde{V}_nC^T + \Sigma)
\end{aligned}$$

Иллюстрация фильтра Калмана



— $p(\boldsymbol{t}_{n-1}|\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_{n-1})$ — $p(\boldsymbol{t}_n|\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_{n-1})$ — $p(\boldsymbol{t}_n|\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n)$

Фильтр Калмана. Начальное приближение.

Значение $\hat{\alpha}(\boldsymbol{t}_1)$ в начальный момент времени вычисляется из условия:

$$c_1\hat{\alpha}(\boldsymbol{t}_1) = p(\boldsymbol{t}_1)p(\boldsymbol{x}_1|\boldsymbol{t}_1)$$

Производя свертку двух гауссиан, получаем:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mu}_1 &= \boldsymbol{\mu}_0 + K_1(\boldsymbol{x}_1 - C\boldsymbol{\mu}_0)\\
V_1 &= (I - K_1C)V_0\\
c_1 &= \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_1|C\boldsymbol{\mu}_0, CV_0C^T + \Sigma)\\
K_1 &= V_0C^T(CV_0C^T + \Sigma)^{-1}
\end{aligned}$$

Проход назад

$$\gamma(\boldsymbol{t}_n) = p(\boldsymbol{t}_n|X,\Theta) = \hat{\alpha}(\boldsymbol{t}_n)\hat{\beta}(\boldsymbol{t}_n) = \mathcal{N}(\boldsymbol{t}_n|\hat{\boldsymbol{\mu}}_n,\hat{V}_n)$$

В отличие от $\gamma(\boldsymbol{t}_n)$ $\hat{\beta}(\boldsymbol{t}_n)$ не является маргинальным распределением:

$$\hat{\beta}(\boldsymbol{t}_n) = \frac{p(\boldsymbol{x}_{n+1},\dots,\boldsymbol{x}_N|\boldsymbol{t}_n)}{p(\boldsymbol{x}_{n+1},\dots,\boldsymbol{x}_N|\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n)}$$

Поэтому формулы для обратного прохода удобнее записывать в терминах $\gamma(\boldsymbol{t}_n)$

Формулы для обратного прохода

Формула пересчета

$$c_{n+1}\hat{\beta}(\boldsymbol{t}_n) = \int \hat{\beta}(\boldsymbol{t}_{n+1})p(\boldsymbol{x}_{n+1}|\boldsymbol{t}_{n+1})p(\boldsymbol{t}_{n+1}|\boldsymbol{t}_n)d\boldsymbol{t}_{n+1}$$

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_n = \boldsymbol{\mu}_n + J_n(\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n+1} - A\boldsymbol{\mu}_n)$$
$$\hat{V}_n = V_n + J_n(\hat{V}_{n+1} - P_n)J_n^T$$
$$J_n = V_n A^T (P_n)^{-1}$$

Распределение для пары переменных

Для EM-алгоритма обучения понадобятся также величины

$$\xi(\boldsymbol{t}_{n-1},\boldsymbol{t}_n) = p(\boldsymbol{t}_{n-1},\boldsymbol{t}_n|X,\Theta) =$$
$$= (c_n)^{-1}\hat{\alpha}(\boldsymbol{t}_{n-1})p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{t}_n)p(\boldsymbol{t}_n|\boldsymbol{t}_{n-1})\hat{\beta}(\boldsymbol{t}_n) =$$
$$\frac{\mathcal{N}(\boldsymbol{t}_{n-1}|\boldsymbol{\mu}_{n-1},V_{n-1})\mathcal{N}(\boldsymbol{t}_n|A\boldsymbol{t}_{n-1},\Gamma)\mathcal{N}(\boldsymbol{x}_n|C\boldsymbol{t}_n,\Sigma)\mathcal{N}(\boldsymbol{t}_n|\hat{\boldsymbol{\mu}}_n,\hat{V}_n)}{c_n\mathcal{N}(\boldsymbol{t}_n|\boldsymbol{\mu}_n,V_n)} =$$
$$= \mathcal{N}(\boldsymbol{t}_{n-1},\boldsymbol{t}_n|[\gamma(\boldsymbol{t}_{n-1}),\gamma(\boldsymbol{t}_n)]^T, J_{n-1}\hat{V}_n)$$

План лекции

Нелинейная фильтрация

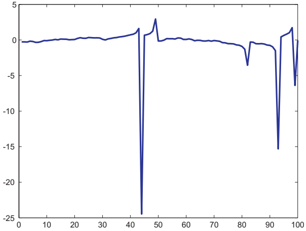
- Рассмотрим более сложную задачу фильтрации сигналов
- Пусть зависимости между соседними переменными нелинейные, но шум по-прежнему гауссовский

$$\boldsymbol{t}_n = f(\boldsymbol{t}_{n-1}) + \boldsymbol{w}_n, \quad \boldsymbol{w}_n \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{w}|\mathbf{0}, \Gamma)$$

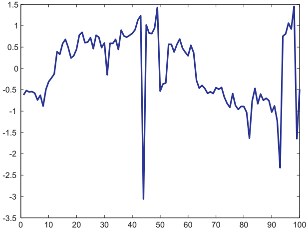
$$\boldsymbol{x}_n = h(\boldsymbol{t}_n) + \boldsymbol{v}_n, \qquad \boldsymbol{v} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{v}|\mathbf{0}, \Sigma)$$

- Требуется по выборке $X_n = (\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_n)$ оценить распределение на текущую скрытую компоненту $\boldsymbol{t}_n$

Пример задачи нелинейной фильтрации сигнала



Скрытая переменная



Наблюдаемый сигнал

Линеаризация нелинейных зависимостей

- Приблизим нелинейные зависимости линейными

$$\boldsymbol{t}_n = A_{n-1}\boldsymbol{t}_{n-1} + \boldsymbol{w}_n, \quad A_{n-1} = A(\boldsymbol{\mu}_{n-1}) = \left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{t}}\right|_{\boldsymbol{t}=\boldsymbol{\mu}_{n-1}}$$

$$\boldsymbol{x}_n = C_n\boldsymbol{t}_n + \boldsymbol{v}_n, \quad C_n = C(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n) = \left.\frac{\partial h}{\partial \boldsymbol{t}}\right|_{\boldsymbol{t}=\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n}$$

- Обратите внимание, что производная функции $f(\boldsymbol{t})$ берется в точке $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{\mu}_{n-1}$, а производная функции $h(\boldsymbol{t})$ — в точке $\boldsymbol{t} = \tilde{\boldsymbol{\mu}}_n$. Вопрос аудитории: почему?
- Линеаризация зависимостей позволяет использовать обычный фильтр Калмана, но с учетом того, что теперь матрицы A и C стали зависеть от времени

Расширенный фильтр Калмана

После того, как мы линеаризовали задачу, применяем фильтр Калмана

Прогноз. Оценивается распределение

$$p(\boldsymbol{t}_n|\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_{n-1}) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{t}_n|\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n, \tilde{V}_n)$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n = f(\boldsymbol{\mu}_{n-1})$$
$$\tilde{V}_n = A_{n-1}V_{n-1}A_{n-1}^T + \Gamma$$
$$\tilde{\boldsymbol{x}}_n = h(\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n)$$

Коррекция.

$$K_n = \tilde{V}_n C_n^T (C_n \tilde{V}_n C_n^T + \Sigma)^{-1} \qquad \boldsymbol{\mu}_n = \tilde{\boldsymbol{\mu}}_n + K_n(\boldsymbol{x}_n - \tilde{\boldsymbol{x}}_n)$$
$$V_n = (I - K_n C_n^T)\tilde{V}_n$$

Обычный фильтр Калмана

Сравним формулы с обычным фильтром Калмана, описанным в предыдущем разделе

Прогноз. Оценивается распределение

$$p(\boldsymbol{t}_n|\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_{n-1}) \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{t}_n|\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n,\tilde{V}_n)$$

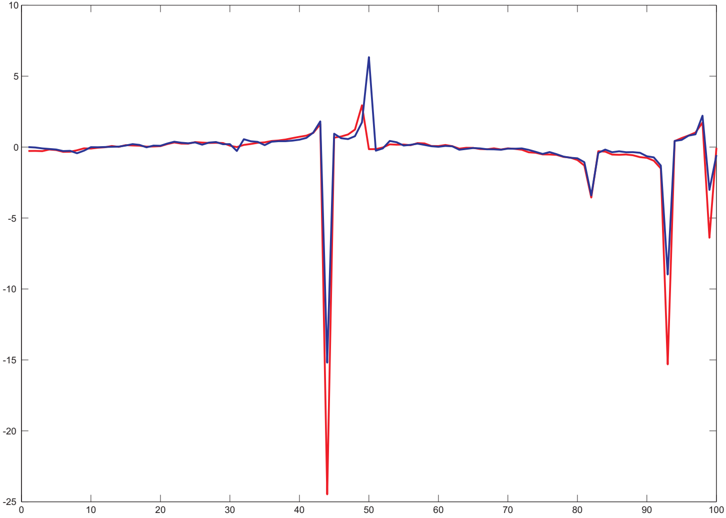
$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n &= A\boldsymbol{\mu}_{n-1}\\ \tilde{V}_n &= AV_{n-1}A^T+\Gamma\\ \tilde{\boldsymbol{x}}_n &= C\tilde{\boldsymbol{\mu}}_n\end{aligned}$$

Коррекция.

$$K_n = \tilde{V}_n C^T(C\tilde{V}_n C^T+\Sigma)^{-1} \qquad \boldsymbol{\mu}_n = \tilde{\boldsymbol{\mu}}_n + K_n(\boldsymbol{x}_n-\tilde{\boldsymbol{x}}_n)$$

$$V_n = (I-K_nC^T)\tilde{V}_n$$

Пример применения расширенного фильтра Калмана



Заключительные замечания

- Если дисперсии шумов не слишком велики (т.е. мы не слишком сильно отклоняемся от точки, в которой выполнили линеаризацию), то можно рассчитывать на адекватное приближение и успешное решение задачи фильтрации
- Если шумы негауссовы, расширенный фильтр Калмана не подходит и нужно использовать другие методы, например, фильтр частиц (см. следующую лекцию)

План лекции

EM-алгоритм. Разложение логарифма правдоподобия

Требуется найти максимум правдоподобия в вероятностной модели со скрытыми переменными:

$$p(X|\Theta) = \int p(X,T|\Theta)dT \to \max_{\Theta} \Leftrightarrow \log p(X|\Theta) \to \max_{\Theta}$$

$$p(X,T|\Theta) = p(T|X,\Theta)p(X|\Theta) \Rightarrow$$
$$\log p(X,T|\Theta) = \log p(T|X,\Theta) + \log p(X|\Theta)$$

$q(T)$ — произвольное распределение.

$$\log p(X|\Theta) = \int \log p(X|\Theta)q(T)dT =$$
$$\int \left[\log p(X,T|\Theta) - \log p(T|X,\Theta)\right] q(T)dT =$$
$$\int \log p(X,T|\Theta)q(T)dT - \int \log p(T|X,\Theta)q(T)dT =$$
$$\int \log \frac{p(X,T|\Theta)}{q(T)}q(T)dT - \int \log \frac{p(T|X,\Theta)}{q(T)}q(T)dT$$

Нижняя оценка для логарифма правдоподобия

$$\log p(X|\Theta) = \underbrace{\int \log \frac{p(X,T|\Theta)}{q(T)} q(T)dT}_{l(q,\Theta)} \underbrace{- \int \log \frac{p(T|X,\Theta)}{q(T)} q(T)dT}_{KL(q||p)\geq 0}$$

Дивергенция Кульбака-Лейблера $KL(q||p)$ определяет расстояние между вероятностными распределениями

- $KL(q||p) = -\int q(x)\log(p(x)/q(x))dx$
- $KL(q||p) \geq 0$ и $KL(q||p) = 0 \Leftrightarrow q \equiv p$.
- $KL(q||p) \neq KL(p||q)$

Тогда $l(q,\Theta)$ является нижней оценкой правдоподобия $\log p(X|\Theta)$:

$$\log p(X|\Theta) \geq l(q,\Theta) \text{ и равенство } \Leftrightarrow q(T) = p(T|X,\Theta)$$

Идея EM-алгоритма

$$\log p(X|\Theta) = l(q,\Theta) + KL(q||p)$$

Итерационная схема. Фиксируем некоторое значение Θ_{old}. Приблизим в точке Θ_{old} правдоподобие с помощью его нижней оценки:

$$q(T) = p(T|X,\Theta_{old})$$

$$\log p(X|\Theta) \geq l(q,\Theta) = \int \log p(X,T|\Theta)p(T|X,\Theta_{old})dT - \int \log p(T|X,\Theta_{old})p(T|X,\Theta_{old})dT$$

Найдем новое значение Θ с помощью максимизации нижней оценки:

$$l(q,\Theta) \to \max_{\Theta} \Leftrightarrow \mathbb{E}_{T|X,\Theta_{old}} \log p(X,T|\Theta) \to \max_{\Theta}$$

Иллюстрация EM-алгоритма

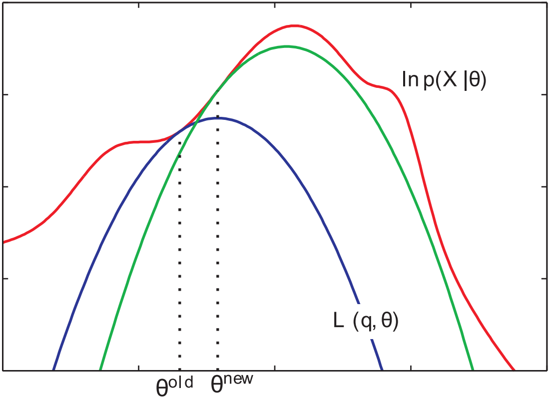


Схема ЕМ-алгоритма

- Е-шаг. Фиксируется значение параметров Θ_{old}. Оценивается апостериорное распределение на скрытые переменные $p(T|X,\Theta_{old})$, и полное правдоподобие усредняется по полученному распределению:

$$\mathbb{E}_{T|X,\Theta_{old}} \log p(X,T|\Theta) = \int \log p(X,T|\Theta)p(T|X,\Theta_{old})dT$$

- М-шаг. Фиксируется апостериорное распределение $p(T|X,\Theta_{old})$, и производится поиск новых значений параметров Θ_{new}:

$$\Theta_{new} = \arg\max_{\Theta} \mathbb{E}_{T|X,\Theta_{old}} \log p(X,T|\Theta)$$

- Шаги Е и М повторяются до сходимости.

Максимизация апостериорного распределения

Задача

$$p(\Theta|X) \to \max_{\Theta} \Leftrightarrow F = \log p(X|\Theta) + \log p(\Theta) \to \max_{\Theta}$$

Справедливо разложение

$$F = L(q, \theta) + \log p(\Theta) + KL(q||p) \geq L(q, \Theta) + \log p(\Theta)$$

Е-шаг остается без изменений.
Модификация М-шага:

$$\mathbb{E}_{T|X,\Theta_{old}} \log p(X, T|\Theta) + \log p(\Theta) \to \max_{\Theta}$$

EM-алгоритм для ЛДС

Задача - поиск значений параметров $\{A, \Gamma, C, \Sigma, \boldsymbol{\mu}_0, V_0\}$ по методу максимального правдоподобия

Логарифм полного правдоподобия

$$\log p(X, T|\Theta) = \log p(\boldsymbol{t}_1|\boldsymbol{\mu}_0, V_0) + \sum_{n=2}^{N} \log p(\boldsymbol{t}_n|\boldsymbol{t}_{n-1}, A, \Gamma) + \sum_{n=1}^{N} \log p(\boldsymbol{x}_n|\boldsymbol{t}_n, C, \Sigma)$$

Для вычисления нижней оценки

$$Q(\Theta, \Theta_{old}) = \mathbb{E}_{T|X,\Theta_{old}} \log p(X, T|\Theta)$$

достаточно знать следующие величины:

$$\mathbb{E}\boldsymbol{t}_n = \hat{\boldsymbol{\mu}}_n$$
$$\mathbb{E}\boldsymbol{t}_n\boldsymbol{t}_{n-1}^T = J_{n-1}\hat{V}_n + \hat{\boldsymbol{\mu}}_n\hat{\boldsymbol{\mu}}_{n-1}^T$$
$$\mathbb{E}\boldsymbol{t}_n\boldsymbol{t}_n^T = \hat{V}_n + \hat{\boldsymbol{\mu}}_n\hat{\boldsymbol{\mu}}_n^T$$

M-шаг. Формулы для $\boldsymbol{\mu}_0$ и V_0

$$Q(\Theta, \Theta_{old}) = -\frac{1}{2}\log\det V_0 - \mathbb{E}_{T|X,\Theta_{old}}\left[\frac{1}{2}(\boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)^T V_0^{-1}(\boldsymbol{t}_1 - \boldsymbol{\mu}_0)\right] + \mathrm{const}$$

Здесь const не зависит от $\boldsymbol{\mu}_0$ и V_0.
Приравнивая производные по $\boldsymbol{\mu}_0$ и V_0 к нулю, получаем:

$$\boldsymbol{\mu}_0^{new} = \mathbb{E}\boldsymbol{t}_1$$
$$V_0^{new} = \mathbb{E}\boldsymbol{t}_1\boldsymbol{t}_1^T - \mathbb{E}\boldsymbol{t}_1\mathbb{E}\boldsymbol{t}_1^T$$

М-шаг. Формулы для A и Γ

$$Q(\Theta, \Theta_{old}) = -\frac{N-1}{2}\log\det\Gamma - \mathbb{E}_{T|X,\Theta_{old}}\left[\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N}(\boldsymbol{t}_n - A\boldsymbol{t}_{n-1})^T\Gamma^{-1}(\boldsymbol{t}_n - A\boldsymbol{t}_{n-1})\right] + \mathrm{const}$$

Здесь const не зависит от A и Γ.
Приравнивая производные по A и Γ к нулю, получаем:

$$A^{new} = \left(\sum_{n=2}^{N}\mathbb{E}\boldsymbol{t}_n\boldsymbol{t}_{n-1}^T\right)\left(\sum_{n=2}^{N}\mathbb{E}\boldsymbol{t}_{n-1}\boldsymbol{t}_{n-1}^T\right)^{-1}$$

$$\Gamma^{new} = \frac{1}{N-1}\sum_{n=2}^{N}\Big\{\mathbb{E}\boldsymbol{t}_n\boldsymbol{t}_n^T - A^{new}\mathbb{E}\boldsymbol{t}_{n-1}\boldsymbol{t}_n^T - \mathbb{E}\boldsymbol{t}_n\boldsymbol{t}_{n-1}^T(A^{new})^T + A^{new}\mathbb{E}\boldsymbol{t}_{n-1}\boldsymbol{t}_{n-1}^T(A^{new})^T\Big\}$$

М-шаг. Формулы для C и Σ

$$Q(\Theta, \Theta_{old}) = -\frac{N}{2}\log\det\Sigma - \mathbb{E}_{T|X,\Theta_{old}}\left[\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}(\boldsymbol{x}_n - C\boldsymbol{t}_n)^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{x}_n - C\boldsymbol{t}_n)\right] + \mathrm{const}$$

Здесь const не зависит от C и Σ.

Приравнивая производные по C и Σ к нулю, получаем:

$$C^{new} = \left(\sum_{n=1}^{N}\boldsymbol{x}_n\mathbb{E}\boldsymbol{t}_n^T\right)\left(\sum_{n=1}^{N}\mathbb{E}\boldsymbol{t}_n\boldsymbol{t}_n^T\right)^{-1}$$

$$\Sigma^{new} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Big\{\boldsymbol{x}_n\boldsymbol{x}_n^T - C^{new}\mathbb{E}\boldsymbol{t}_n\boldsymbol{x}_n^T - \boldsymbol{x}_n\mathbb{E}\boldsymbol{t}_n^T(C^{new})^T + C^{new}\mathbb{E}\boldsymbol{t}_n\boldsymbol{t}_n^T(C^{new})^T\Big\}$$