



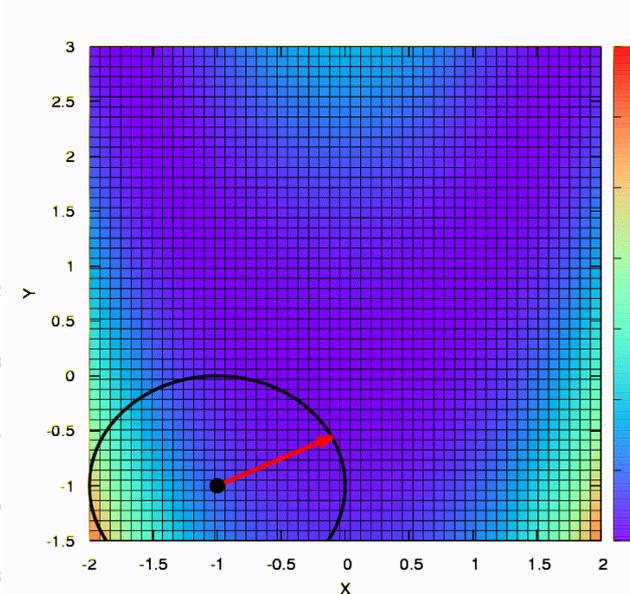
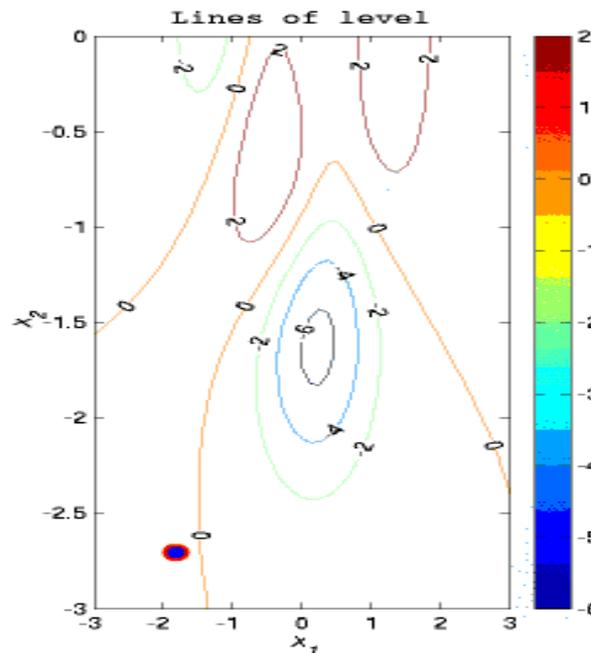
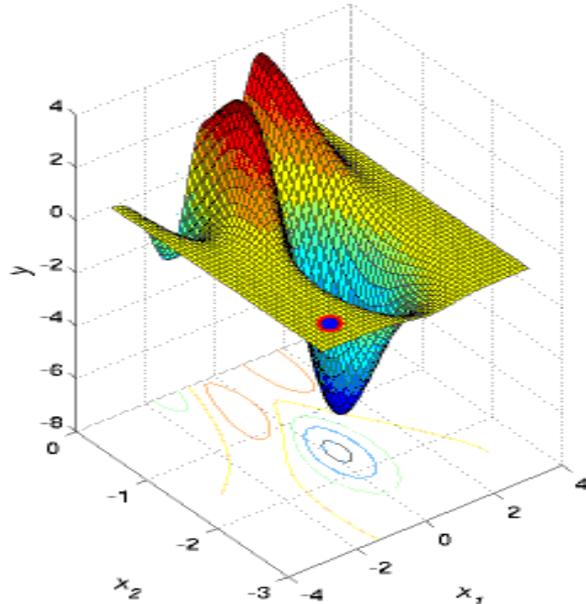
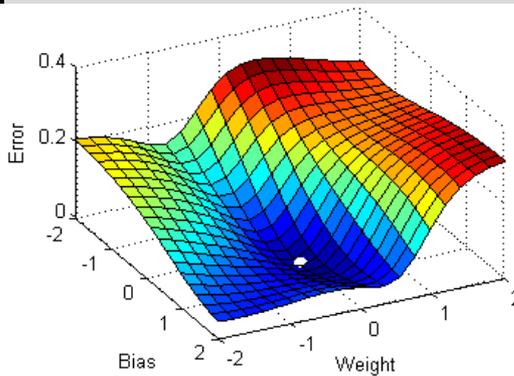
МЕТОД ГРАДИЕНТНОГО СПУСКА НА ОСНОВЕ МНОГОМЕРНЫХ ВОКСЕЛЬНЫХ ОБРАЗОВ

... нет такой воды, которая не стремилась бы [течь] вниз.

Мэн-цзы

Качество решения такой задачи непосредственно зависит от шага дискретизации входных данных о поверхности рельефа.

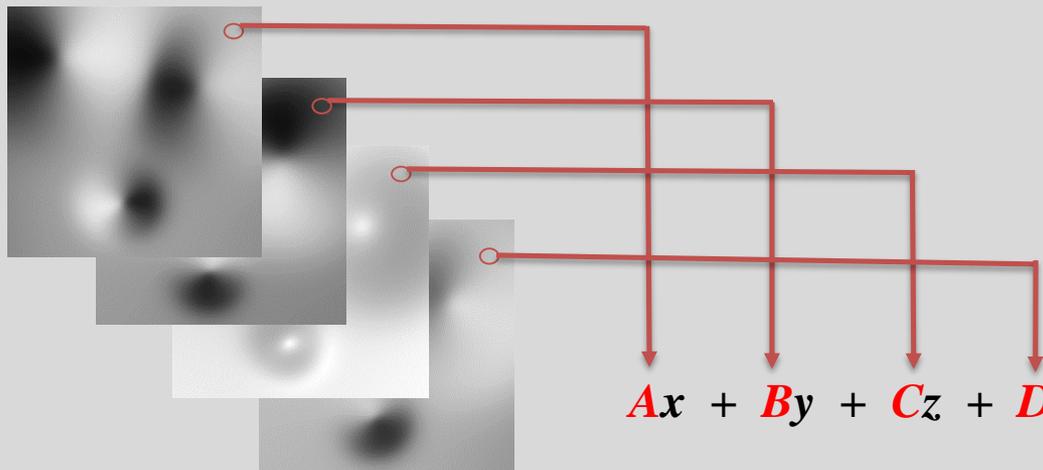
1





Метод функционально-воксельного моделирования ФВМ

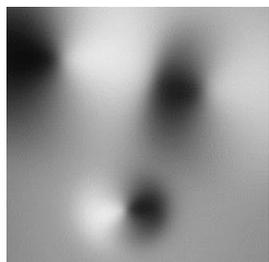
2



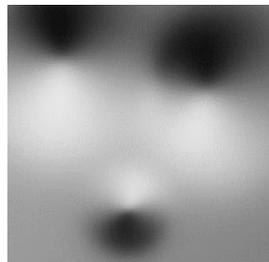
ФВ-модель позволяет на локальном уровне и просто выразить любой аргумент через остальные. Это свойство приводит к простому линейному выражению функции в отдельно взятой точке.

$$Ax + By + Cz + D = 0; \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{A}{C}x - \frac{B}{C}y - \frac{D}{C};$$

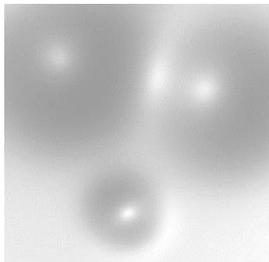
$$z = 0.75e^{\frac{-(9x-2)^2+(9y-2)^2}{4}} + 0.75e^{\frac{(9x+1)^2+9y+1}{-49} + \frac{9y+1}{10}} - 0.2e^{-(9x-4)^2-(9y-7)^2} + 0.5e^{\frac{-(9x-7)^2+(9y-3)^2}{4}}$$



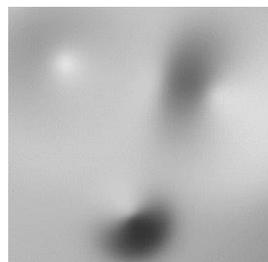
$\text{Cos} \alpha_4$



$\text{Cos} \beta_4$

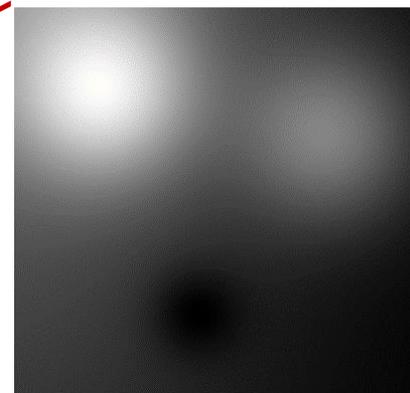


$\text{Cos} \gamma_4$



$\text{Cos} \delta_4$

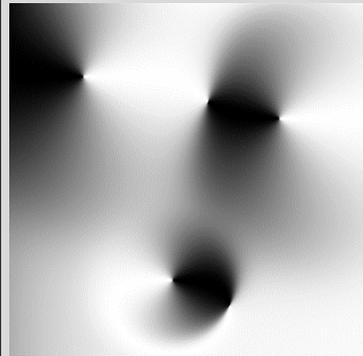
Экспоненциальная
функция



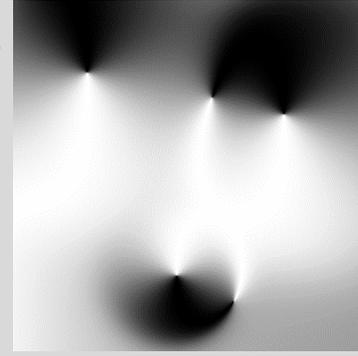
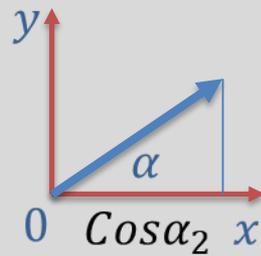
Градиентный спуск на основе метода функционально-воксельного моделирования ФВМ

3

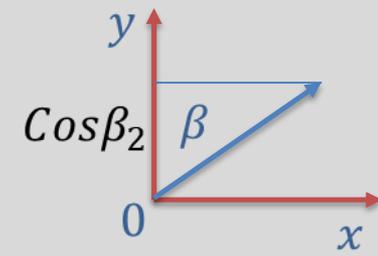
Получение компонентов нормали в плоскости xOy



$$\text{Cos}\alpha_2 = \frac{\text{Cos}\alpha_4}{\sqrt{\text{Cos}\alpha_4^2 + \text{Cos}\beta_4^2}}$$

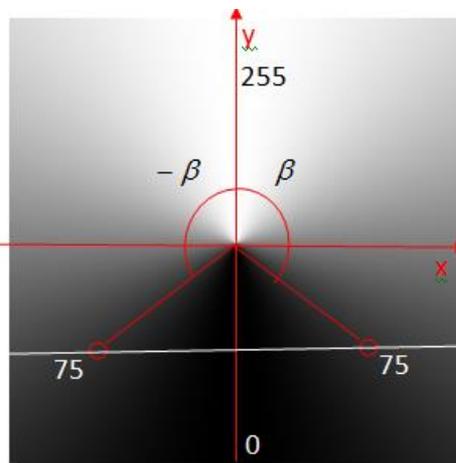
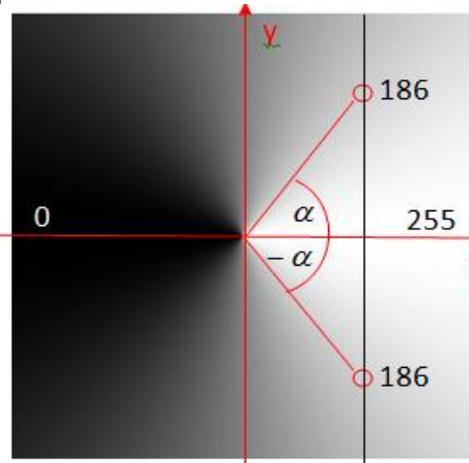


$$\text{Cos}\beta_2 = \frac{\text{Cos}\beta_4}{\sqrt{\text{Cos}\alpha_4^2 + \text{Cos}\beta_4^2}}$$

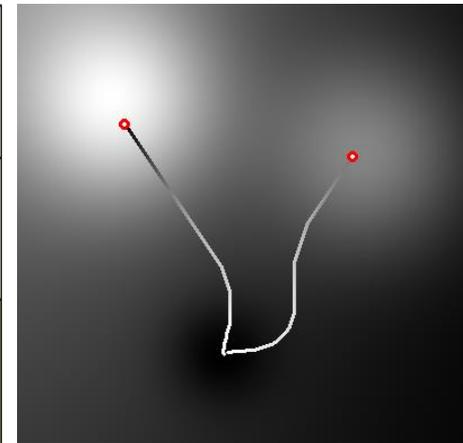


Точка с характеристиками (186,75)

Пример градиентного спуска



$C_{xy}^{II}(i-1, j-1)$	$C_{xy}^{II}(i, j-1)$	$C_{xy}^{II}(i+1, j-1)$
$C_{xy}^{II}(i-1, j)$	$C_{xy}^{II}(i, j)$	$C_{xy}^{II}(i+1, j)$
$C_{xy}^{II}(i-1, j+1)$	$C_{xy}^{II}(i, j+1)$	$C_{xy}^{II}(i+1, j+1)$





Градиентный спуск в трёхмерном пространстве

4

Локальная функция переходит в новое пространство

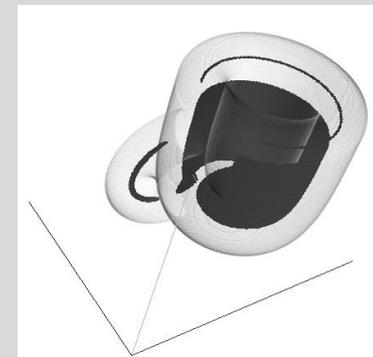
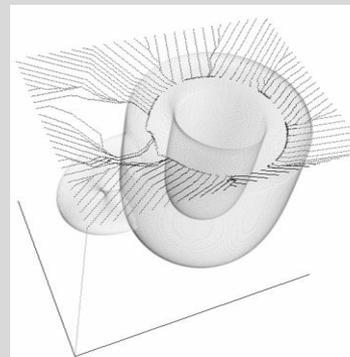
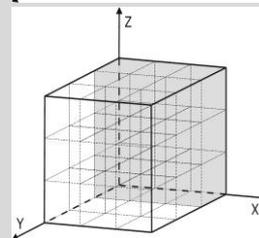
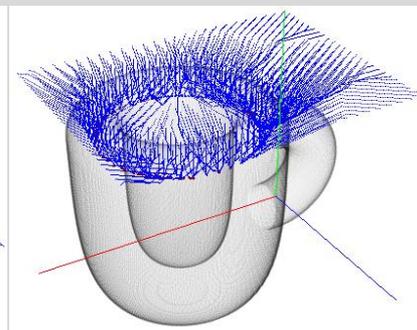
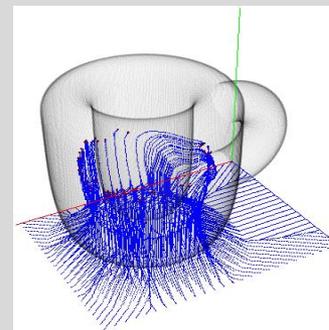
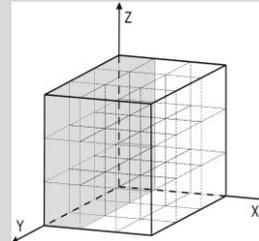
$$\text{Cos}\alpha_5 x + \text{Cos}\beta_5 y + \text{Cos}\gamma_5 z + \text{Cos}\delta_5 t + \text{Cos}\varepsilon_5 = 0$$

Получение компонентов нормали в пространстве **Oxyz**

$$\text{Cos}\alpha_3 = \frac{\text{Cos}\alpha_5}{\sqrt{\text{Cos}\alpha_5^2 + \text{Cos}\beta_5^2 + \text{Cos}\gamma_5^2}}$$

$$\text{Cos}\beta_3 = \frac{\text{Cos}\beta_5}{\sqrt{\text{Cos}\alpha_5^2 + \text{Cos}\beta_5^2 + \text{Cos}\gamma_5^2}}$$

$$\text{Cos}\gamma_3 = \frac{\text{Cos}\gamma_5}{\sqrt{\text{Cos}\alpha_5^2 + \text{Cos}\beta_5^2 + \text{Cos}\gamma_5^2}}$$



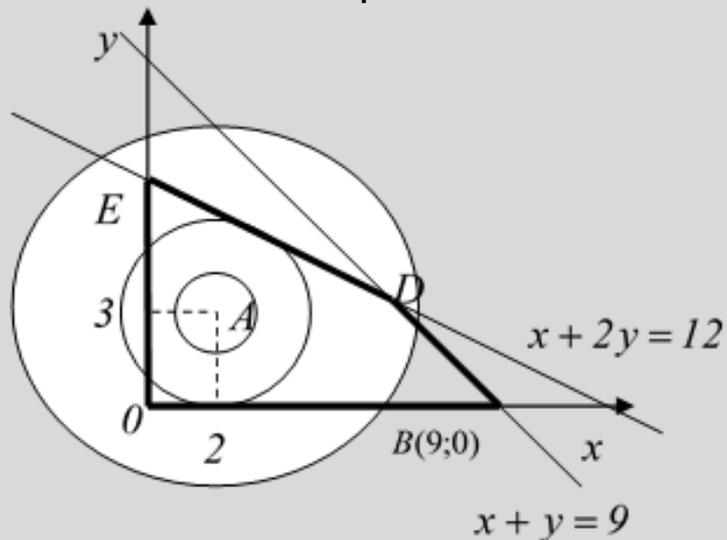


Решение задачи математического программирования

Задача 1. Найти глобальные экстремумы функции

$$F = (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \rightarrow \min/\max$$

на множестве решений системы



$$\begin{cases} x + 2y \leq 12 \\ x + y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Линии уровня $F = \text{const}$ представляют собой окружности с центром в точке $A(2; 3)$ и радиусом $r = \sqrt{c}$. Из рисунка 5.1.2.1 видно, что $F_{\min} = 0$ достигается в точке $A(2; 3)$, F_{\max} - в точке $B(9; 0)$.

Рис.5.1.2.1. Графическое представление задачи



Решение задачи математического программирования

6

Промоделируем решение такой задачи методом ФВМ, используя аппарат R-функций. Представим многоугольник допустимых планов в виде пересечения функций-предикатов

$$w_1 = -(x + 2y - 12);$$

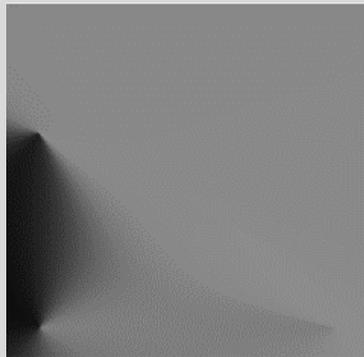
$$w_2 = -(x + y - 9);$$

$$w_3 = x;$$

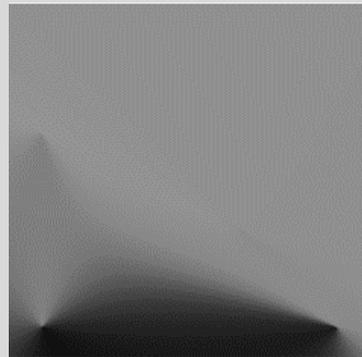
$$w_4 = y;$$

$$W = w_1 \cap w_2 \cap w_3 \cap w_4$$

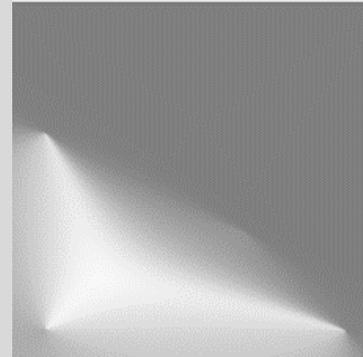
Результат ФВМ-представления поверхности показан на рисунке



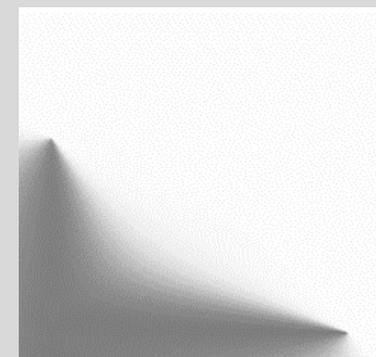
$\text{Cos} \alpha_4$



$\text{Cos} \beta_4$



$\text{Cos} \gamma_4$



$\text{Cos} \delta_4$



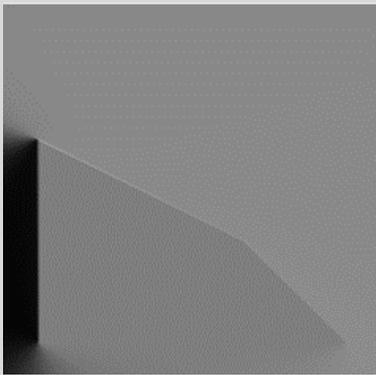
Решение задачи математического программирования

7

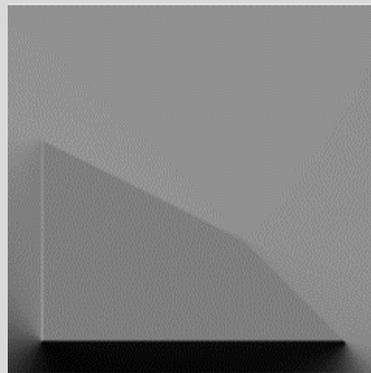
Присутствующие положительные значения внутри области w создают проблему применения данного подхода в исследовании заданной целевой функции F , описанной в том же пространстве E^n . Для помещения функции F в область w необходимо предварительно обнулить положительные значения внутри области w .

$$w_0 = w - |w|$$

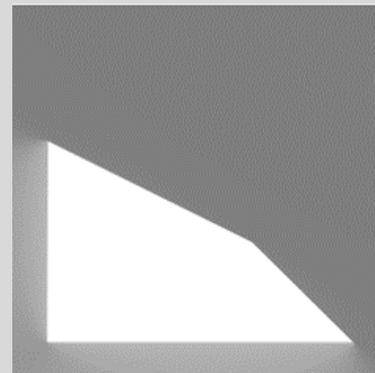
При этом положительная область значений w обнуляется, а отрицательная область обретает более выраженное убывание значений.



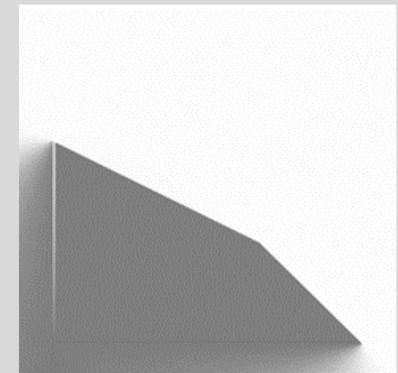
$\text{Cos} \alpha_4$



$\text{Cos} \beta_4$



$\text{Cos} \gamma_4$



$\text{Cos} \delta_4$



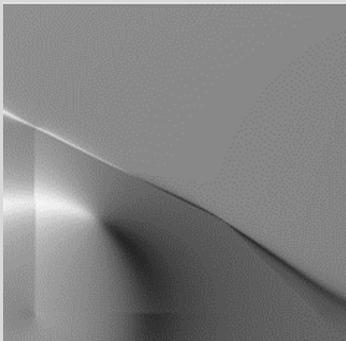
Решение задачи математического программирования

8

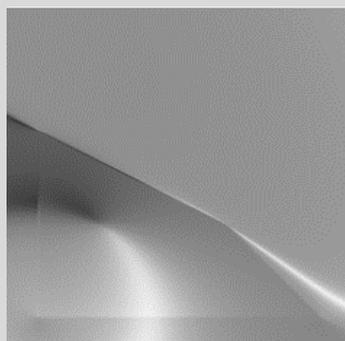
Сложение пространства целевой функции F с пространством области ограничений позволяет получить общее пространство искомой функции

$$F_w = F + w_0$$

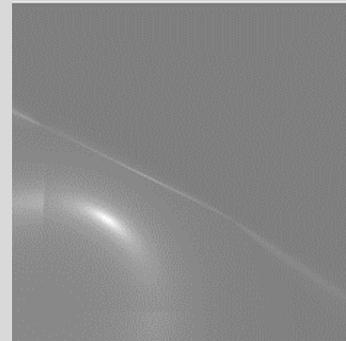
где значения целевой функции F сохранятся на области ограничений w , а на её границе образуется излом, позволяющий определять экстремальные точки, попадающие на границу области w



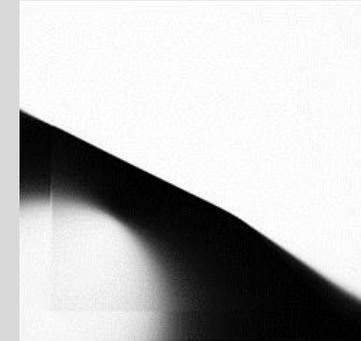
$\text{Cos} \alpha_4$



$\text{Cos} \beta_4$



$\text{Cos} \gamma_4$



$\text{Cos} \delta_4$



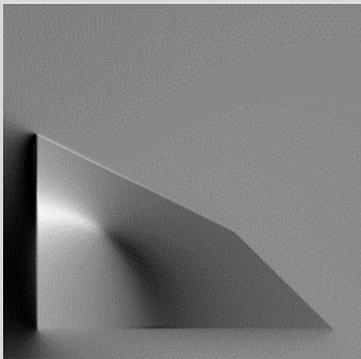
Решение задачи математического программирования

9

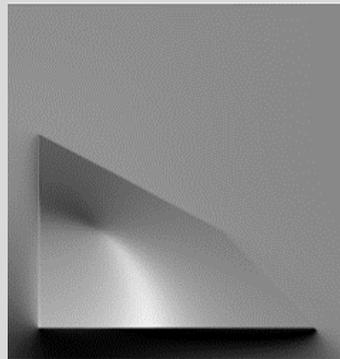
Учитывая возможность негативного влияния формы поверхности F на форму поверхности w_0 , добавим корректирующий элемент $(1 + |F|)$, тогда получим окончательный вид функции

$$\begin{cases} F_w = F + w_0 \cdot (1 + |F|) \rightarrow \max \\ F_w = F + |w_0 \cdot (1 + |F|)| \rightarrow \min \end{cases}$$

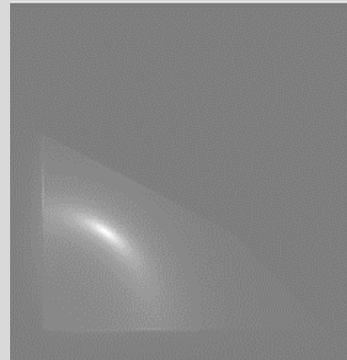
где F - целевая функция; где - целевая функция; - обнулённая область допустимых планов. w_0 - обнулённая область допустимых планов.



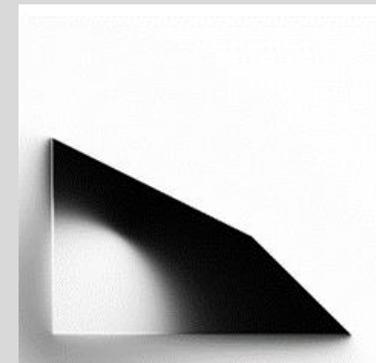
$\text{Cos} \alpha_4$



$\text{Cos} \beta_4$



$\text{Cos} \gamma_4$

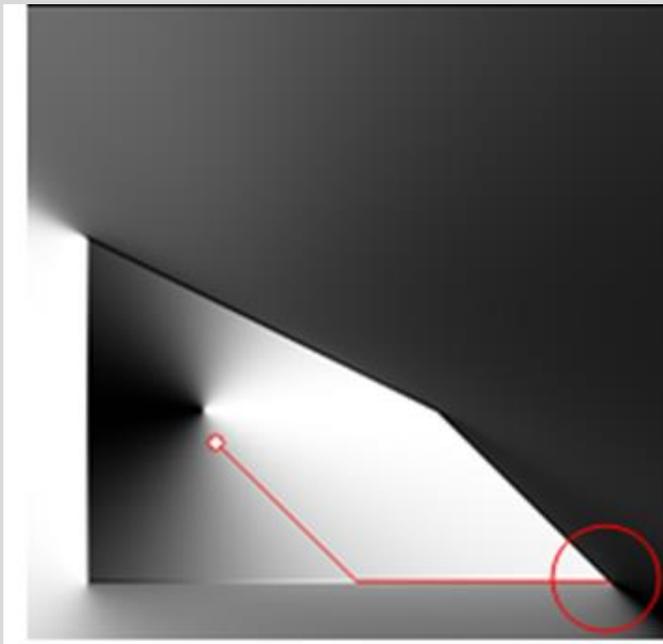


$\text{Cos} \delta_4$

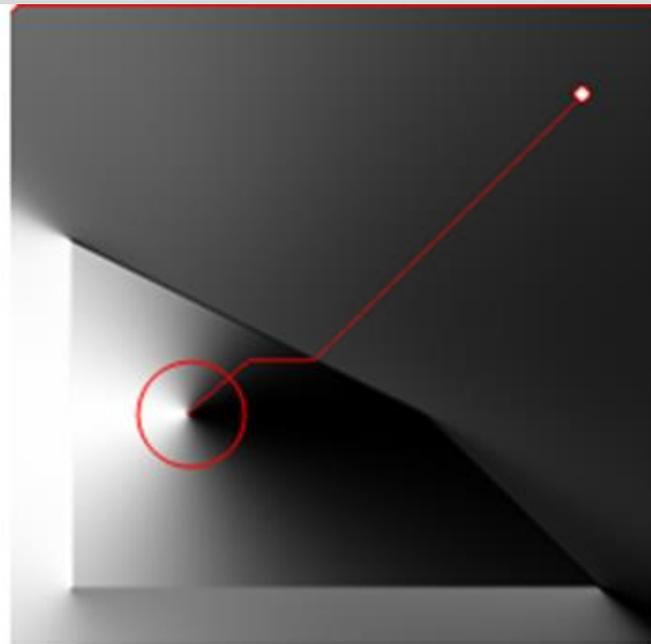


Решение задачи математического программирования 10

На рисунках показаны результирующие M-образы $Cos\alpha_2$ и $Cos\alpha_2^{inv}$ для минимизации и максимизации функции F_w соответственно с выделенными экстремальными точками на её поверхности, сохраняющей свои значения в многоугольнике допустимых планов. Центр окружности показывает глобальные экстремумы, полученные путём перебора значений функции $F_w \rightarrow \min/\max$ для полученного множества экстремальных точек, определяемых градиентным спуском (ломаная линия).



$Cos\alpha_2$



$Cos\alpha_2^{inv}$

Некоторые примеры приложения метода

11

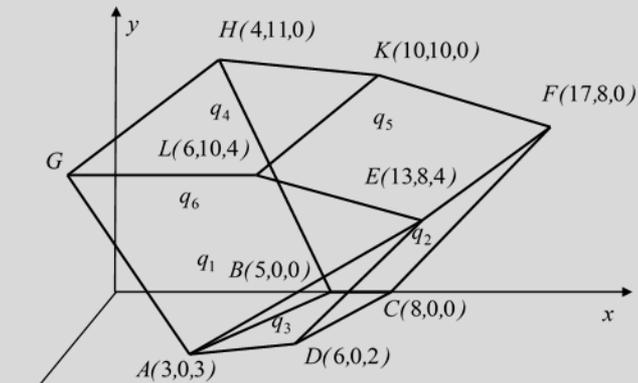
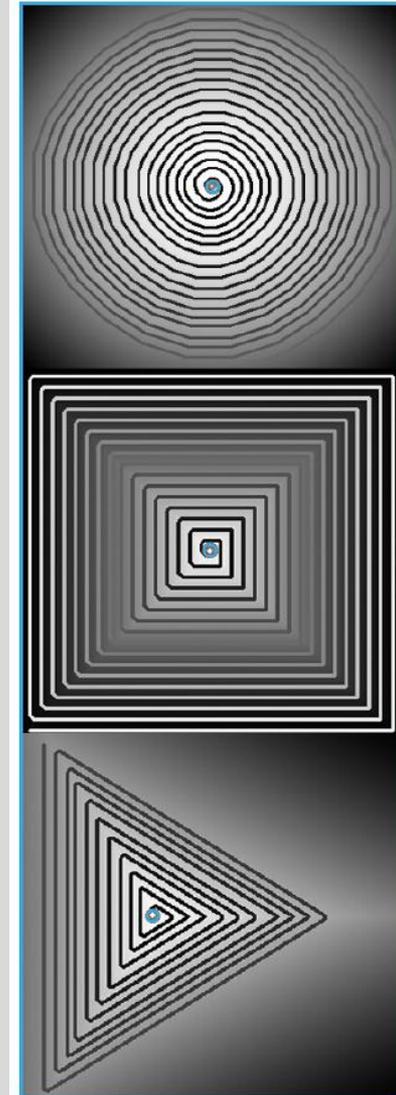
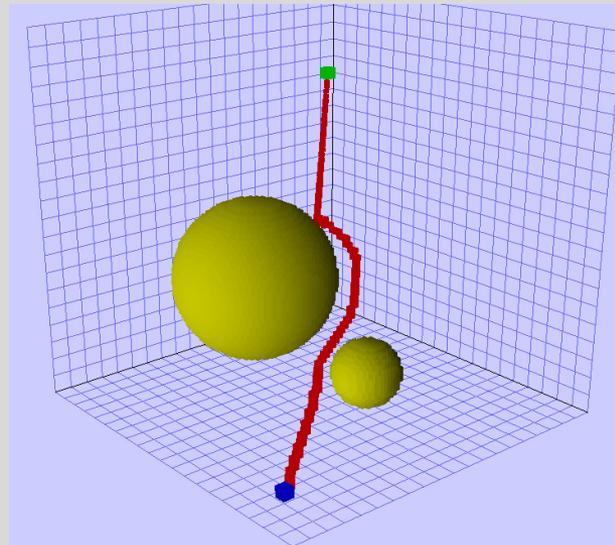
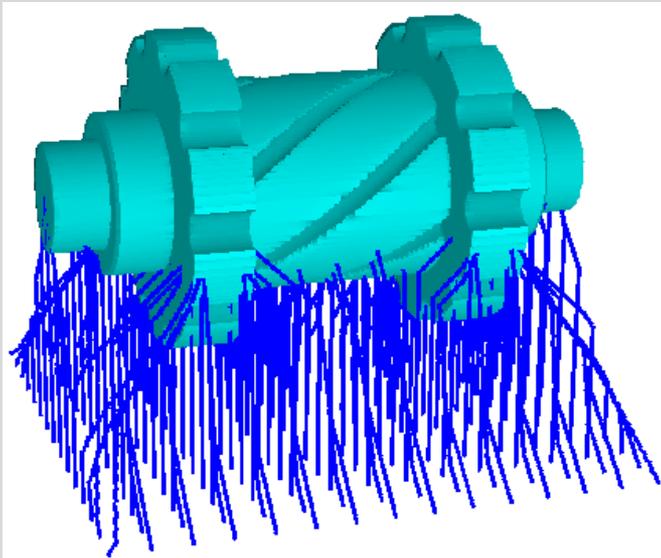
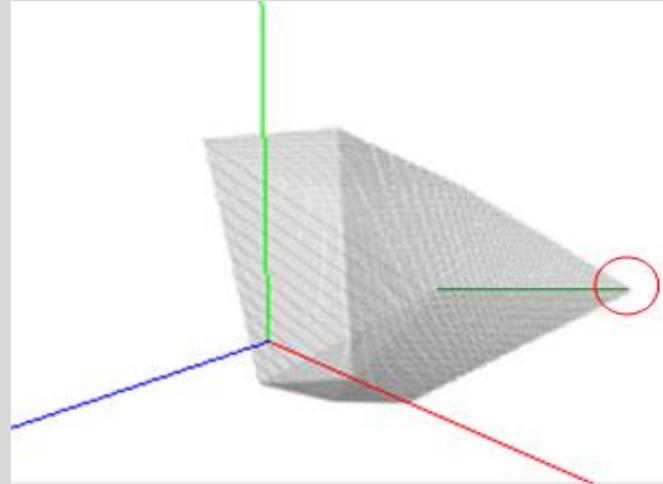


Рис.5.1.1.1. Многогранник допустимых решений





Спасибо за внимание!

12

Докладчик
Толок Алексей Вячеславович