

## Методы Монте Карло по схеме марковских цепей (Markov Chain Monte Carlo, МСМС)

Дата: 18 апреля 2012

### Методы Монте Карло в графических моделях

Рассмотрим графическую модель  $p(X, T|\Theta)$ , где  $X$  – набор наблюдаемых переменных,  $T$  – набор скрытых переменных и  $\Theta$  – набор параметров. В ряде случаев оценка скрытых переменных  $T$  через максимум апостериорной плотности

$$p(T|X, \Theta) \rightarrow \max_T$$

оказывается недостаточной, и интерес представляют маргинальные распределения на отдельные компоненты  $T$  вида  $p(t_i|X, \Theta)$  или различные статистики апостериорного распределения  $\mathbb{E}_{T|X, \Theta} f(T)$ . Необходимость поиска маргинальных распределений возникает, например, в задаче байесовского оценивания

$$\int \Delta(T, \hat{T}) p(\hat{T}|X, \Theta) d\hat{T} \rightarrow \min_T$$

с функцией потерь  $\Delta(T, \hat{T}) = \sum_p [t_p \neq \hat{t}_p]$ . Ее решением является  $t_p = \arg \max_{\hat{t}_p} p(\hat{t}_p|X, \Theta)$ . Другим примером здесь является использование EM-алгоритма для решения задачи максимизации неполного правдоподобия

$$p(X|\Theta) \rightarrow \max_{\Theta}$$

т.к. EM-алгоритм предполагает оценку статистики  $\mathbb{E}_{T|X, \Theta_{old}} \log p(X, T|\Theta)$ .

В дальнейшем будем рассматривать вероятностные распределения вида  $p(T)$ , быть может, известные с точностью до нормировочной константы

$$p(T) = \frac{1}{Z} \tilde{p}(T), \quad Z = \int \tilde{p}(T) dT.$$

Методы Монте Карло (методы статистических испытаний) предполагают генерацию выборки из этого распределения:

$$T^1, \dots, T^N \sim p(T).$$

Данная выборка может быть использована для оценки статистик распределения  $p(T)$

$$\mathbb{E}_T f(T) = \int f(T) p(T) dT \simeq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(T^n), \quad (1)$$

а также для оценки маргинальных распределений

$$p(t_p = k) \simeq \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [t_p^n = k].$$

Кроме того, выборка  $T^1, \dots, T^N$  может быть также использована для оценки моды распределения  $p(T)$ :

$$\max_T p(T) \simeq \max_n p(T^n),$$

т.к. появление точек выборки наиболее вероятно в областях больших значений плотности.

Основной вопрос, раскрываемый в дальнейшем, состоит в том, как эффективно сгенерировать выборку  $T^1, \dots, T^N$  из вероятностного распределения, заданного своей плотностью  $p(T)$  или своей ненормированной плотностью  $\tilde{p}(T)$ .

## Простейшие методы генерации

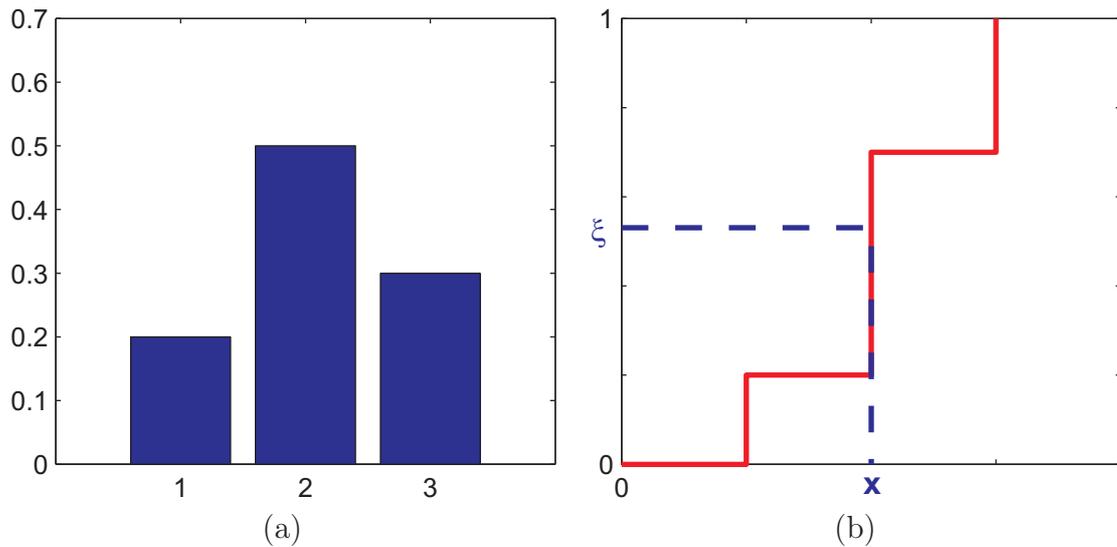


Рис. 1: Иллюстрация генерации выборки из конечного дискретного распределения. (a) – плотность распределения, (b) – соответствующая ей функция распределения.

Рассмотрим одномерную случайную величину  $X$  и ее функцию распределения

$$f(x) = \mathbb{P}\{X < x\}.$$

Рассмотрим случайную величину  $f(X)$ . Легко показать, что она имеет равномерное распределение в интервале  $[0, 1]$ . Отсюда получаем простейший способ генерации случайной величины, заданной своей функцией распределения: сначала генерируем  $\xi \sim R[0, 1]$ , а затем вычисляем  $x = f^{-1}(\xi)$ . Данный метод генерации получил название метода обратной функции. С его помощью можно сгенерировать выборку из произвольного дискретного распределения с конечным носителем (см. рис. 1).

Рассмотрим пример применения метода обратной функции для непрерывного распределения Коши:

$$p(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad f(x) = \frac{1}{\pi} \arctan x + \frac{1}{2} = \xi \Rightarrow x = \tan(\pi(\xi - \frac{1}{2})).$$

Очевидно, что метод обратной функции применим только в ограниченном числе случаев, т.к. требует аналитического вычисления обратной функции к функции распределения. В частности, метод обратной функции не применим для нормального распределения.

Для генерации выборки из нормального распределения можно воспользоваться центральной предельной теоремой. Рассмотрим набор независимых равномерно-распределенных на интервале  $[0, 1]$  случайных величин  $\xi_1, \dots, \xi_N$  и их среднее значение  $S = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_n$ . Тогда величина

$$\frac{S - \mathbb{E}S}{\sqrt{\mathbb{D}S}} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \xi_n - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{N^2} \frac{N}{12}}} = \sqrt{\frac{12}{N}} \left( \sum_{n=1}^N \xi_n - \frac{N}{2} \right) = \{N = 12\} = \sum_{n=1}^N \xi_n - 6$$

имеет приближенное нормальное распределение.

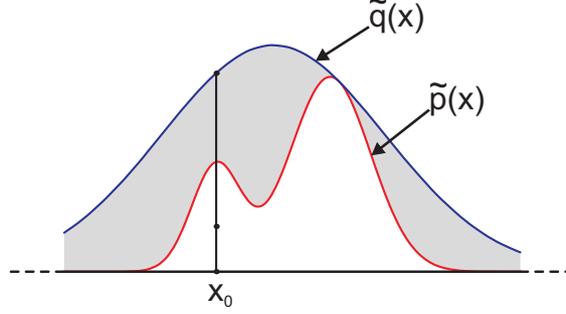


Рис. 2: Иллюстрация метода rejection sampling

Одним из общих методов генерации, который может быть применен практически для любой одномерной непрерывной случайной величины, является метод Rejection sampling. Пусть необходимо сгенерировать выборку из распределения  $\tilde{p}(x)$ , известного с точностью до нормировочной константы. Возьмем некоторое предположеное распределение  $q(x)$ , из которого мы можем генерировать выборку и удовлетворяющего свойству  $\tilde{p}(x) \leq \tilde{q}(x)$  (см. рис. 2). Здесь  $\tilde{q}(x)$  – ненормированная плотность  $q(x)$ . Сгенерируем сначала точку  $x_0$  из распределения  $q(x)$ , а затем сгенерируем точку  $u_0$  из равномерного распределения на отрезке  $[0, \tilde{q}(x_0)]$ . В результате набор пар  $(u_0, x_0)$  будет распределен равномерно в области под кривой  $\tilde{q}(x)$ . Теперь отбросим все точки  $(u_0, x_0)$  такие, что  $u_0 > \tilde{p}(x_0)$ . Оставшиеся пары  $(u_0, x_0)$  будут распределены равномерно в области под кривой  $\tilde{p}(x)$ . Теперь отбросим компоненты  $u_0$  и получим выборку из распределения  $p(x)$ .

Очевидно, что метод Rejection sampling будет эффективным только в том случае, если функция  $\tilde{q}(x)$  является достаточно точной оценкой сверху для  $\tilde{p}(x)$  (серая область на рис. 2 имеет малую площадь). Понятно, что в одномерном случае плотность распределения всегда можно ограничить сверху кусочно-постоянной функцией (гистограммой), выборку из которой можно легко сгенерировать. На этом принципе построен один из наиболее эффективных алгоритмов генерации выборки из нормального распределения Ziggurat.

В заключение этого раздела рассмотрим вопрос генерации выборки из многомерного нормального распределения  $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ . Если матрица ковариации  $\Sigma$  является диагональной, то все компоненты нормального распределения могут быть сгенерированы независимо из соответствующих одномерных нормальных распределений. Пусть  $\Sigma$  является произвольной положительно-определенной матрицей. Рассмотрим для нее разложение Холецкого  $\Sigma = RR^T$ , где  $R$  является верхнетреугольной матрицей. Сгенерируем точку  $\mathbf{x}$  из стандартного многомерного нормального распределения  $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\mathbf{0}, I)$ . Тогда величина  $\mathbf{y} = R\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}$  будет распределена по закону  $\mathcal{N}(\mathbf{y}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ . Действительно, линейная комбинация компонент нормального распределения распределена нормально, а мат.ожидание и матрица ковариации равны, соответственно,  $\mathbb{E}\mathbf{y} = R\mathbb{E}\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}$  и  $\text{Cov}(\mathbf{y}) = \mathbb{E}(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{y} - \boldsymbol{\mu})^T = \mathbb{E}R\mathbf{x}\mathbf{x}^T R^T = R\mathbb{E}\mathbf{x}\mathbf{x}^T R^T = RIR^T = \Sigma$ .

# Идея МСМС

Рассмотрим теперь вопрос генерации выборки из распределения  $p(T)$  в многомерном пространстве с помощью методов Монте Карло по схеме марковской цепи (МСМС). В этих методах вводится некоторая марковская цепь с априорным распределением  $p_0(T)$  и вероятностями перехода в момент времени  $n$   $q_n(T^{n+1}|T^n)$ , а генерация выборки происходит следующим образом:

$$\begin{aligned} T^1 &\sim p_0(T), \\ T^2 &\sim q_1(T^2|T^1), \\ &\vdots \\ T^N &\sim q_{N-1}(T^N|T^{N-1}). \end{aligned} \tag{2}$$

Заметим, что при таком подходе генерируемая выборка не является набором независимых случайных величин. Однако, она подходит для оценки вероятностных интегралов вида (1) или оценки моды распределения. В том случае, если необходимо получить набор независимых величин, достаточно проредить полученный набор  $T^1, \dots, T^N$ , взяв каждый  $m$ -ый отсчет, где  $m$  достаточно велико.

В дальнейшем рассматривается вопрос о том, как выбрать вероятности перехода  $q_n(T^{n+1}|T^n)$  таким образом, чтобы выборка, генерируемая по схеме (2), была бы выборкой из интересующего нас распределения  $p(T)$ .

## Теоретические свойства марковских цепей

Марковская цепь называется **однородной**, если вероятность перехода  $q_n(T^{n+1}|T^n)$  не зависит от момента времени  $n$ , т.е.  $q_n(T^{n+1}|T^n) = q(T^{n+1}|T^n)$ . В дальнейшем будем рассматривать только однородные марковские цепи. Рассмотрим маргинальное распределение точек выборки в момент времени  $n - 1$ , генерируемой с помощью однородной марковской цепи, и обозначим его через  $p_{n-1}(T^{n-1})$ . Тогда маргинальное распределение точек выборки в момент времени  $n$  можно вычислить следующим образом:

$$p_n(T^n) = \int q(T^n|T^{n-1})p_{n-1}(T^{n-1})dT^{n-1}.$$

Распределение  $\pi(T)$  называется **инвариантным относительно марковской цепи** с вероятностью перехода  $q$ , если

$$\pi(T) = \int q(T|S)\pi(S)dS, \tag{3}$$

Очевидно, что для генерации выборки из распределения  $p(T)$  по схеме марковской цепи необходимо потребовать, чтобы распределение  $p(T)$  было инвариантным относительно этой марковской цепи. Достаточным условием инвариантности распределения  $\pi(T)$  является выполнимость **уравнения детального баланса**:

$$\pi(S)q(T|S) = \pi(T)q(S|T).$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int q(T|S)\pi(S)dS &= \{\text{ур-е детального баланса}\} = \int q(S|T)\pi(T)dS = \\ &= \pi(T) \underbrace{\int q(S|T)dS}_{=1} = \pi(T). \end{aligned}$$

Марковская цепь может иметь более одного инвариантного распределения. Пусть  $\pi(T)$  – ее инвариантное распределение. Тогда марковская цепь называется **эргодичной**, если

$$\forall p_0(T) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \pi(T).$$

Здесь  $p_0(T)$  – начальное (априорное) распределение. Очевидно, что эргодичная марковская цепь имеет только одно инвариантное распределение. Достаточным условием эргодичности однородной марковской цепи является следующее свойство:

$$\forall S, \forall T : \pi(T) \neq 0 : q(T|S) > 0.$$

Теперь для генерации выборки из интересующего нас распределения  $p(T)$  по схеме (2) достаточно потребовать, чтобы наша марковская цепь была однородной и эргодичной, а распределение  $p(T)$  было инвариантным относительно нашей марковской цепи. Тогда, вне зависимости от начального распределения  $p_0(T)$ , начиная с некоторого момента времени  $n$  выборка, генерируемая по схеме (2), будет выборкой из распределения  $p(T)$ .

## Схема Метрополиса-Хастингса

Пусть необходимо сгенерировать выборку из распределения  $p(T)$ , известного с точностью до нормировочной константы:

$$p(T) = \frac{1}{Z} \tilde{p}(T).$$

Рассмотрим шаг генерации по схеме Метрополиса-Хастингса. Пусть на шаге  $n$  сгенерирована конфигурация  $T^n$ . Тогда на шаге  $n + 1$  сначала генерируется конфигурация  $T^*$  из некоторого предположного распределения  $r(T|T^n)$ . Затем вычисляется величина

$$A(T^*, T^n) = \min \left( 1, \frac{\tilde{p}(T^*)r(T^n|T^*)}{\tilde{p}(T^n)r(T^*|T^n)} \right)$$

и точка  $T^*$  принимается в качестве следующей точки  $T^{n+1}$  с вероятностью  $A(T^*, T^n)$ . В противном случае,  $T^{n+1} = T^n$ . Таким образом, мы ввели марковскую цепь с вероятностью перехода

$$q(T^{n+1}|T^n) = \begin{cases} r(T^{n+1}|T^n)A(T^{n+1}, T^n), & \text{если } T^{n+1} \neq T^n, \\ 1 - r(T^{n+1}|T^n)A(T^{n+1}, T^n), & \text{если } T^{n+1} = T^n. \end{cases}$$

Покажем, что распределение  $p(T)$  является инвариантным относительно введенной марковской цепочки. Если  $T^{n+1} = T^n$ , то инвариантность сохраняется, т.к. значение  $T^n$  не изменяется. Для случая  $T^{n+1} \neq T^n$  проверим выполнимость уравнения детального баланса:

$$p(T^n)q(T|T^n) = \min(p(T^n)r(T|T^n), p(T)r(T^n|T)) = \min(p(T)r(T^n|T), p(T^n)r(T|T^n)) = p(T)q(T^n|T).$$

Для эргодичности введенной марковской цепи достаточно потребовать выполнение  $r(T|S) > 0, \forall T, S$ .

В том случае, если предположное распределение является симметричным, т.е.  $r(T|S) = r(S|T)$ ,  $\forall S, T$ , то схема Метрополиса-Хастингса переходит в классическую схему Метрополиса. Согласно этой схеме, если значение плотности в новой точке  $T^*$  оказалось выше, чем значение плотности в предыдущей точке  $T^n$ , то эта точка гарантированно принимается в качестве следующей точки выборки. Если плотность в новой точке оказалась меньше, то такая точка тоже может быть принята, но с вероятностью, пропорциональной величине уменьшения плотности.

Рассмотрим модельный пример применения схемы Метрополиса (см. рис. 3). Пусть нам необходимо сгенерировать выборку из двухмерного нормального распределения с недиагональной матрицей ковариации. Возьмем в качестве предположного распределения двухмерное нормальное распределение с матрицей ковариации, пропорциональной единичной:  $r(T|S) = \mathcal{N}(T|S, \sigma I)$ . Это распределение, очевидно, является симметричным.

Значение параметра  $\sigma$  в значительной степени определяет эффективность процесса генерации выборки. Если значение  $\sigma$  слишком велико, то большинство новых точек будет отвергаться. Если значение  $\sigma$  слишком мало, то шаги в пространстве будут также маленькими, и понадобится очень много времени, чтобы покрыть область больших значений плотности распределения.

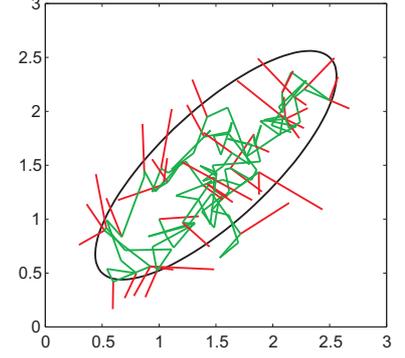


Рис. 3: Иллюстрация генерации выборки из двухмерного нормального распределения по схеме Метрополиса. Красные — отвергаемые шаги, зеленые — принимаемые шаги.

## Схема Гиббса

Пусть необходимо сгенерировать выборку из многомерного распределения  $p(T)$ , где  $T = \{t_1, \dots, t_P\}$ . Рассмотрим шаг генерации по схеме Гиббса. Пусть на шаге  $n$  сгенерирована конфигурация  $T^n = \{t_1^n, \dots, t_P^n\}$ . Тогда генерация следующей точки выборки  $T^{n+1}$  происходит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 t_1^{n+1} &\sim p(t_1|t_2^n, t_3^n, \dots, t_P^n), \\
 t_2^{n+1} &\sim p(t_2|t_1^{n+1}, t_3^n, t_4^n, \dots, t_P^n), \\
 t_3^{n+1} &\sim p(t_3|t_1^{n+1}, t_2^{n+1}, t_4^n, \dots, t_P^n), \\
 &\dots \\
 t_P^{n+1} &\sim p(t_P|t_1^{n+1}, t_2^{n+1}, \dots, t_{P-1}^{n+1}).
 \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь через  $p(t_i|T_{\setminus i})$  обозначено маргинальное одномерное распределение значений  $i$ -ой компоненты при условии всех остальных. Таким образом, согласно схеме Гиббса генерация выборки из многомерного распределения заменяется на итерационную генерацию точек из одномерных распределений. По аналогии с методами одномерной оптимизации генерация выборки из одномерного распределения является существенно более простой задачей, чем генерация выборки из многомерного распределения.

Докажем, что распределение  $p(T)$  является инвариантным относительно введенной марковской цепи. Рассмотрим один шаг генерации очередной компоненты  $t_p \sim p(t_p|T_{\setminus p})$ . По предположению индукции  $T_{\setminus p} \sim p(T_{\setminus p})$ . Тогда совместная конфигурация  $(t_p, T_{\setminus p}) \sim p(t_p|T_{\setminus p})p(T_{\setminus p}) = p(T)$ .

Отсюда, совместное распределение является инвариантным относительно одного шага процесса генерации (4). Следовательно, оно является инвариантным и относительно всего процесса (4).

При реализации схемы Гиббса на практике часто допускается следующая ошибка: вместо шага

$$t_p^{n+1} \sim p(t_p | t_1^{n+1}, \dots, t_{p-1}^{n+1}, t_{p+1}^n, \dots, t_P^n)$$

делается шаг

$$t_p^{n+1} \sim p(t_p | t_1^n, \dots, t_{p-1}^n, t_{p+1}^n, \dots, t_P^n),$$

т.е. в условие подставляются значения компонент только с предыдущей итерации. При таком подходе вероятность перехода в марковской цепи определяется как

$$q(T|T^n) = \prod_{p=1}^P p(t_p | T_{\setminus p}^n). \quad (5)$$

Распределение  $p(T)$  не является инвариантным относительно данной марковской цепи. Эту ситуацию легко исправить, если взять схему Метрополиса-Хастингса, где в качестве предложного распределения фигурирует распределение (5). Заметим, что в отличие от схемы Гиббса, схема Метрополиса-Хастингса с предложным распределением (5) легко распараллеливается и на практике в некоторых ситуациях может работать быстрее, чем схема Гиббса.

## Применение схемы Гиббса для дискретной марковской сети

Рассмотрим марковскую сеть с графом-решеткой с  $K$ -значными переменными. Распределение вероятности для конфигурации  $T$  этой марковской сети может быть записано как

$$p(T) = \frac{1}{Z} \exp \left[ - \sum_{p=1}^P h_p(t_p) - \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} f_{ij}(t_i, t_j) \right], \quad t_p \in \{1, \dots, K\}.$$

Здесь  $Z$  — нормировочная константа распределения, а  $h_p$  и  $f_{ij}$  — некоторые функции дискретного аргумента. Для применения схемы Гиббса необходимо уметь генерировать выборку из всех одномерных маргинальных распределений вида  $p(t_p | T_{\setminus p}^n)$ . В данном случае это распределение легко найти по следующей формуле:

$$p(t_p | T_{\setminus p}^n) \propto \exp \left[ -h_p(t_p) - \sum_{i:(p,i) \in \mathcal{E}} f_{pi}(t_p, t_i^n) \right].$$

При этом константа данного распределения легко считается путем суммирования  $K$  величин. Это распределение является дискретным, и, следовательно, выборку из него легко получить путем генерации равномерно распределенной случайной величины.

## Фильтр частиц

Рассмотрим линейную динамическую систему. Она представляет собой байесовскую сеть с графом, показанным на рис. 4, в которой переменные  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N \in \mathbb{R}^d$  являются наблюдаемыми,

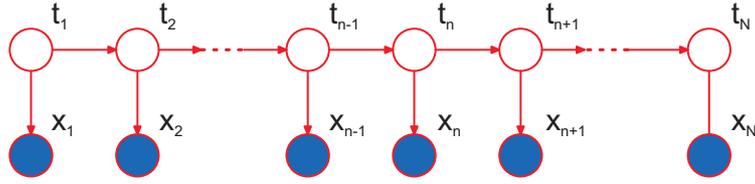


Рис. 4: Графическая модель для линейной динамической системы.

переменные  $\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_N \in \mathbb{R}^D$  подлежат оценке, а вероятности определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} p(\mathbf{t}_1) &= \mathcal{N}(\mathbf{t}_1 | \boldsymbol{\mu}_0, V_0), \\ p(\mathbf{t}_n | \mathbf{t}_{n-1}) &= \mathcal{N}(\mathbf{t}_n | A\mathbf{t}_{n-1}, \Gamma), \\ p(\mathbf{x}_n | \mathbf{t}_n) &= \mathcal{N}(\mathbf{x}_n | C\mathbf{t}_n, \Sigma). \end{aligned}$$

Для этой модели фильтрация в режиме реального времени, т.е. вычисление распределений вида  $p(\mathbf{t}_n | \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ , может быть проведена точно с помощью фильтра Калмана. Рассмотрим расширение данной модели, в которой шумы по-прежнему являются нормальными, а математические ожидания при переходе определяются известными нелинейными вектор-функциями  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{g}$ :

$$\begin{aligned} p(\mathbf{t}_1) &= \mathcal{N}(\mathbf{t}_1 | \boldsymbol{\mu}_0, V_0), \\ p(\mathbf{t}_n | \mathbf{t}_{n-1}) &= \mathcal{N}(\mathbf{t}_n | \mathbf{f}(\mathbf{t}_{n-1}), \Gamma), \\ p(\mathbf{x}_n | \mathbf{t}_n) &= \mathcal{N}(\mathbf{x}_n | \mathbf{g}(\mathbf{t}_n), \Sigma). \end{aligned}$$

Тогда фильтрацию в режиме реального времени в такой модели можно проводить с высокой степенью точности с помощью расширенного фильтра Калмана. В том случае, если шумы не являются нормальными (например, соответствующие распределения являются многомодальными), то тогда для решения задачи приближенной фильтрации в режиме реального времени можно применять т.н. [фильтр частиц](#). Для этого достаточно уметь эффективно генерировать выборку произвольного объема из априорного распределения  $p(\mathbf{t}_1)$  и распределений вида  $p(\mathbf{t}_n | \mathbf{t}_{n-1})$ .

Рассмотрим формулу Байеса в следующем виде:

$$p(\mathbf{t} | \mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x} | \mathbf{t})p(\mathbf{t})}{\int p(\mathbf{x} | \mathbf{t}')p(\mathbf{t}')d\mathbf{t}'}$$

Предположим, что мы умеем генерировать выборку из априорного распределения  $p(\mathbf{t})$ :

$$\mathbf{t}^1, \dots, \mathbf{t}^L \sim p(\mathbf{t}).$$

Тогда генерацию выборки из апостериорного распределения  $p(\mathbf{t} | \mathbf{x})$  можно проводить следующим образом. Вычислим веса для каждого элемента выборки  $\mathbf{t}^l$  по формуле

$$w^l = \frac{p(\mathbf{x} | \mathbf{t}^l)}{\sum_{m=1}^L p(\mathbf{x} | \mathbf{t}^m)}.$$

Затем сгенерируем выборку с возвращением из множества  $\{\mathbf{t}^1, \dots, \mathbf{t}^L\}$ , где элемент  $l$  выбирается с вероятностью  $w^l$ . Полученную таким образом выборку можно приближенно считать выборкой из распределения  $p(\mathbf{t} | \mathbf{x})$ . При этом статистики данного распределения можно оценить как

$$\mathbb{E}_{\mathbf{t} | \mathbf{x}} f(\mathbf{t}) \approx \sum_{l=1}^L w^l f(\mathbf{t}^l). \quad (6)$$

---

**Алгоритм 1: Фильтр частиц**

---

**Вход:** Объем выборки  $L$ .

**Выход:** Значения статистик распределений  $p(\mathbf{t}_n|X_n)$ ,  $n = 1, \dots, N$ .

- 1: Сгенерировать выборку  $\mathbf{t}_0^1, \dots, \mathbf{t}_0^L$  из априорного распределения  $p(\mathbf{t}_1)$ .
  - 2: Вычислить веса  $w_0^l = \frac{p(\mathbf{x}_1|\mathbf{t}_0^l)}{\sum_{m=1}^L p(\mathbf{x}_1|\mathbf{t}_0^m)}$ ,  $l = 1, \dots, L$ .
  - 3: **для**  $n = 1, \dots, N - 1$
  - 4: Сгенерировать выборку  $\mathbf{t}_n^1, \dots, \mathbf{t}_n^L$  из вероятностной смеси  $\sum_{l=1}^L w_{n-1}^l p(\mathbf{t}_n|\mathbf{t}_{n-1}^l)$ .
  - 5: Вычислить веса  $w_n^l = \frac{p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{t}_n^l)}{\sum_{m=1}^L p(\mathbf{x}_{n+1}|\mathbf{t}_n^m)}$ ,  $l = 1, \dots, L$ .
  - 6: Вычислить необходимые статистики (например, мат.ожидания) распределений  $p(\mathbf{t}_n|X_n)$  по формуле  $\mathbb{E}_{\mathbf{t}_n|X_n} f(\mathbf{t}_n) = \sum_{l=1}^L w_{n-1}^l f(\mathbf{t}_{n-1}^l)$ .
- 

Воспользуемся данным алгоритмом для приближенного решения задачи онлайн-фильтрации для графической модели, показанной на рис. 4. Схема фильтрации в такой модели состоит из двух шагов: прогноз (вычисление  $p(\mathbf{t}_n|X_{n-1})$ ) и коррекция (вычисление  $p(\mathbf{t}_n|X_n)$ ). Здесь под  $X_n$  понимается предыстория до момента времени  $n$ :  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ . Очевидно, что

$$p(\mathbf{t}_n|X_{n-1}) = \int p(\mathbf{t}_n, \mathbf{t}_{n-1}|X_{n-1}) d\mathbf{t}_{n-1} = \int p(\mathbf{t}_n|\mathbf{t}_{n-1}) p(\mathbf{t}_{n-1}|X_{n-1}) d\mathbf{t}_{n-1} = \mathbb{E}_{\mathbf{t}_{n-1}|X_{n-1}} p(\mathbf{t}_n|\mathbf{t}_{n-1}), \quad (7)$$

$$p(\mathbf{t}_n|X_n) \propto p(\mathbf{x}_n|\mathbf{t}_n) p(\mathbf{t}_n|X_{n-1}). \quad (8)$$

Пусть на шаге  $n - 1$  получена выборка  $\mathbf{t}_{n-1}^1, \dots, \mathbf{t}_{n-1}^L$  объема  $L$  и веса  $w_{n-1}^1, \dots, w_{n-1}^L$ , по которым можно оценивать статистики распределения  $p(\mathbf{t}_{n-1}|X_{n-1})$  по формуле (6). Тогда с учетом (7) верно:

$$p(\mathbf{t}_n|X_{n-1}) = \mathbb{E}_{\mathbf{t}_{n-1}|X_{n-1}} p(\mathbf{t}_n|\mathbf{t}_{n-1}) \approx \sum_{l=1}^L w_{n-1}^l p(\mathbf{t}_n|\mathbf{t}_{n-1}^l).$$

Это означает, что распределение  $p(\mathbf{t}_n|X_{n-1})$  приближенно является вероятностной смесью из  $L$  компонент вида  $p(\mathbf{t}_n|\mathbf{t}_{n-1}^l)$  с весами  $w_{n-1}^l$ . Следовательно, генерацию точек выборки из распределения  $p(\mathbf{t}_n|X_{n-1})$  можно проводить в два шага: сначала с вероятностями, пропорциональными  $w_{n-1}^l$ , выбирается номер компоненты смеси, а затем очередная точка генерируется из выбранной компоненты. Обозначим полученную таким образом выборку через  $\mathbf{t}_n^1, \dots, \mathbf{t}_n^L$ . Теперь с учетом (8) выборку из распределения  $p(\mathbf{t}_n|X_n)$  можно найти по описанной выше схеме, где в качестве априорного распределения выступает  $p(\mathbf{t}_n|X_{n-1})$ , выборку из которого мы только что сгенерировали. Итоговая схема фильтра частиц представлена в алгоритме 1. Заметим, что в том случае, если на выходе фильтра частиц нас интересует только набор статистик распределений  $p(\mathbf{t}_n|X_n)$ , то генерацию выборки с возвращением нигде проводить не нужно.