

# **Теория нечётких множеств**

**Дьяконов А.Г.**

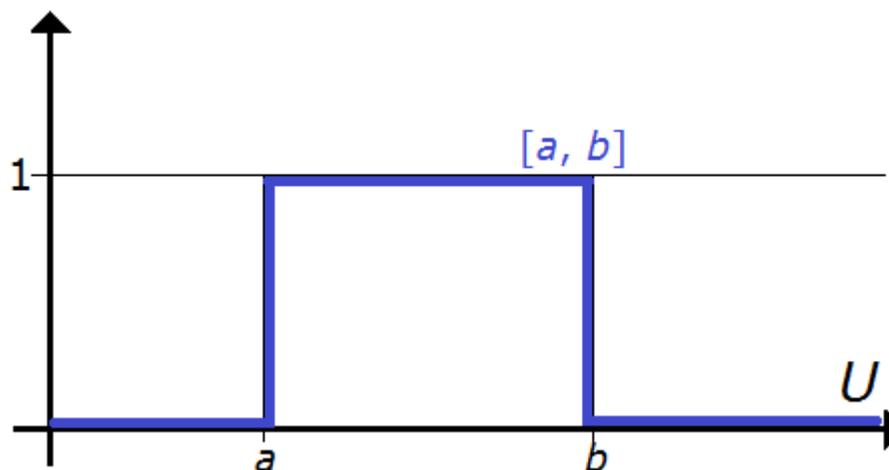
**Московский государственный университет  
имени М.В. Ломоносова (Москва, Россия)**

## Обычное множество

### Характеристическая функция обычного чёткого множества

$$h_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

**Где определена?**  
(универсальное множество)



**А если будет принимать значения из  $[0, 1]$ ?**

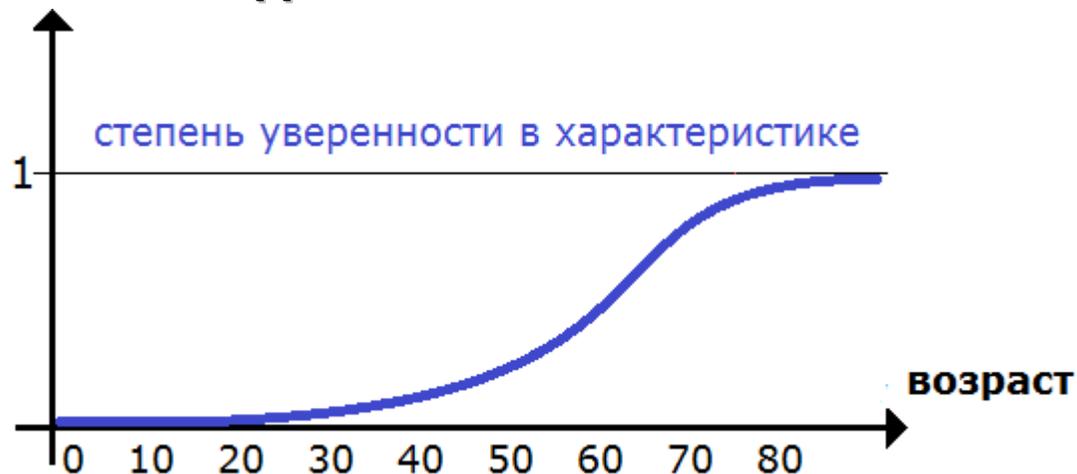
## Зачем нужны нечёткие множества?

### История со свидетелями...

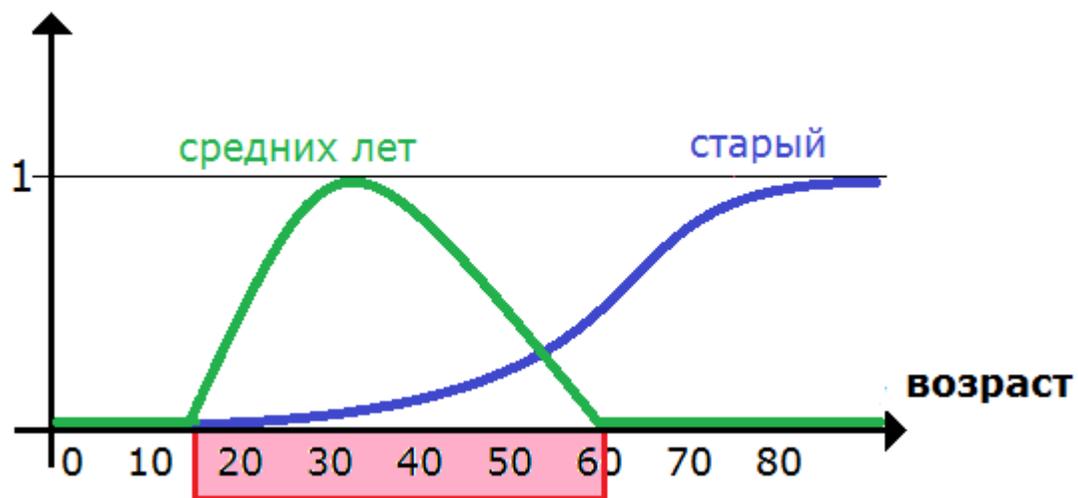
#### Понятие «пожилой»



#### Выход – нечёткое множество



## Можно пересекать «разные» понятия



**Как?**

**Почему это не вероятность?**

## Нечёткий поиск

<b>Nissan X-Trail II</b>	<b>2.5 CVT</b>	<b>169 л.с.</b>	<b>650 000 Р</b>	<b>155 000 км</b>
<b>Nissan Murano II (Z51)</b>	<b>3.5 CVT</b>	<b>249 л.с.</b>	<b>1 150 000 Р</b>	<b>28 000 км</b>
<b>Nissan Qashqai I</b>	<b>2.0 CVT</b>	<b>141 л.с.</b>	<b>780 000 Р</b>	<b>84 000 км</b>

**Запрос «Nissan Micra III 1.4 AT (88 л.с.) бензин, передний, 80 000 Р, 2010, 39 000 км, Белый Хэтчбек 5 дв. Москва»**

**Результат: нет**

**Но в базе есть**

<b>Nissan Micra III</b>	<b>1.4 AT</b>	<b>88 л.с.</b>	<b>85 000 Р</b>	<b>35 000 км</b>
<b>Nissan Micra III</b>	<b>1.4 AT</b>	<b>88 л.с.</b>	<b>80 000 Р</b>	<b>40 000 км</b>

Результатов: примерно 3 120 000 (0,37 сек.)

### Fuzzy set - Wikipedia, the free encyclopedia

[https://en.wikipedia.org/wiki/Fuzzy\\_set](https://en.wikipedia.org/wiki/Fuzzy_set) ▾ Перевести эту страницу

In mathematics, **fuzzy sets** are sets whose elements have degrees of membership. **Fuzzy sets** were introduced by Lotfi A. Zadeh and Dieter Klaua in 1965 as an ...

Definition - Fuzzy logic - Fuzzy number - Fuzzy interval

### Fuzzy Sets

<https://www.calvin.edu/.../Fuzzy/fuzzysets.htm> ▾ Перевести эту страницу

Defining **Fuzzy Sets**. In mathematics a set, by definition, is a collection of things that belong to some definition. Any item either belongs to that set or does not ...

### Fuzzy Sets and Operations

[www.doc.ic.ac.uk/~nd/.../report.fuzzysets.html](http://www.doc.ic.ac.uk/~nd/.../report.fuzzysets.html) ▾ Перевести эту страницу

**Fuzzy Set Theory** was formalised by Professor Lotfi Zadeh at the University of California in 1965. What Zadeh proposed is very much a paradigm shift that first ...

Результатов: примерно 436 000 (0,26 сек.)

### Gradient boosting - Wikipedia, the free encyclopedia

[https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient\\_boosting](https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient_boosting) ▾ Перевести эту страницу

**Gradient boosting** is a machine learning technique for regression and classification problems, which produces a prediction model in the form of an ensemble of ...

Informal introduction - Algorithm - Gradient tree boosting - Regularization

### 1.11. Ensemble methods — scikit-learn 0.17 documentation

[scikit-learn.org/stable/modules/ensemble.html](http://scikit-learn.org/stable/modules/ensemble.html) ▾ Перевести эту страницу

GradientBoostingClassifier supports both binary and multi-class classification. The following example shows how to fit a gradient boosting classifier with 100 ...

### 3.2.4.3.5. sklearn.ensemble.GradientBoostingClassifier ...

[scikit-learn.org/.../sklearn.ensemble.GradientBo...](http://scikit-learn.org/.../sklearn.ensemble.GradientBo...) ▾ Перевести эту страницу

The fraction of samples to be used for fitting the individual base learners. If smaller than 1.0 this results in Stochastic Gradient Boosting. subsample interacts with ...

Результатов: примерно 6 580 000 (0,22 сек.)

### Нечёткая логика — Википедия

[https://ru.wikipedia.org/wiki/Нечёткая\\_логика](https://ru.wikipedia.org/wiki/Нечёткая_логика) ▾

**Нечёткая логика** (англ. **fuzzy logic**) — раздел математики, являющийся обобщением классической логики и теории множеств, базирующийся на понятии ...

Направления исследований ... - Математические основы - Примечания

### Fuzzy logic - Wikipedia, the free encyclopedia

[https://en.wikipedia.org/wiki/Fuzzy\\_logic](https://en.wikipedia.org/wiki/Fuzzy_logic) ▾ Перевести эту страницу

**Fuzzy logic** is a form of many-valued logic in which the truth values of variables may be any real number between 0 and 1. By contrast, in Boolean logic, the truth ...

### Fuzzy Logic Toolbox - Проектирование систем управления

[matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/](http://matlab.exponenta.ru/fuzzylogic/) ▾

**Fuzzy Logic Toolbox** обладает простым и хорошо продуманным интерфейсом, позволяющим легко проектировать и диагностировать нечеткие модели.

Результатов: примерно 5 920 000 (0,48 сек.)

### Logistic regression - Wikipedia, the free encyclopedia

[https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic\\_regression](https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_regression) ▾ Перевести эту страницу

In statistics, **logistic regression**, or **logit regression**, or **logit model** is a regression model where the dependent variable (DV) is categorical. This article covers the ...

Multinomial logistic regression - Probit model - Discrete choice - Ordered logit

### sklearn.linear\_model.LogisticRegression — scikit-learn 0.17 ...

[scikit-learn.org/.../sklearn.linear\\_model.Logistic...](http://scikit-learn.org/.../sklearn.linear_model.Logistic...) ▾ Перевести эту страницу

This class implements regularized logistic regression using the liblinear library, newton-cg and lbfgs solvers. It can handle both dense and sparse input.

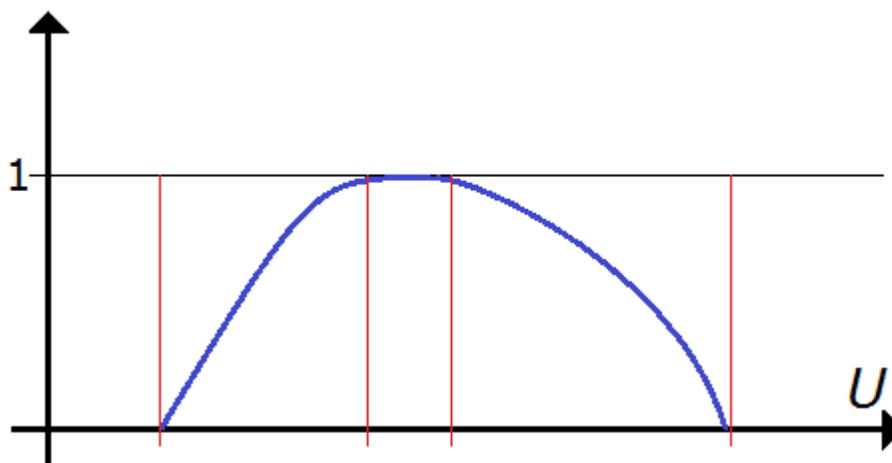
### <sup>[PDF]</sup> Logistic Regression - CMU Statistics

[www.stat.cmu.edu/~cshalizi/uADA/.../ch12.pdf](http://www.stat.cmu.edu/~cshalizi/uADA/.../ch12.pdf) ▾ Перевести эту страницу

Chapter 12. Logistic Regression. 12.1 Modeling Conditional Probabilities. So far, we either looked at estimating the conditional expectations of continuous.

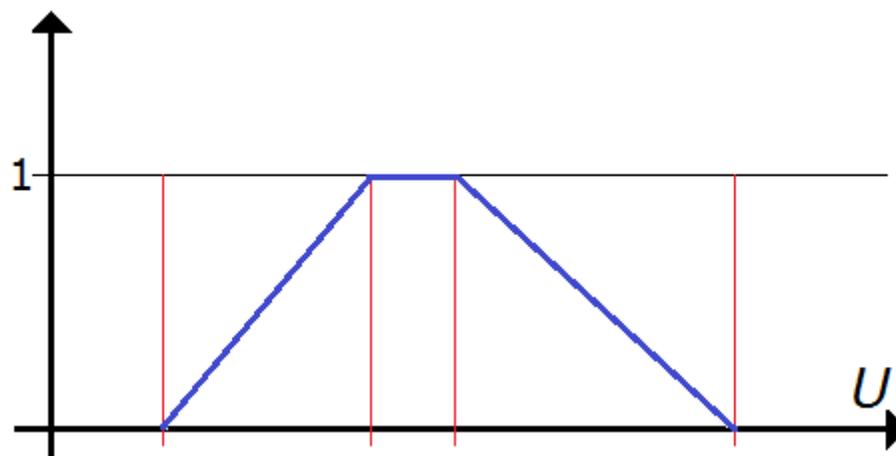
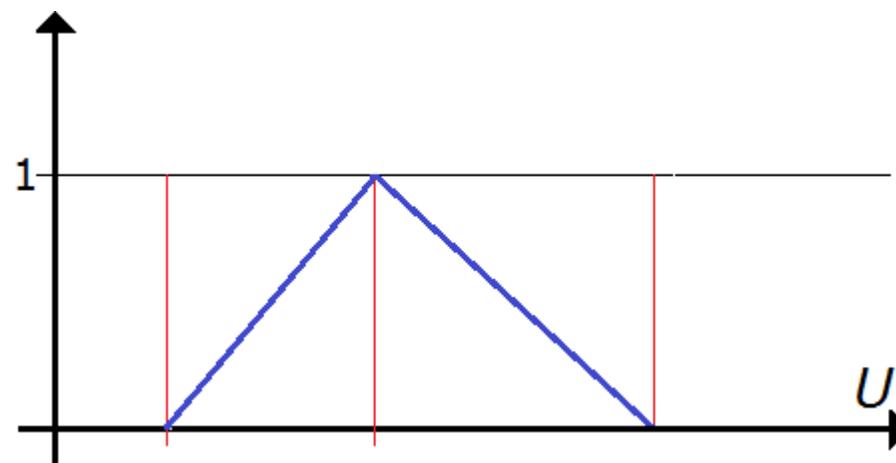
## Определение

Пусть задано множество  $U$  (базовое множество) и функция  $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$  (степень принадлежности), тогда **нечётким (размытым) подмножеством**  $A$  называется график  $\{(u, \mu_A(u)) \mid u \in U\}$

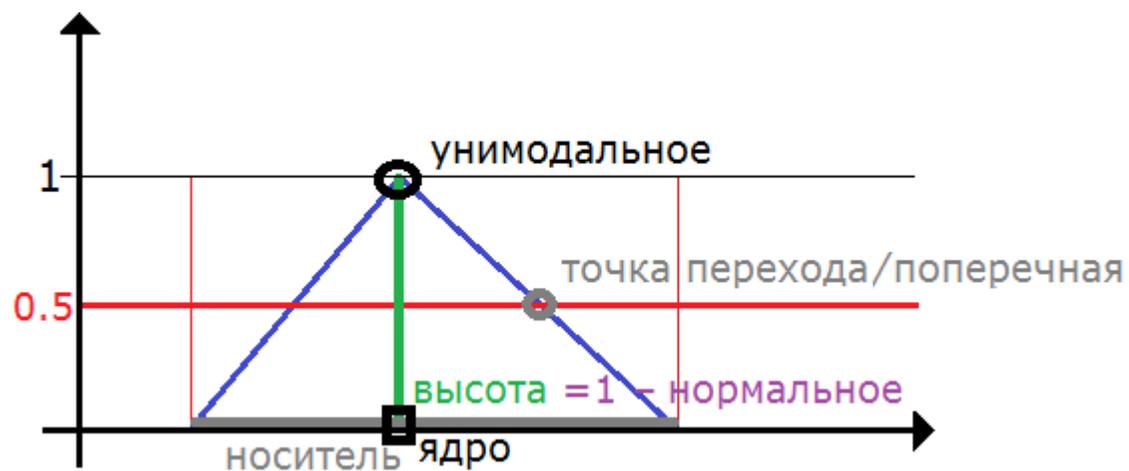


**Множество (L-R)-типа**

**Нечётких подмножеств множества больше, чем чётких!**

**Трапецеидальное нечёткое множество****Треугольное нечёткое множество**

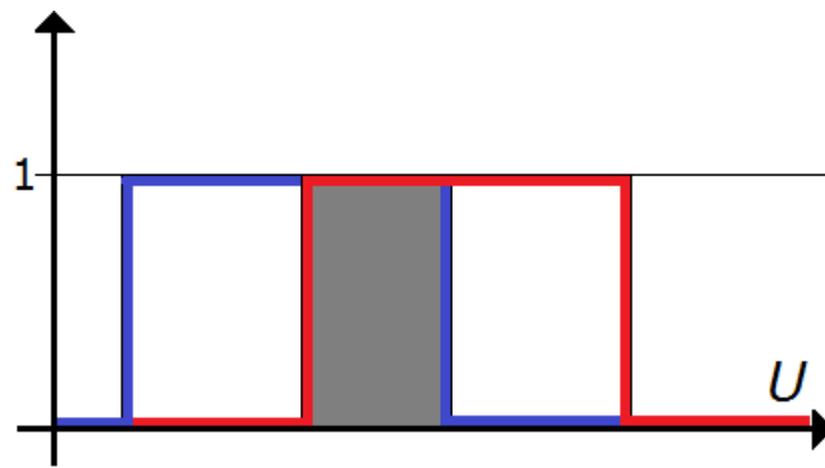
## Основные понятия



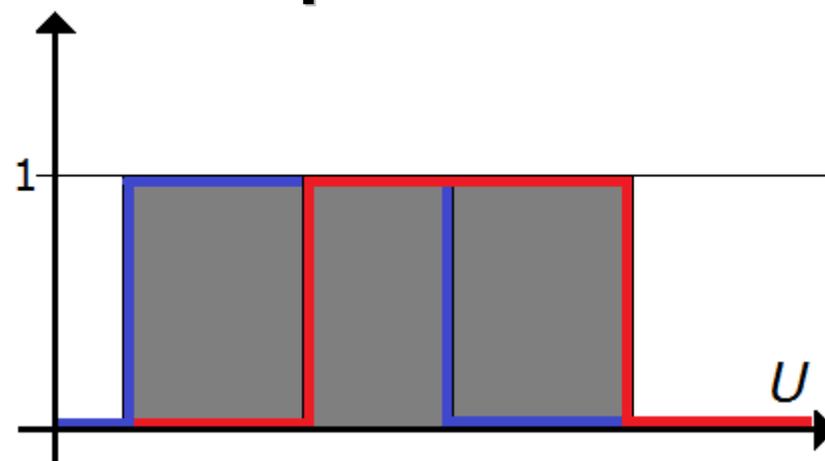
## Операции

<b>равенство</b>	$A = B \Leftrightarrow \mu_A = \mu_B$
<b>включение</b>	$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A \leq \mu_B$
<b>дополнение</b>	$A = \bar{B} \Leftrightarrow \mu_A = 1 - \mu_B$
<b>пересечение</b>	$\mu_{A \cap B} = \min[\mu_A, \mu_B]$
<b>объединение</b>	$\mu_{A \cup B} = \max[\mu_A, \mu_B]$
<b>алгебраическое произведение</b>	$\mu_{A * B} = \mu_A \cdot \mu_B$
<b>алгебраическая сумма</b>	$\mu_{A + B} = \mu_A + \mu_B - \mu_A \cdot \mu_B$
<b>пустое и универсальное множества</b>	$\mu_{\emptyset} = 0, \mu_U = 1$

## При замене функции принадлежности на характеристическую – аналогичные операции в теории множеств



**Пересечение**



**Объединение**

## Алгебра – множество с введёнными на нём операциями

$$\langle P(U); \neg, \cap, \cup \rangle$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \cup B = B \cup A$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

$$\neg(\neg A) = A$$

**Как называются свойства операций?**

$$\langle P(U); \neg, \cap, \cup \rangle$$

$$A \cap B = B \cap A$$

**коммутативность**

$$A \cup B = B \cup A$$

**коммутативность**

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

**ассоциативность**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

**ассоциативность**

$$A \cap A = A$$

**идемпотентность**

$$A \cup A = A$$

**идемпотентность**

$$\neg(\neg A) = A$$

**инволюция**

## Задача 1

**Какие из равенств всегда выполняются?**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\neg(A \cap B) = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap U = A$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cup (\neg A) = U$$

$$A \cap (\neg A) = \emptyset$$

**Решения задач – в конце слайдов**

**Но практически всё выполнено!**

**Для  $\langle P(U); \neg, *, + \rangle$  всё почти аналогично!**

**Проверить!**

**Нет только дистрибутивности и идемпотентности**

$$A * (B + C) \neq (A * B) + (A * C)$$

**Таким образом, пересечения и объединения можно вводить по-разному... но способов ещё больше!**

## Пересечение можно вводить по разному!

### T-нормы

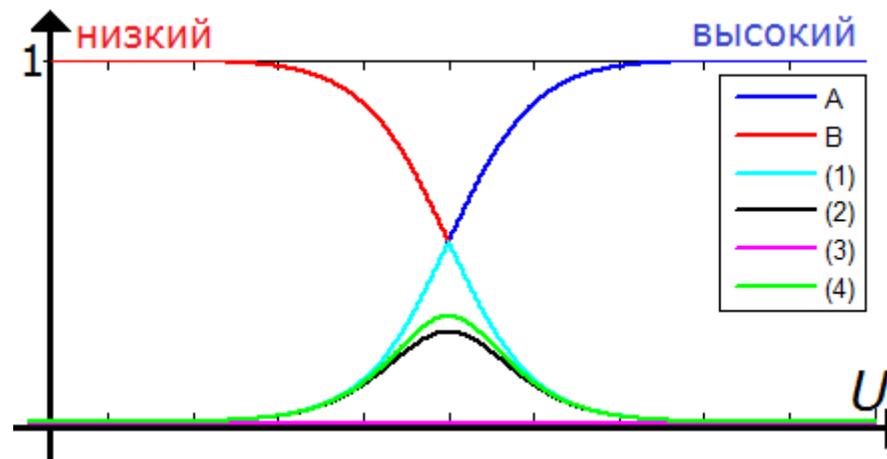
$$\mu_{A \cap B} = \min[\mu_A, \mu_B] \quad (1)$$

$$\mu_{A \cap B} = \mu_A \cdot \mu_B \quad (2)$$

$$\mu_{A \cap B} = \max[0, \mu_A + \mu_B - 1] \quad (3)$$

$$\mu_{A \cap B} = 1 - \min[1, ((1 - \mu_A)^p + (1 - \mu_B)^p)^{1/p}] \quad (4)$$

$$\mu_{A \cap B} = \max[\mu_B I[\mu_A = 1], \mu_A I[\mu_B = 1]] \quad (5)$$



## Аксиоматическое определение Т-нормы

### (треугольной нормы)

$$T : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$$

$$T(0,0) = 0$$

$$T(\mu_A, 1) = T(1, \mu_A) = \mu_A$$

$$T(\mu_A, \mu_B) = T(\mu_B, \mu_A)$$

$$T(\mu_A, T(\mu_B, \mu_C)) = T(T(\mu_A, \mu_B), \mu_C)$$

$$(\mu_A, \mu_B) \leq (\mu_C, \mu_D) \Rightarrow T(\mu_A, \mu_B) \leq T(\mu_C, \mu_D)$$

**В чётком случае – обычное пересечение**

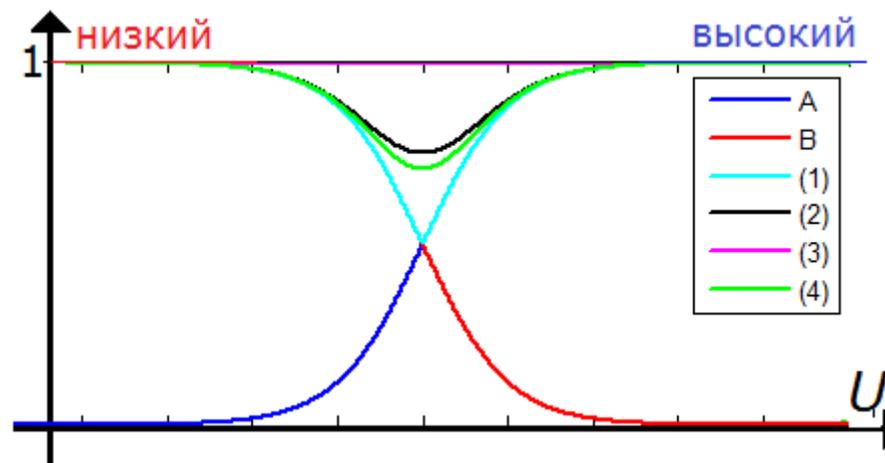
**Как ввести объединения?**

## Как ввести объединения

**Можно по правилам де Моргана**

$$\min[\mu_A, \mu_B] \rightarrow 1 - \min[1 - \mu_A, 1 - \mu_B] = \max[\mu_A, \mu_B]$$

$$\mu_A \cdot \mu_B \rightarrow 1 - (1 - \mu_A) \cdot (1 - \mu_B) = \mu_A + \mu_B - \mu_A \cdot \mu_B$$



## Объединение тоже можно вводить по-разному!

### T-конормы

$$\mu_{A \cup B} = \max[\mu_A, \mu_B] \quad (1)$$

$$\mu_{A \cup B} = \mu_A + \mu_B - \mu_A \cdot \mu_B \quad (2)$$

$$\mu_{A \cup B} = \min[1, \mu_A + \mu_B] \quad (3)$$

$$\mu_{A \cup B} = \min[1, ((\mu_A)^p + (\mu_B)^p)^{1/p}] \quad (4)$$

$$\mu_{A \cup B} = \begin{cases} \mu_A, \mu_B = 0, \\ \mu_B, \mu_A = 0, \\ 1, \mu_A > 0, \mu_B > 0. \end{cases} \quad (5)$$

**Аналогично – есть аксиоматический подход...**

**Поэтому это не теория вероятностей – больше алгебры и эвристик**

## Задача 2

**Кстати,**

$$\mu_{A \cup B} = \min[1, ((\mu_A)^p + (\mu_B)^p)^{1/p}], p \geq 1$$

**Чему равен**

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} [((\mu_A)^p + (\mu_B)^p)^{1/p}]?$$

**Докажите.**

## **Задача (решение сразу)**

**Как определить выпуклое нечёткое множество?**

**Как определить декартово произведение нечётких множеств?**

## Задача (решение сразу)

**Как определить выпуклое нечёткое множество?**

$$\forall x, y \in R \quad \forall \gamma \in [0,1] \quad \mu_A(\gamma x + (1-\gamma)y) \geq \min[\mu_A(x), \mu_A(y)]$$

**тогда и только тогда, когда все уровни выпуклые!**

**Как определить декартово произведение нечётких множеств?**

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

## Декомпозиция нечётких множеств

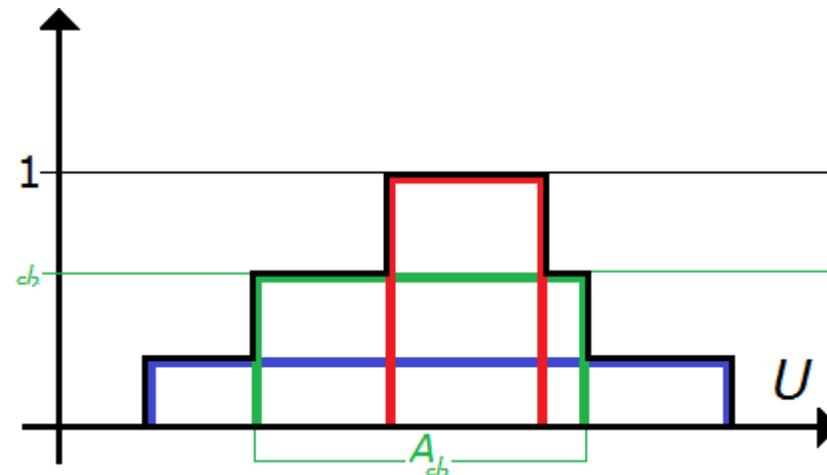
$\alpha$ -уровень множества  $A$  –

$$A_\alpha = \{u \in U \mid \mu_A(u) \geq \alpha\}$$

**Декомпозиция:**  $A = \bigcup_{0 < \alpha \leq 1} (A_\alpha, \alpha)$

**Пример декомпозиции:**

$$\begin{aligned} & \{(1,0.1), (2,0.4), (3,0.1), (4,0.5)\} = \\ & = \bigcup_{\max} [0.1 \cdot \{1, 2, 3, 4\}, 0.4 \cdot \{2, 4\}, 0.5 \cdot \{4\}] \end{aligned}$$



## Декартово произведение

**Вернёмся и обоснуем...**

$$\text{Хотим чтобы } A \times B = \bigcup_{0 \leq \alpha \leq 1} (A_\alpha \times B_\alpha, \alpha)$$

$$\text{тогда } (A \times B)_\beta = \bigcup_{\beta \leq \alpha} (A_\alpha \times B_\alpha, \alpha)$$

$$\text{т.е. } \mu_{A \times B}(x, y) \geq \beta \Leftrightarrow \min[\mu_A(x), \mu_B(y)] \geq \beta$$

**Получаем:**

$$\mu_{A \times B}(x, y) = \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

**Важно:**

**Смысл многих операций можно объяснить через декомпозиции!**

## Задача 3

**При каком определении пересечения**

$$(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha \text{ для всех } \alpha \in [0,1]?$$

**Решение дальше...**

## Расстояния между нечёткими множествами, $|U| = n$

**Расстояние Хэмминга –**

$$\sum_{u \in U} |\mu_A(u) - \mu_B(u)|$$

**Расстояние Евклида –**

$$\sqrt{\sum_{u \in U} |\mu_A(u) - \mu_B(u)|^2}$$

**Что для бесконечных множеств?**

## Оценка нечёткости (индекс нечёткости)



**Есть энтропийный подход...**

$$-\frac{1}{\ln |U|} \sum_{u \in U} \frac{\mu_A(u)}{C} \ln \frac{\mu_A(u)}{C}, \quad C = \sum_{u \in U} \mu_A(u)$$

**В чём недостаток?**

## Оценка нечёткости (индекс нечёткости)



**Есть энтропийный подход...**

$$-\frac{1}{\ln |U|} \sum_{u \in U} \frac{\mu_A(u)}{C} \ln \frac{\mu_A(u)}{C}, \quad C = \sum_{u \in U} \mu_A(u)$$

**В чём недостаток?**

**минимальна у одноэлементных множеств  
(неважно, чётких или нечётких)**

**Почему «более нечёткое»?**

## Оценка нечёткости: метрический подход

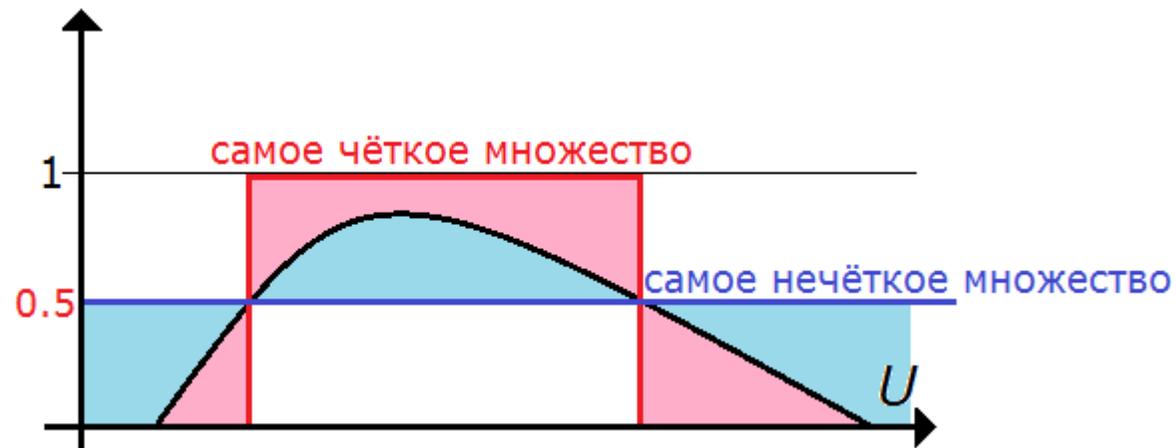
### 1. Расстояние до «ближайшего» чёткого множества

$$\mu_{\check{A}}(u) = \text{round}(\mu_A(u))$$

за меру нечёткости можно взять

$$f(\rho(A, \check{A}))$$

### 2. Расстояние до самого нечёткого множества $I_{0.5}$



## Оценка нечёткости: аксиоматический подход

$\xi(A) = 0$  для чёткого множества  $A$ ,

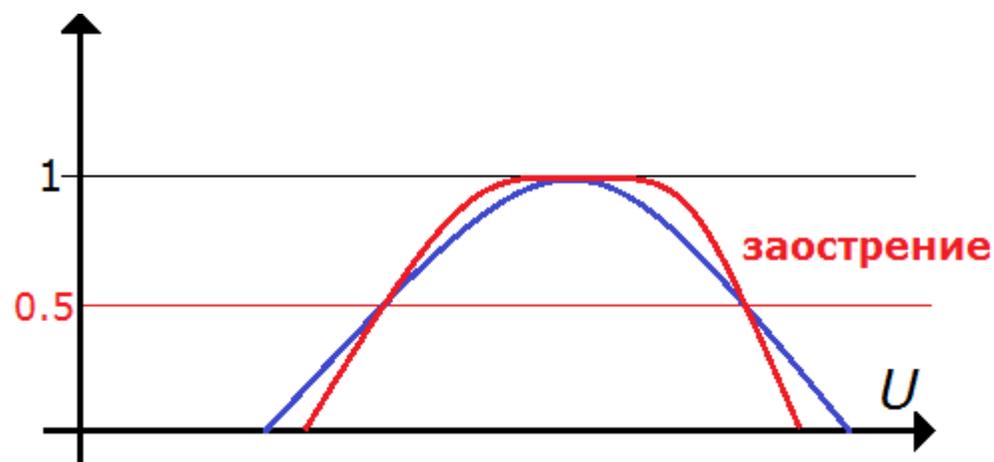
$\xi(I_{0.5}) = 1$  для самого нечёткого множества,

$$\xi(A) = \xi(\bar{A}),$$

$\xi(A) \leq \xi(B)$  при  $(\mu_A(u) \leq \mu_B(u) < 0.5) \vee (\mu_A(u) \geq \mu_B(u) > 0.5)$

**(заострение множества)**

$$\xi(A \cup B) + \xi(A \cap B) = \xi(A) + \xi(B) \text{ (иногда)}$$



## Задача 4

$$\xi(A) = 1 - 2\rho_{\text{ХЭМ}}(A, I_{0.5})$$

**нормировать надо...**

**удовлетворяет аксиомам**

**Каким аксиомам удовлетворяет функция**

$$\frac{2}{\int_U 1 \partial u} \int_U \mu_{A \cap \bar{A}}(u) \partial u ?$$

## Нечёткое бинарное отношение –

нечёткое множество на  $U_1 \times U_2$

$t$ -я проекция бинарного отношения  $R$  –

$$\mu_R^{(t)}(u_t) = \max_{u_{3-t}} \mu_R(u_1, u_2)$$

**Носитель отношения  $R$  –**

$$S(R) = \{(u_1, u_2) \in U_1 \times U_2 \mid \mu_R(u_1, u_2) > 0\}$$

**Дополнение, пересечение, объединение, алгебраическое произведение отношений, алгебраическая сумма отношений...  
ясно как**

**Отношение  $L$  содержит  $R$ , если**

$$\forall (u_1, u_2) \in U_1 \times U_2 \quad \mu_R(u_1, u_2) \leq \mu_L(u_1, u_2)$$

## Декомпозиция отношений

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix} = \max \left( 0.1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, 0.4 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 0.5 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

### max-min-композиция отношений

$$\begin{aligned} R &\sim X \times Y \\ L &\sim Y \times Z \\ R \circ L &\sim X \times Z \end{aligned}$$

$$\mu_{R \circ L}(x, z) = \max_y [\min[\mu_R(x, y), \mu_L(y, z)]]$$

**для композиции надо выполнить своеобразное умножение матриц**

$$\begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.5 \\ 0.1 & 1 & 0.2 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.2 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}$$

**В КОМПОЗИЦИИ**

**можно использовать max-произведение  
и max-среднее арифметическое**

## Задача 5

**Какие равенств всегда выполняются?**

$$(R \circ L) \circ M = R \circ (L \circ M)$$

$$R \circ (L \cup M) = (R \circ L) \cup (R \circ M)$$

$$R \circ (L \cap M) = (R \circ L) \cap (R \circ M)$$

$$L \subseteq M \Rightarrow (R \circ L) \subseteq (R \circ M)$$

**Отношение  $R$  в  $U \times U$** **рефлексивное, если**  $\forall u \in U \mu_R(u, u) = 1$ **симметричное, если**  $\forall (u_1, u_2) \in U \times U \mu_R(u_1, u_2) = \mu_R(u_2, u_1)$ **транзитивное, если**  $\forall (x, y, z) \in U^3 \mu_R(x, z) \geq \max_y(\min[\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)])$ **можно «красивее»:**  $R \circ R \subseteq R$ **Подобие = рефлексивное + симметричное + транзитивное****~ декомпозируется на чёткие эквивалентности****Как это использовать в машинном обучении?****Примеры...**

Если  $R^k = R \circ \dots \circ R$ , то

**транзитивное замыкание**  $R - R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$

оно транзитивное **Почему? (задача 6)**

**Композиция транзитивных отношений не всегда транзитивна**

**На экзамене – пример.**

## Нечёткий предпорядок – нечёткое бинарное транзитивное и рефлексивное отношение.

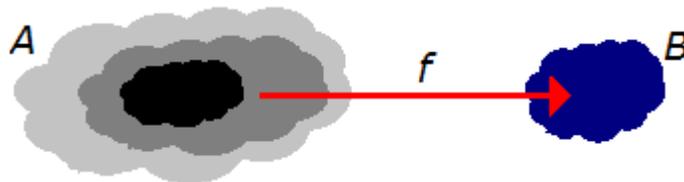
Для предпорядка  $R = R^2 = R^3 = \dots$  **Доказать (задача 7)**

Отношение  $R$  антисимметричное, если

$$\forall (x, y) \in U^2 \setminus \{(u, u) \mid u \in U\} \begin{cases} \mu_R(x, y) \neq \mu_R(y, x) \\ \mu_R(x, y) = \mu_R(y, x) = 0 \end{cases}$$

**Порядок – антисимметричный предпорядок**

## Образ нечёткого множества при отображении



$$f : X \rightarrow Y$$

$$\mu_B(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x)$$

### Принцип обобщения (внимание!)

– основан на этой формуле

Пусть, например, нечёткие множества – нечёткие числа, тогда

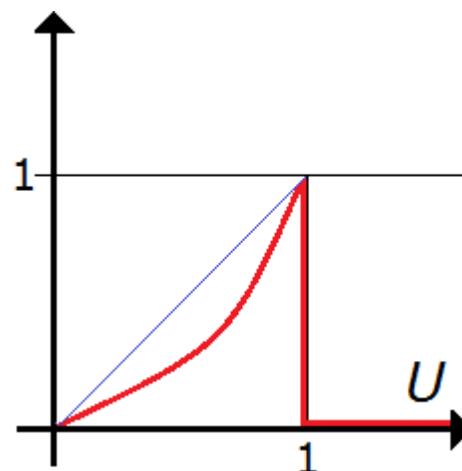
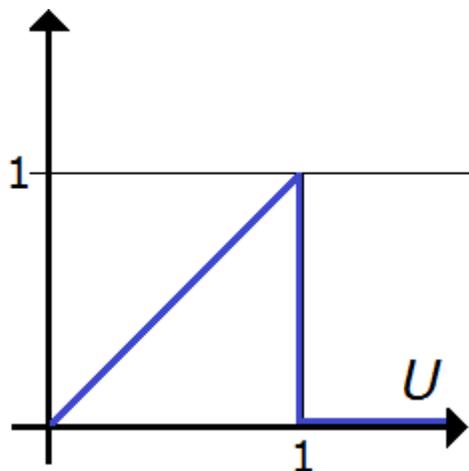
$$\mu_{A+B}(z) = \sup_{z=x+y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

аналогично другие операции над нечёткими числами

~ уравнения с нечёткими числами

## Пример применения принципа обобщения

Дана такая нечёткая единица:  $\mu_A(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}$



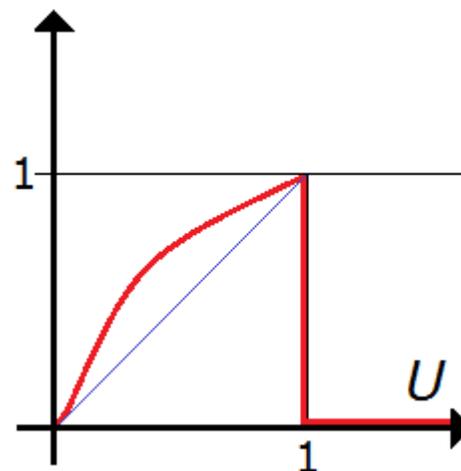
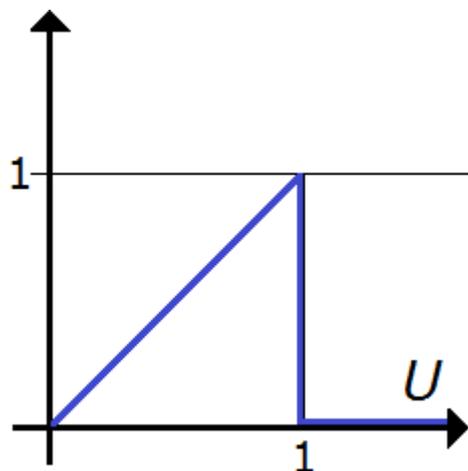
**Чему будет равен её квадрат?**

$$\mu_B(z) = \sup_{z=x*x} \min[\mu_A(x), \mu_A(x)] = \sup_{z=x*x} \mu_A(x) = \mu_A(\sqrt{z})$$

**Квадрат единицы не равен единице!**

**Где ошибка?**

## Пример применения принципа обобщения



$$\mu_B(z) = \sup_{z=x*x} \min[\mu_A(x), \mu_A(x)] = \sup_{z=x*x} \mu_A(x) = \mu_A(\sqrt{z})$$

**Ошибка в графике...**

## Задача (д/з)

**Верно ли для нечёткой единицы 1**

$$1 + 1 = 2 * 1$$

**(здесь 2 – обычное чёткое число)?**

**В каком случае «ноль» + «один» = «один»?**

**Нечёткое число – нечёткое множество при  $U = \mathbb{R}$**

**(м.б. + доп. условия)**

## Связь разных понятий

$\lambda \bullet A$  умножение обычного числа на нечёткое ( $\lambda \neq 0$ ):

$$\mu_{\lambda \bullet A}(y) = \sup_{x:\lambda x=y} \mu_A(x) = \mu_A(y/\lambda)$$

**Сумма множеств:**  $\mu_{A+B}(z) = \sup_{z=x+y} \min[\mu_A(x), \mu_B(y)]$

**Внимание, тут другая – не алгебраическая сумма!**

**Выполняется много хороших свойств...**

$$A + (B + C) = (A + B) + C, \quad \lambda \bullet (\mu \bullet A) = (\lambda\mu) \bullet A$$

**Доказать, какие ещё (экзамен)?**

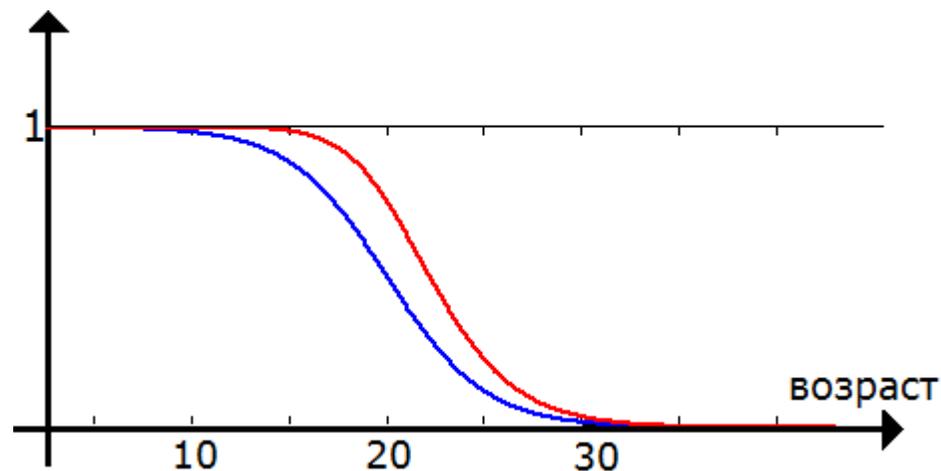
**Интересно, что множество выпукло тогда и только тогда, когда**

$$(\lambda \bullet A) + ((1 - \lambda) \bullet A) = A \text{ для всех } \lambda \in [0, 1]$$

## Немного о нечётком выводе и т.п.

### Модификатор «очень» – возведение в квадрат

$$\mu_R(u) \rightarrow \mu_{R'}(u) = [\mu_R(u)]^2$$



(здесь всё эвристично)

### Пример эвристического вывода

«Если товар дорогой, то надёжный»

«Товар **очень** дорогой»  $\Rightarrow$  «Товар **очень** надёжный»

## Немного о нечётком выводе и т.п.

### Обобщение импликации

$$\mu_{A \rightarrow B}(u, v) = \min[1, 1 - \mu_A(u) + \mu_B(v)]$$

**Есть разные способы обобщения импликации...**

**например, даже так  $\mu_{A \rightarrow B}(u, v) = \min[\mu_A(u), \mu_B(v)]$**

**Важно сделать правило вывода  $*$ :  $A * (A \Rightarrow B) = B$**

**Как?**

## Немного о нечётком выводе и т.п.

**Есть разные способы обобщения импликации...**

**например, даже так**  $\mu_{A \rightarrow B}(u, v) = \min[\mu_A(u), \mu_B(v)]$

**Важно сделать правило вывода \* :  $A * (A \Rightarrow B) = B$**

**Попробуем так:**

$$\mu_{A*(A \Rightarrow B)}(v) = \sup_{u \in U} \min[\mu_A(u), \mu_{A \Rightarrow B}(u, v)]$$

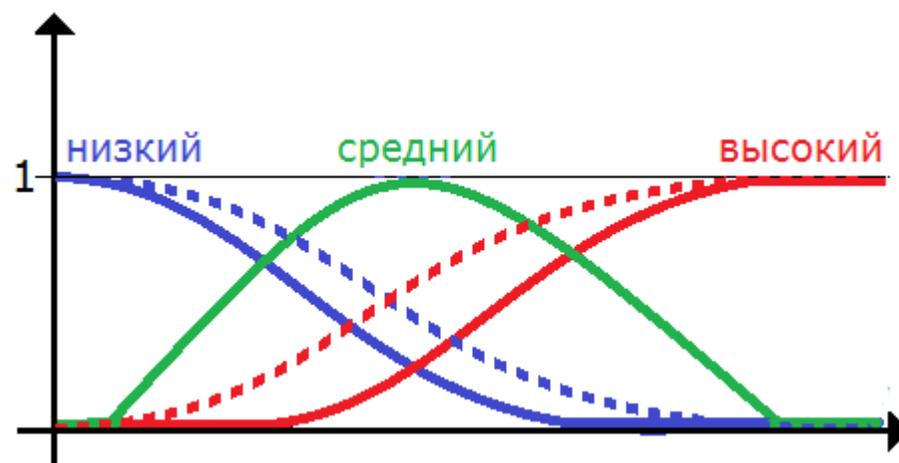
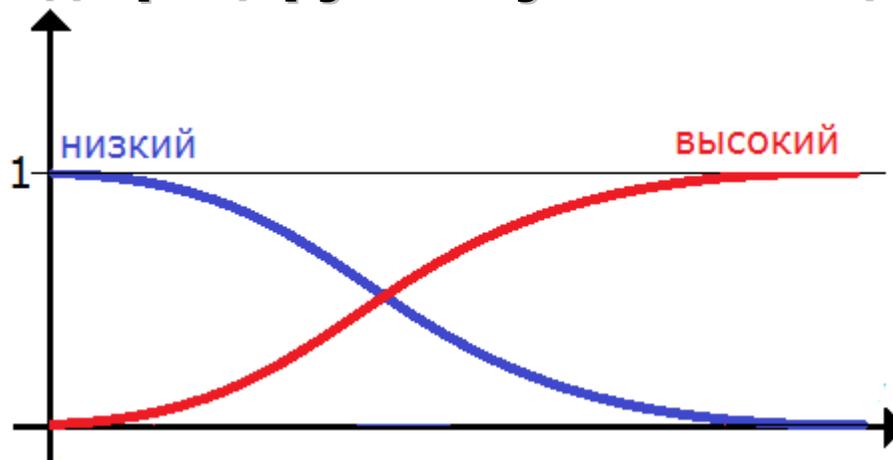
**тогда:**

$$\begin{aligned} &= \sup_{u \in U} \min[\mu_A(u), \min[\mu_A(u), \mu_B(v)]] = \\ &= \sup_{u \in U} \min[\mu_A(u), \mu_B(v)] \end{aligned}$$

**Это  $\mu_B(v)$ , кроме случаев  $\forall u \in U \mu_A(u) < \mu_B(v)$**

## Проблемы формализации

**Если появляется дополнительное понятие,  
то модифицируются уже имеющиеся!**



## Проблемы формализации

**Трудно перевести понятие в модель**



**Ещё сложнее: «совсем молодой»**

## Есть понятие ПОСП

(полное ортогональное семантического пространство)

~ набор функций  $\{\mu_j\}$

1. **Нормальность**  $U_j^1 = \{u \in U \mid \mu_j(u) = 1\}$  – отрезок
2.  $\mu_j$  **неубывает слева от  $U_j^1$  и невозрастает справа**
3. **Не более двух точек разрыва первого рода**
4. **Полнота**  $\{u \in U \mid \exists j : \mu_j(u) > 0\} = U$
5. **Ортогональность**  $\forall u \in U \sum_j \mu_j(u) = 1$

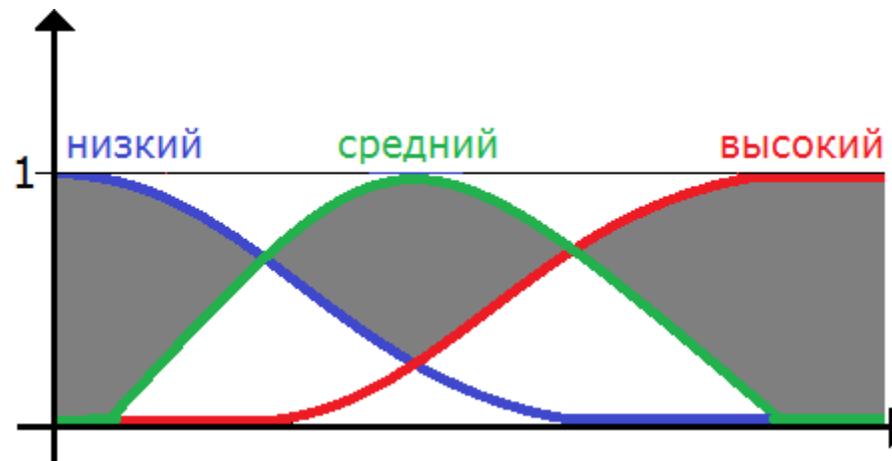
## Степень нечёткости ПОСП

часто используют

$$\xi = \frac{1}{|U|} \int_U f(\mu_t(u) - \mu_k(u)) du$$

$\forall u \in U \mu_t(u) \geq \mu_k(u) \geq \mu_i(u)$  при  $i \notin \{t, k\}$

$f(0) = 1, f(1) = 0, f$  убывает.

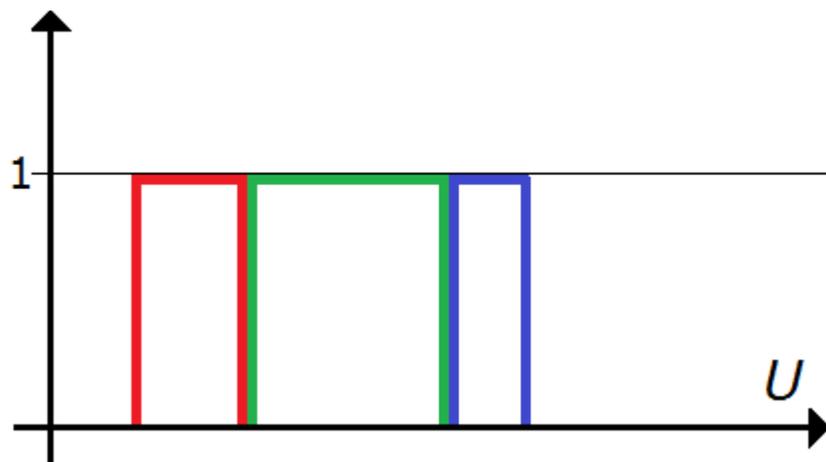


**А каким свойствам должна удовлетворять «степень нечёткости ПОСП»? Зачем она нужна?**

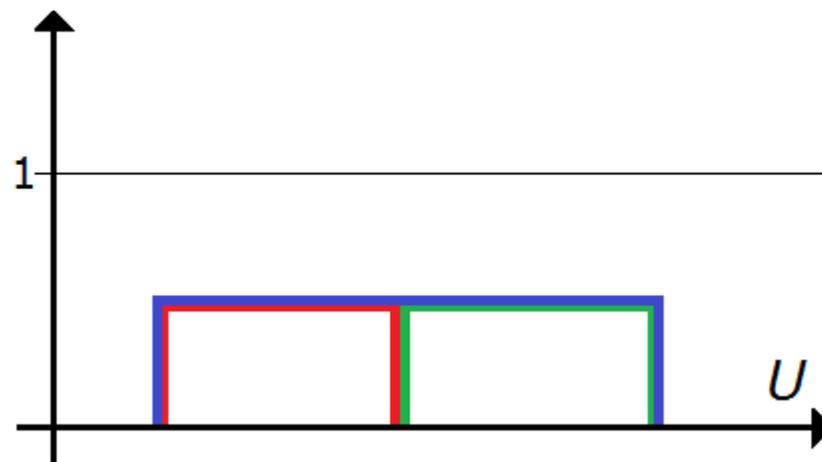
## Зачем нужна степень нечёткости ПОСП

Это трудность описания ситуаций в заданных терминах...

**Совсем легко описать**



**Тяжело описать**



## Нечёткие задачи...

**Какое из множеств более нечёткое:**

$\{(1,0.3), (2,0.6), (3,0.9)\}$ ,  $\{(1,0.25), (2,0.75)\}$ ?

## Решение задачи 1

Какие из равенств всегда выполняются?

	$\langle P(U); \neg, \cap, \cup \rangle$	$\langle P(U); \neg, *, + \rangle$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$		<b>Неверно!</b>
$\neg(A \cap B) = \bar{A} \cup \bar{B}$		
$A \cap \emptyset = \emptyset$		
$A \cup \emptyset = A$		
$A \cap U = A$		
$A \cup U = U$		
$A \cup (\neg A) = U$	<b>Неверно!</b>	<b>Неверно!</b>
$A \cap (\neg A) = \emptyset$	<b>Неверно!</b>	<b>Неверно!</b>

**Как решать: непосредственная проверка**

$$\min[a, \max(b, c)] = \max[\min(a, b), \min(a, c)]$$

## Решение задачи 1

**Часто проще проверить используя правила де Моргана**

$$\langle P(U); \neg, *, + \rangle$$

$$A * (B + C) = (A * B) + (A * C)$$

$$\overline{A * (B + C)} = \overline{(A * B) + (A * C)}$$

$$1 - a(b + c - bc) = (1 - ab)(1 - ac)$$

$$1 - ab - ac + abc = 1 - ab - ac + a^2bc$$

$$abc = a^2bc$$

**Дистрибутивность справедлива лишь при**

$$\begin{cases} a = 1 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

## Решение задачи 2

### Чему равен

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} [((\mu_A)^p + (\mu_B)^p)^{1/p}]?$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} [((\mu_A)^p + (\mu_B)^p)^{1/p}] = \max[\mu_A, \mu_B]$$

**Пусть**  $\mu_A \geq \mu_B$ ,  $\lim_{p \rightarrow +\infty} [((\mu_A)^p + (\mu_B)^p)^{1/p}] = \mu_A \lim_{p \rightarrow +\infty} \left[ 1 + \left( \frac{\mu_B}{\mu_A} \right)^p \right]^{1/p} = \mu_A$  ■

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \ln[1 + x^p]^{1/p} = \frac{\ln(1 + x^p)}{p} = 0, \quad 0 < x \leq 1$$

## Решение задачи 3

**При каком определении пересечения**

$$(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha \text{ для всех } \alpha \in [0,1]?$$

$$\mu_{A \cap B}(x) \geq \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_A(x) \geq \alpha \\ \mu_B(x) \geq \alpha \end{cases}$$

$$\mu_{A \cap B}(x) \geq \alpha \Leftrightarrow \min[\mu_A(x), \mu_B(x)] \geq \alpha$$

**Ответ:**

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

## Решение задачи 4

$\xi(A) = 1 - 2\rho_{\text{ХЭМ}}(A, I_{0.5})$  **удовлетворяет аксиомам**

**Например,**  $\xi(A \cup B) + \xi(A \cap B) = \xi(A) + \xi(B)$

**Проверяем**  $|0.5 - \max(a, b)| + |0.5 - \min(a, b)| = |0.5 - a| + |0.5 - b|$

**нормировать надо...**

## Решение задачи 4 (часть 2)

**Каким аксиомам удовлетворяет функция**

$$\frac{2}{\int_U 1 \partial u} \int_U \mu_{A \cap \bar{A}}(u) \partial u ?$$

**Всем. Докажем последнюю.**

**Пусть в какой-то точке  $u$**

$$\mu_A(u) \equiv a \geq \mu_B(u) \equiv b$$

**тогда под знаками интеграла функции этой точке**

$$\min(a, 1-a) + \min(b, 1-b) \text{ (слева и справа)}$$

## Решение задачи 5

Какие равенств всегда выполняются?

$$(R \circ L) \circ M = R \circ (L \circ M)$$

**Непросто**

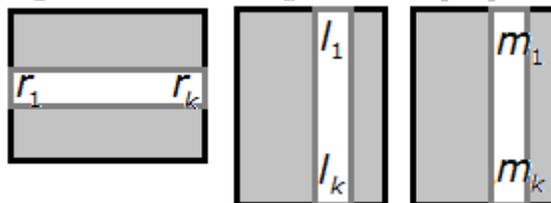
$$R \circ (L \cup M) = (R \circ L) \cup (R \circ M)$$

$$R \circ (L \cap M) = (R \circ L) \cap (R \circ M)$$

**Неверно!**

$$L \subseteq M \Rightarrow (R \circ L) \subseteq (R \circ M)$$

Как рассмотреть (2) и (3):



$$\max_t (\min(r_t, \max(l_t, m_t))) = \max_t \left( \max(\min(r_t, l_t)), \max(\min(r_t, m_t)) \right)$$

## Решение задачи 6

**Транзитивное замыкание  $L = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \dots$  транзитивно.**

$$L^2 = (R \cup R^2 \cup \dots) \circ (R \cup R^2 \cup \dots) = R^2 \cup R^3 \cup \dots \subseteq L$$


---

## Решение задачи 7

**Для предпорядка  $R = R^2 = R^3 = \dots$**

$$\mu_{R^2}(x, z) = \max_y [\min[\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)]]$$

$$\mu_{R^2}(x, z) \geq [\min[\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)]]|_{y=x} = \min[\underbrace{\mu_R(x, x)}_{=1}, \mu_R(x, z)] = \mu_R(x, z)$$

**С другой стороны, по транзитивности  $R^2 \subseteq R \Rightarrow \mu_{R^2}(x, z) \leq \mu_R(x, z)$**

**поэтому  $\mu_{R^2}(x, z) = \mu_R(x, z)$  и  $R^2 = R$**

**«Домножаем на  $R$ » получаем и другие равенства.**

## Литература

**Рыжов А.П. Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости. Москва, Диалог-МГУ, 1998, 116 с.**

<http://www.intsys.msu.ru/staff/ryzhov/FuzzySetsTheory&Applications.pdf>

**Основные понятия теории нечетких множеств, нейронных сетей и генетических алгоритмов // Вспомогательные материалы к курсу проф. Рыжова А.П.**

[http://www.mba-topman.ru/files/Osnovnye\\_ponyatiya1064.pdf](http://www.mba-topman.ru/files/Osnovnye_ponyatiya1064.pdf)

**Ухоботов В. И. Избранные главы теории нечетких множеств // Учеб. пособие. Челябинск : Изд-во Челяб. гос. ун-та, 2011. – 245 с.**

<http://www.lib.csu.ru/texts/UhobotovVI.pdf>