

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (государственный университет)
ФИЗТЕХ-ШКОЛА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
КАФЕДРА «ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ»

Панченко Святослав Константинович

Билинейность геометрического произведения для решения задачи декодирования

03.04.01 — Прикладные физика и математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА МАГИСТРА

Научный руководитель:
д.ф.-м.н. Стрижов Вадим Викторович

Москва
2022

Содержание

Введение	4
1 Постановка задачи декодирования в мультивекторном представлении	6
1.1 Постановка задачи декодирования и её обобщения	6
1.2 Переход от фазового представления к мультивекторному	8
1.3 Свойства конформной геометрической алгебры	12
1.4 Представление объектов в конформной алгебре	14
1.5 Постановка задачи в мультивекторном представлении	16
2 Построение мультивекторного представления ряда	17
2.1 Граф пространственно-временного представления ряда	18
2.2 Конформное вложение узлов графа	20
2.3 Формирование мультивекторного представления сигнала	21
2.4 Интерпретация полученных мультивекторов	22
2.5 Алгоритм построения мультивекторного описания	23
3 Вычислительный эксперимент	24
Заключение	29
Список литературы	30

Аннотация

Рассмотрена задача декодирования сигналов, представленных в виде синхронизированных временных рядов. В регрессионной задаче восстановления значений целевого ряда по значениям исходного требуется снизить размерность описания исходного сигнала. Предлагается способ снижения размерности с помощью построения пространственно-временного представления предыстории сигнала в конформной геометрической алгебре. Такое построение опирается на свойство билинейности геометрического произведения алгебры. Искомое низкоразмерное представление в данном подходе получается из коэффициентов мультивектора алгебры, характеризующего последовательность значений временного ряда. Предложенный метод применяется в решении задачи декодирования сигналов электрокортикограмм для восстановления траектории конечности.

Ключевые слова: *задача декодирования сигналов, снижение размерности, конформная геометрическая алгебра, геометрическое произведение, пространственно-временное представление.*

Введение

Актуальность темы. Задача декодирования сигналов – одна из важнейших в области анализа временных рядов. Различные её постановки – регрессионная, авторегрессионная, общая – способны описать широкий класс задач, связанных с рядами, примеры которых рассмотрены в работах [1, 2]. Одним из способов извлечь из сигнала признаковое описание для регрессионной задачи является переход в траекторное, или фазовое, пространство ряда, элементом которого является совокупность последовательных во времени значений ряда заданной длины. Полученное при таком подходе признаковое описание, достаточно богатое для качественного предсказания, имеет слишком высокую размерность для практического применения. Отсюда возникает фундаментальная проблема снижения размерности в фазовом пространстве временного ряда, рассмотренная в [3–5].

Требуется разработать метод снижения размерности фазовых представлений. Такой метод позволяет получить информативные низкоразмерные описания временных рядов, способные улучшить качество и значительно снизить сложность предсказательных моделей. Полученные при помощи этих методов представления активно используются в самых разных прикладных задачах обработки и анализа сигналов.

Существующие решения. Один из подходов к решению данной задачи – метод PLS (*Partial Least Squares* или *Projection to Latent Structures*), описанный, в частности, в работах [6, 7]. В то время как метод главных компонент позволяет отыскать в пространстве значений исходного сигнала подпространство, проекция сигнала на которое имеет максимальную дисперсию, метод PLS осуществляет проектирование в новое пространство как исходного, так и целевого сигнала. Таким образом, ковариация между сигналами моделируется при помощи скрытых переменных.

Ещё один метод отбора признаков, т.е. частный случай методов снижения размерности, QPFS (*Quadratic Programming Feature Selection*), впервые введённый в работе [8] отбирает в регрессионной задаче некоррелированные признаки, наиболее релевантные целевой переменной. Для указанного отбора предлагается минимизировать функционал, где в качестве переменной выступает вектор индикаторов выбранных признаков, после чего в возникающей задаче оптимизации производится линейная релаксация.

В смежных областях распространение получили методы, основанные на пространственно-временном представлении данных, пригодные для широкого класса задач машинного обучения, в том числе связанных с анализом временных рядов. Примеры таких исследований можно найти в работах [?, 9–11]. Такие методы основаны на теории сетей и алгебраической топологии, а вместо матричных представлений прибегают к описанию данных с помощью методов геометрической алгебры – инструмента, обобщающего приёмы линейной алгебры для компактного и единообразного описания линейных подпространств и операторов.

Цель работы. Целью работы является построение нелинейного метода снижения размерности в фазовом пространстве сигнала, заключающегося в формировании

пространственно-временного представления ряда в геометрической алгебре. Предыстории исходного временного ряда предлагается сопоставить мультивектор конформной геометрической алгебры. Этот мультивектор выступает для отрезка сигнала в роли низкоразмерного информативного признакового описания для регрессионной задачи восстановления значений целевого ряда. Требования, предъявляемые к полученным при использовании метода мультивекторам:

снижение размерности относительно длины используемого отрезка временного ряда:

информативность с точки зрения качества решения задачи декодирования сигналов с использованием полученного мультивекторного представления;

интерпретируемость полученных мультивекторов как элементов конформной геометрической алгебры.

Новизна. Предлагается, воспользовавшись аналогами пространственно-временных представлений, описанных в [9,10], построить информативные мультивекторные описания для задачи декодирования. При таком построении мы отказываемся от множества упрощений, допускаемых в вышеупомянутых работах и пользуемся свойствами конформной геометрической алгебры и геометрического произведения для получения уникального признакового описания, позволяющего осуществить высокоточное восстановление значений целевого сигнала.

Основные положения, выносимые на защиту.

1. Предлагается метод снижения размерности в задаче анализа сигналов в виде алгоритма построения мультивекторного описания представления предыстории исходного временного ряда.
2. Подтверждается гипотеза о возможности построения мультивектора, являющегося информативным представлением элемента фазовой траектории сигнала.
3. Полученный метод успешно применяется в прикладной задаче декодирования сигналов электрокортикограмм для предсказания координат конечности.

1 Постановка задачи декодирования в мультивекторном представлении

В данном разделе формально ставится задача декодирования временных рядов. Демонстрируются общие положения геометрической алгебре и осуществляется переход к задаче поиска конформного мультивекторного представления предыстории ряда.

1.1 Постановка задачи декодирования и её обобщения

Поставим задачу восстановления регрессионной зависимости между синхронизированными сигналами, представленными в виде временных рядов, следуя общепринятым обозначениям в постановке задачи декодирования, позаимствованным из [12].

Рассмотрим случай одномерных рядов. Пусть имеется пара $\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y$ – исходный и целевой сигналы, соответственно. Каждый из рядов \mathbf{s} представляет собой последовательность значений $[s_1, \dots, s_T]^\top$ в моменты времени $1, \dots, T$.

Символами $x_t := [\mathbf{s}_x]_t \in \mathbb{R}, y_t := [\mathbf{s}_y]_t \in \mathbb{R}$ обозначим *временные представления* рядов – совокупность измерений сигналов в момент времени t . Далее, *представление предыстории* размерности h исходного сигнала \mathbf{s}_x в момент времени t представляет собой последовательность временных представлений $\mathbf{X}_{t,h} = [x_{t-h+1}, \dots, x_t]^\top \in \mathbb{R}^h$. Наконец, *представление горизонта прогнозирования* размерности p целевого сигнала \mathbf{s}_y в момент времени t – это последовательность временных представлений $\mathbf{Y}_{t,p} = [y_{t+1}, \dots, y_{t+p}]^\top \in \mathbb{R}^p$.

Сформулируем задачу декодирования в регрессионной форме: требуется построить предсказательную модель $\mathbf{f}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}^R : \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}^p$, которая по представлению предыстории исходного сигнала восстанавливает горизонт прогнозирования целевого сигнала в соответствующий момент времени.

Функция $\mathbf{f}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}^R$ выбирается из параметрического семейства:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}^R(\mathbf{X}_{t,h}) = \mathbf{f}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}^R(\mathbf{X}_{t,h}|\boldsymbol{\theta}),$$

где оптимальное значение параметров $\boldsymbol{\theta}^*$ находится минимизацией некоторой функции ошибки:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Y}}_{t,p} &= \mathbf{f}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}^R(\mathbf{X}_{t,h}|\boldsymbol{\theta}), \\ \boldsymbol{\theta}^* &= \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}(\hat{\mathbf{Y}}_{t,p}, \mathbf{Y}_{t,p}). \end{aligned}$$

Отметим, что предыстория $\mathbf{X}_{t,h}$ и горизонт прогнозирования $\mathbf{Y}_{t,p}$ являются элементами траекторных, или фазовых, пространств рядов $\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y$ размерности h и p соответственно, поэтому можно считать, что функция $\mathbf{f}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}^R$ осуществляет отображение между фазовыми пространствами рядов, что проиллюстрировано на Рис. 1.

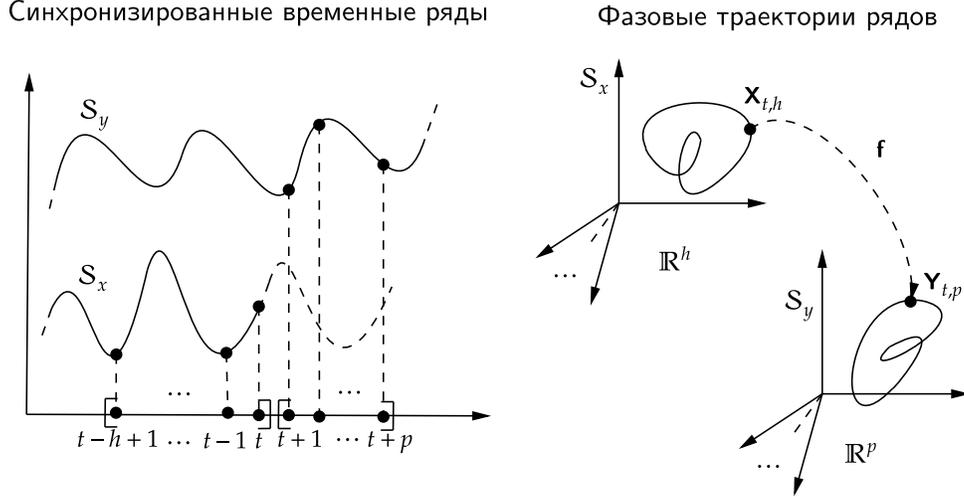


Рис. 1: Регрессионная постановка задачи декодирования. Слева: представление предыстории исходного сигнала и представление горизонта прогнозирования целевого сигнала. Справа: предсказательная модель \mathbf{f} как функция между фазовыми пространствами рядов.

Приведём альтернативные постановки задачи декодирования:

1. Авторегрессионная задача:

построить предсказательную модель $\mathbf{f}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}^{AR} : \mathbb{R}^h \rightarrow \mathbb{R}^p$, которая по представлению предыстории сигнала восстанавливает горизонт прогнозирования того же сигнала:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{t,p} = \mathbf{f}_{\mathbf{Y}\mathbf{Y}}^{AR}(\mathbf{Y}_{t,h}).$$

2. Общая задача:

построить предсказательную модель $\mathbf{f}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}} : \mathbb{R}^{h_1} \times \mathbb{R}^{h_2} \rightarrow \mathbb{R}^p$, которая по представлениям предысторий исходного и целевого сигналов восстанавливает горизонт прогнозирования целевого сигнала:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{t,p} = \mathbf{f}_{\mathbf{X}\mathbf{Y}}(\mathbf{X}_{t,h_1}, \mathbf{Y}_{t,h_2}).$$

Задачу декодирования также можно обобщить на случай многомерных рядов $\mathcal{S}_x = \{\mathbf{s}_x^1, \dots, \mathbf{s}_x^m\}$, $\mathcal{S}_y = \{\mathbf{s}_y^1, \dots, \mathbf{s}_y^r\}$, в случае чего пространства предыстории и горизонта прогнозирования меняются с $\mathbb{R}^h, \mathbb{R}^p$ на $\mathbb{R}^{h \times m}, \mathbb{R}^{p \times r}$.

1.2 Переход от фазового представления к мультивекторному

Прежде чем осуществлять переход к новому низкоразмерному представлению предыстории ряда, формально определим *геометрическую алгебру* и её элементы – *мультивекторы*.

Геометрическая алгебра, или алгебра Клиффорда, – это обобщение линейной алгебры, обеспечивающее единообразное, не зависящее от координат описание линейных подпространств и геометрических операторов как равноправных элементов алгебры, наряду с векторами и скалярами. Аксиоматика и свойства геометрической алгебры подробно обсуждаются в [13, 14], ниже кратко приводятся некоторые важные результаты.

Формально, геометрическая алгебра – это множество \mathcal{G} с определёнными на нём операциями, сложением и умножением (последняя носит название *геометрическое произведение*). Это множество подчиняется следующему набору аксиом:

Аксиома 1. \mathcal{G} – кольцо с единицей, т.е., в частности:

- 1) множество замкнуто относительно операций сложения и произведения;
- 2) сложение и произведение ассоциативны;
- 3) у обеих операций есть *единичный* элемент (0 и 1 соответственно);
- 4) у каждого элемента есть обратный по сложению;
- 5) сложение коммутативно;
- 6) произведение дистрибутивно относительно сложения справа и слева.

Аксиома 2. \mathcal{G} содержит подмножество \mathcal{G}_0 – поле характеристики 0, содержащее единичные элементы алгебры по сложению и умножению: 0 и 1.

Элементы \mathcal{G}_0 назовём 0-векторами или *скалярами*.

Аксиома 3. \mathcal{G} содержит подмножество \mathcal{G}_1 , замкнутое относительно сложения, и для любых $\lambda \in \mathcal{G}_0, \mathbf{v} \in \mathcal{G}_1 : \lambda \mathbf{v} = \mathbf{v} \lambda \in \mathcal{G}_1$.

Таким образом, \mathcal{G}_1 представляет собой линейную алгебру внутри \mathcal{G} , с \mathcal{G}_0 в качестве поля скаляров. Элементы \mathcal{G}_1 назовём 1-векторами или просто *векторами*.

Аксиома 4. Квадрат каждого вектора является скаляром.

Эквивалентная формулировка: симметризованное геометрическое произведение пары векторов, также называемое в геометрической алгебре *внутренним произведением*, является скаляром:

$$\text{для любых } \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{G}_1 : \quad a \rfloor b := \frac{1}{2}(\mathbf{a}\mathbf{b} + \mathbf{b}\mathbf{a}) = \frac{1}{2}((\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 - \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2) \in \mathcal{G}_0.$$

Теперь, пользуясь следствиями из аксиом, можно классифицировать оставшиеся элементы геометрической алгебры. Пусть $r > 1$: произведение r попарно ортогональных векторов назовём *простым r -вектором* (*r -blade*); конечную сумму таких элементов – *r -вектором*. Множество r -векторов обозначим \mathcal{G}_r .

В силу Аксиомы 3, если $A \in \mathcal{G}_r$, то $\lambda A \in \mathcal{G}_r$ для любого скаляра λ . Поэтому \mathcal{G}_r образует линейное пространство для всех r , с \mathcal{G}_0 в качестве поля скаляров.

Аксиома 5. Если $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}_1$, то $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$. Иначе \mathcal{G} есть прямая сумма \mathcal{G}_r .
Аксиома утверждает, в частности, что каждый элемент $A \in \mathcal{G}$ единственным образом представим в виде конечной суммы

$$A = \sum_r A_r, \text{ где } A_r \in \mathcal{G}_r,$$

т.е. A либо является r -вектором для конкретного r , либо является конечной суммой r -векторов для разных r (смешанным мультивектором).

Произвольный элемент геометрической алгебры назовём просто *мультивектором*.

Получим выражение для одной из наиболее интересных операций в геометрической алгебре. Рассмотрим для этого геометрическое произведение пары векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$\mathbf{ab} = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) + \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) = \mathbf{a} \rfloor \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b},$$

где антисимметричная часть

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} := \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba})$$

называется *внешним произведением*. Дадим ему интерпретацию.

1. Случай коллинеарных векторов: если $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, то $\mathbf{ab} - \mathbf{ba} = 0$, произведение \mathbf{ab} коммутует и $\mathbf{ab} = \mathbf{a} \rfloor \mathbf{b}$. При этом $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 0$.
2. Случай ортогональных векторов: если $\mathbf{a} \rfloor \mathbf{b} = 0$, то \mathbf{ab} является простым бивектором, произведение \mathbf{ab} антикоммутирует и $B := \mathbf{ab} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$. При этом:

$$B^2 = \mathbf{abab} = -\mathbf{abba} = -\mathbf{a}^2 \mathbf{b}^2 - \text{скаляр.}$$

3. Общий случай: Представим \mathbf{b} в виде суммы $\mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{b}_{\perp}$, $\mathbf{b}_{\parallel} = \lambda \mathbf{a}$. Тогда

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ab}_{\parallel} + \mathbf{ab}_{\perp} = \mathbf{a} \rfloor \mathbf{b}_{\parallel} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}_{\perp} = \lambda \mathbf{a}^2 + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}_{\perp};$$

$$\text{к тому же, } \mathbf{ab} = \mathbf{a} \rfloor \mathbf{b} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}.$$

В силу единственности разложения (Акс. 5)

$$\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}_{\perp} - \text{бивектор,}$$

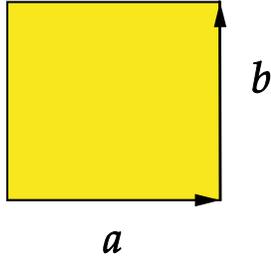
соответствующий ориентированному сегменту плоскости, $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})^2 = -|\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2 \sin^2(\theta)$

Полученный результат можно обобщить следующим образом: пусть $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ – совокупность из r линейно независимых векторов. Тогда их внешнее произведение

$$\mathbf{a}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{a}_r$$

является r -вектором алгебры и соответствует ориентированному r -мерному параллелепипеду в \mathcal{G}_1 . Аналогично можно утверждать, что этот элемент алгебры соответствует r -мерному линейному подпространству \mathcal{G}_1 , образованному линейной оболочкой совокупности векторов. Последнее утверждение стоит понимать в следующем смысле: любой другой базис в этом же линейном подпространстве $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_r$ своим внешним произведением определит такой же элемент геометрической алгебры, с точностью до скалярного множителя. Если же совокупность $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_r$ не является линейно независимой, то их внешнее произведение окажется равным нулю.

$$B = ab = a \wedge b$$



$$a \wedge b = a \wedge b_{\perp}$$

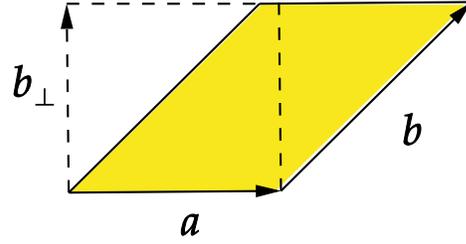


Рис. 2: Внешнее произведение векторов, иллюстрация. Слева: случай ортогональных векторов. Справа: общий случай.

Таким образом, с помощью операции внешнего произведения в геометрической алгебре из линейно независимых векторов можно конструировать элементы, соответствующие линейным подпространствам. Отметим также, что операции внутреннего и внешнего произведения можно обобщить, определив и проинтерпретировав их действия на произвольную пару мультивекторов \mathcal{G} .

Выше было рассмотрено аксиоматическое задание геометрической алгебры. Удобно, однако, рассмотреть векторное пространство, оснащённое квадратичной формой, например, $(\mathbb{R}^{p,q}, Q)$ – пространство столбцов высоты $n = p + q$ с сигнатурой (p, q) . Такое пространство порождает соответствующую геометрическую алгебру $\mathcal{G}^{p,q}$, где подмножества $\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1$ естественным образом наследуются из исходного векторного пространства. Для окончательного задания осталось лишь сопоставить квадрату каждого вектора в алгебре скаляр – это осуществляется с использованием квадратичной формы Q :

$$\text{для любых } \mathbf{a} \in \mathcal{G}_1, \quad \mathbf{a}^2 = Q(\mathbf{a}).$$

Если базисом исходного пространства служила совокупность $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, то базисом в $\mathcal{G}^{p,q}$ послужит объединение базисов $\mathcal{G}_r^{p,q}$ для всех $r = 1, \dots, n$:

базис в \mathcal{G}_0 : $\{1\}$, размерность – 1;

базис в \mathcal{G}_1 : $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, размерность – n ;

базис в \mathcal{G}_2 : $\{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_{n-1} \wedge \mathbf{e}_n\}$, размерность – $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$;

...

базис в \mathcal{G}_n : $\{\mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2 \wedge \mathbf{e}_3 \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_n\}$, размерность – 1.

Подпространство $\mathcal{G}_r^{p,q}$ имеет размерность C_n^r . Геометрическая алгебра $\mathcal{G}^{p,q}$ является, таким образом, линейным пространством размерности:

$$\dim \mathcal{G}^{p,q} = \dim \mathcal{G}_0^{p,q} \oplus \mathcal{G}_1^{p,q} \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_n^{p,q} = \sum_{r=0}^n \dim \mathcal{G}_r^{p,q} = \sum_{r=0}^n C_n^r = 2^n,$$

где $n = p + q$.

В соответствии с Аксиомой 5, каждый элемент $A \in \mathcal{G}$ единственным образом представим в виде конечной суммы $A = \sum_r A_r$, где $A_r \in \mathcal{G}_r$. Введём в соответствии с этим корректно определённый оператор грейда степени r – проектор в подпространство r -векторов:

$$\langle \rangle_r : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}_r, \quad \langle A \rangle_r := A_r.$$

Например, для мультивектора $A = 1 + a \wedge b + c \wedge d \wedge e \wedge f$ в алгебре над пространством размерности $n \geq 4$, в предположении о линейной независимости векторов a, b и c, d, e, f имеем:

$$\langle A \rangle_0 = 1, \quad \langle A \rangle_2 = a \wedge b, \quad \langle A \rangle_4 = c \wedge d \wedge e \wedge f, \quad \langle A \rangle_r = 0 \text{ для } r = 1, r = 3, r > 4.$$

Единичный базисный элемент подпространства \mathcal{G}_n алгебры над пространством размерности n , имеющий вид $I = \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \dots \mathbf{e}_n$, называется элементом гиперобъёма пространства, или псевдоскаляром. Последнее название проистекает из-за сходства одномерных пространств \mathcal{G}_0 и \mathcal{G}_n : оба пространства являются одномерными, и все их элементы отличаются друг от друга не более чем на скалярный множитель.

С псевдоскаляром I в геометрической алгебре связан важный объект – дуальный элемент A^* :

$$A^* = A \rfloor I^{-1} = AI^{-1}.$$

Элемент A^* интерпретируется как обобщение ортогонального дополнения к A в алгебре и в некоторых источниках обозначается A^\perp .

1.3 Свойства конформной геометрической алгебры

Интересующая нас алгебра – это *конформная геометрическая алгебра* над пространством $\mathbb{R}^{4,1}$, обладающая рядом полезных свойств.

Конформная геометрическая алгебра (*Conformal Geometric Algebra*, CGA) – это геометрическая алгебра $\mathcal{G}^{p+1,q+1}$, в общем случае порождённая пространством $\mathbb{R}^{p+1,q+1}$, элементы которой способны описывать действие преобразований в пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ на различные геометрические объекты. Подробное изложение свойств CGA можно найти в работах [15–17]. Рассмотрим классический случай трёхмерного евклидова пространства \mathbb{R}^3 , сигнатура $(p = 3, q = 0)$, и соответствующей конформной алгебры $\mathcal{G}^{4,1}$.

Основные характеристики CGA:

1. Конформные преобразования в \mathbb{R}^3 , т.е. преобразования, сохраняющие углы, представляются в CGA с помощью двухстороннего оператора (sandwiching operator):

$V = v_1 v_2 \dots v_s$, – геометрическое произведение обратимых в $\mathcal{G}^{4,1}$ векторов;

$$X \mapsto VXV^{-1} \text{ для чётного } s;$$

$$X \mapsto -VXV^{-1} \text{ для нечётного } s.$$

Наиболее интересные представители конформных отображений в \mathbb{R}^3 – повороты, трансляции, инверсии и растяжения. Каждому из этих классов преобразований соответствует своё семейство мультивекторов CGA.

2. Геометрические объекты, такие как точки, прямые, сферы, плоскости приобретают естественные представления как элементы конформной алгебры.

Для описания того, каким образом элементы $\mathcal{G}^{4,1}$ могут описывать объекты и преобразования в \mathbb{R}^3 , служит *конформное вложение* F – инъективное отображение из \mathbb{R}^3 в $\mathbb{R}^{4,1}$. Оно задаётся следующим образом:

1. Пусть $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ – базис в пространстве \mathbb{R}^3 . Базис в $\mathbb{R}^{4,1}$ формируется добавлением к предыдущему пары базисных векторов \mathbf{e}_+ и \mathbf{e}_- , ортогональных друг другу и каждому из \mathbf{e}_i . При этом результирующее пятимерное пространство оснащается квадратичной формой с сигнатурой $(4, 1)$, так что в $\mathcal{G}^{4,1}$ $\mathbf{e}_+^2 = +1$, $\mathbf{e}_-^2 = -1$.

2. Осуществляется замена базиса: переход от $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_+, \mathbf{e}_-\}$ к $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_o, \mathbf{e}_\infty\}$. Здесь:

$$\mathbf{e}_o = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_- - \mathbf{e}_+), \quad \mathbf{e}_o^2 = 0;$$

$$\mathbf{e}_\infty = \mathbf{e}_+ + \mathbf{e}_-, \quad \mathbf{e}_\infty^2 = 0.$$

3. Тогда точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ сопоставляется точка $X \in \mathbb{R}^{4,1}$, являющаяся одновременно и вектором-элементом алгебры $\mathcal{G}^{4,1}$ – стандартная форма конформного образа точки:

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{4,1}, \quad X := F(\mathbf{x}) := \mathbf{x} + \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2 \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_o.$$

На самом деле, конформное вложение задаёт *однородную систему координат* для установления соответствия между элементами \mathbb{R}^3 и $\mathbb{R}^{4,1}$ в следующем смысле ([15]): отметим, что квадрат конформного образа X точки \mathbf{x} равен нулю:

$$\begin{aligned} X^2 &= \left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}\|_2^2 - 1)\mathbf{e}_+ + \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}\|_2^2 + 1)\mathbf{e}_- \right)^2 = \\ &= \|\mathbf{x}\|_2^2 + \frac{1}{4}(\|\mathbf{x}\|_2^4 - 2\|\mathbf{x}\|_2^2 + 1) - \frac{1}{4}(\|\mathbf{x}\|_2^4 + 2\|\mathbf{x}\|_2^2 + 1) = 0. \end{aligned}$$

Также равен нулю квадрат элемента αX для любого ненулевого скаляра α . Конформное вложение предполагает, что все точки вида αX являются взвешенными (с весом $|\alpha|$) ориентированными (в соответствии со знаком α) представлениями одной и той же точки $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Отображение из \mathbb{R}^3 в $\mathbb{R}^{4,1}$, для определённости, строится таким образом, чтобы начало координат в \mathbb{R}^3 отображалось в вектор \mathbf{e}_o . Индекс o здесь соответствует слову *origin*, что означает в точности начало координат.

В силу вышесказанного, множество точек вида αX формирует класс эквивалентности. Для каждого такого класса выбирается представитель таким образом, что в его разложении по базису коэффициент при \mathbf{e}_o оказывается равен 1, в соответствии со стандартной формой конформного образа. Произвольный элемент $Y \in \mathbb{R}^{4,1}$, имеющий ненулевой коэффициент при \mathbf{e}_o можно привести к такой форме с помощью нормализации:

$$\hat{Y} = \frac{Y}{-Y \rfloor \mathbf{e}_o}.$$

Геометрический смысл элемента \mathbf{e}_o заключается в том, что это образ начала координат в \mathbb{R}^3 : $\mathbf{x} = 0 \Rightarrow X = \mathbf{e}_o$. Для отыскания геометрического смысла элемента \mathbf{e}_∞ рассмотрим ненормализованный образ точки \mathbf{x} – элемент $\alpha \hat{X}$, где выберем $\alpha = \frac{2}{\|\mathbf{x}\|_2^2}$, после чего устремим $\|\mathbf{x}\|_2$ в бесконечность:

$$\lim_{\|\mathbf{x}\|_2 \rightarrow \infty} \alpha \hat{X} = \frac{2}{\|\mathbf{x}\|_2^2} \left(\mathbf{x} + \frac{1}{2}\|\mathbf{x}\|_2^2 \mathbf{e}_\infty + \mathbf{e}_o \right) = \mathbf{e}_\infty.$$

Таким образом, \mathbf{e}_∞ соответствует точке в бесконечности.

Найдём внутреннее произведение пары конформных образов X_1, X_2 :

$$\begin{aligned} X_1 \rfloor X_2 &= \left(\mathbf{x}_1 + \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}_1\|_2^2 - 1)\mathbf{e}_+ + \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}_1\|_2^2 + 1)\mathbf{e}_- \right) \rfloor \left(\mathbf{x}_2 + \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}_2\|_2^2 - 1)\mathbf{e}_+ + \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}_2\|_2^2 + 1)\mathbf{e}_- \right) = \\ &= \langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \rangle - \frac{1}{2}(\|\mathbf{x}_1\|_2^2 + \|\mathbf{x}_2\|_2^2) = -\frac{1}{2}\|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\|_2^2, \end{aligned}$$

т.е. внутреннее произведение конформных образов точек характеризует евклидово расстояние между ними в исходном пространстве.

1.4 Представление объектов в конформной алгебре

Из вышеприведённого вида конформного вложения и его свойств можно получить в качестве следствий вид мультивекторов, соответствующих различным семействам конформных отображений в \mathbb{R}^3 , вывод этих выражений приведён в [15]:

1. Трансляции.

Трансляция на вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ задаётся следующими элементами:

$$T_{\mathbf{a}} = 1 + \frac{\mathbf{e}_{\infty} \mathbf{a}}{2}, \quad T_{\mathbf{a}}^{-1} = 1 - \frac{\mathbf{e}_{\infty} \mathbf{a}}{2};$$

$$T_{\mathbf{a}} F(\mathbf{x}) T_{\mathbf{a}}^{-1} = F(\mathbf{x} + \mathbf{a}).$$

2. Повороты.

Поворот на угол θ в плоскости, характеризующейся единичным бивектором $I_{(2)}$, задаётся следующими элементами:

$$R = e^{I_{(2)}\theta/2}, \quad R^{-1} = e^{-I_{(2)}\theta/2};$$

$$R F(\mathbf{x}) R^{-1} = F(R\mathbf{x}R^{-1}) = F(\mathbf{x}').$$

3. Инверсии.

Инверсия $\mathbf{x} \mapsto \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^2}$ задаётся следующими элементами:

$$V = V^{-1}e_+;$$

$$-V F(\mathbf{x}) V \propto F\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^2}\right).$$

4. Растяжения.

Растяжение в $\alpha > 0$ раз относительно начала координат задаётся следующими элементами:

$$D_{\alpha} = \cosh\left(\frac{-\log \alpha}{2}\right) + \sinh\left(\frac{-\log \alpha}{2}\right) \mathbf{e}_{\infty} \wedge \mathbf{e}_o;$$

$$D_{\alpha}^{-1} = \cosh\left(\frac{-\log \alpha}{2}\right) - \sinh\left(\frac{-\log \alpha}{2}\right) \mathbf{e}_{\infty} \wedge \mathbf{e}_o;$$

$$D_{\alpha} F(\mathbf{x}) D_{\alpha}^{-1} \propto F(\alpha \mathbf{x}).$$

Также приведём представления основных геометрических объектов \mathbb{R}^3 в CGA:

1. Точки:

$$X = F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \frac{1}{2} \|\mathbf{x}\|_2^2 \mathbf{e}_{\infty} + \mathbf{e}_o.$$

2. Окружности:

$$C = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3,$$

где $X_1 = F(\mathbf{x}_1)$, $X_2 = F(\mathbf{x}_2)$, $X_3 = F(\mathbf{x}_3)$ – конформные образы точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, лежащих на окружности и не лежащих на одной прямой.

3. Прямые:

$$L = X_1 \wedge X_2 \wedge e_\infty,$$

где $X_1 = F(\mathbf{x}_1), X_2 = F(\mathbf{x}_2)$ – конформные образы точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, лежащих на прямой. Отметим схожесть представлений окружности и прямой: альтернативная интерпретация такова, что прямая – это окружность бесконечного радиуса, проведённая через точку в бесконечности.

4. Сферы:

$$S = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge X_4,$$

где $X_1 = F(\mathbf{x}_1), X_2 = F(\mathbf{x}_2), X_3 = F(\mathbf{x}_3), X_4 = F(\mathbf{x}_4)$ – конформные образы точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$, лежащих на сфере и не лежащих в одной плоскости.

5. Плоскости:

$$P = X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \wedge e_\infty,$$

где $X_1 = F(\mathbf{x}_1), X_2 = F(\mathbf{x}_2), X_3 = F(\mathbf{x}_3)$ – конформные образы точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, лежащих на плоскости и не лежащих на одной прямой. Отметим схожесть представлений сферы и плоскости: альтернативная интерпретация такова, что плоскость – это сфера бесконечного радиуса, проведённая через точку в бесконечности.

На Рис. 3 демонстрируется применение методов конформной геометрической алгебры для описания вращения окружности вокруг прямой с последующим отражением в плоскости.

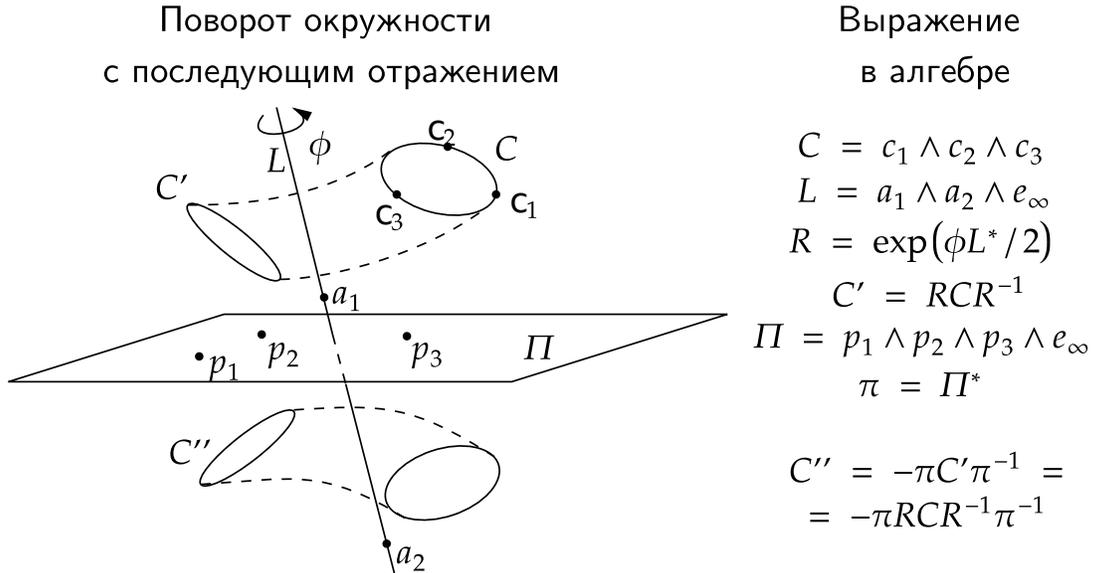


Рис. 3: Применение CGA для описания композиции преобразований в \mathbb{R}^3 Слева: иллюстрация преобразования – поворот вокруг прямой с отражением в плоскости, в качестве объекта выступает окружность. Справа: применение преобразования к окружности в CGA.

1.5 Постановка задачи в мультивекторном представлении

Вновь обратимся к задаче декодирования, формально поставленной в разделе 1.1. В возникающей регрессионной постановке в качестве признакового описания для предсказания горизонта прогнозирования $\mathbf{Y}_{t,p}$ целевого ряда в момент времени t используется предыстория $\mathbf{X}_{t,h}$ исходного ряда, представляющая собой вектор размерности h в случае одномерного сигнала. В данной задаче требуется снизить размерность h признакового описания.

Выдвигается следующая гипотеза: в конформной геометрической алгебре существуют мультивекторы $V_t \in \mathcal{G}^{4,1}$, описывающие пространственно-временные характеристики и закономерности сигнала, одновременно с этим подавляющие шум. Такие векторы являются искомым низкоразмерным информативным представлением предыстории $\mathbf{X}_{t,h} \in \mathbb{R}^h$:

$$V_t = \mathbf{g}(\mathbf{X}_{t,h}).$$

Предсказательная модель, в таком случае, формируется в виде композиции:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{t,p} = \mathbf{f}_{\mathbf{XY}}^R(\mathbf{X}_{t,h}) = \tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{g}(\mathbf{X}_{t,h})) = \tilde{\mathbf{f}}(V_t).$$

Функция $\tilde{\mathbf{f}}$ выбирается из параметрического семейства: $\tilde{\mathbf{f}}(V_t) = \tilde{\mathbf{f}}(V_t|\boldsymbol{\theta})$, где оптимальное значение параметров $\boldsymbol{\theta}^*$ находится минимизацией функции ошибки:

$$\boldsymbol{\theta}^* = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \mathcal{L}(\hat{\mathbf{Y}}_{t,p}, \mathbf{Y}_{t,p}).$$

Задача снижения размерности, окончательно, сводится к тому, чтобы отыскать отображение $\mathbf{g} : \mathbb{R}^h \rightarrow \mathcal{G}^{4,1}$, позволяющее сопоставить предыстории $\mathbf{X}_{t,h} \in \mathbb{R}^h$ её низкоразмерное мультивекторное представление $V_t \in \mathcal{G}^{4,1}$.

2 Построение мультивекторного представления ряда

В данном разделе описывается алгоритм построения пространственно-временного представления сигнала в конформной геометрической алгебре. Этот алгоритм, в частности, осуществляет преобразование $g : \mathbb{R}^h \rightarrow \mathcal{G}^{4,1}$ и позволяет построить в CGA мультивектор, характеризующий предысторию исходного сигнала. Алгоритм опирается на результаты работ [9], [10] и разбивается на три основных шага:

1. В трёхмерном пространстве строится граф, задающий пространственную структуру предыстории.
2. Граф погружается в $\mathcal{G}^{4,1}$ с помощью конформного вложения.
3. Результирующие мультивекторы подвергаются преобразованиям, после чего трансформируются в представление предыстории.

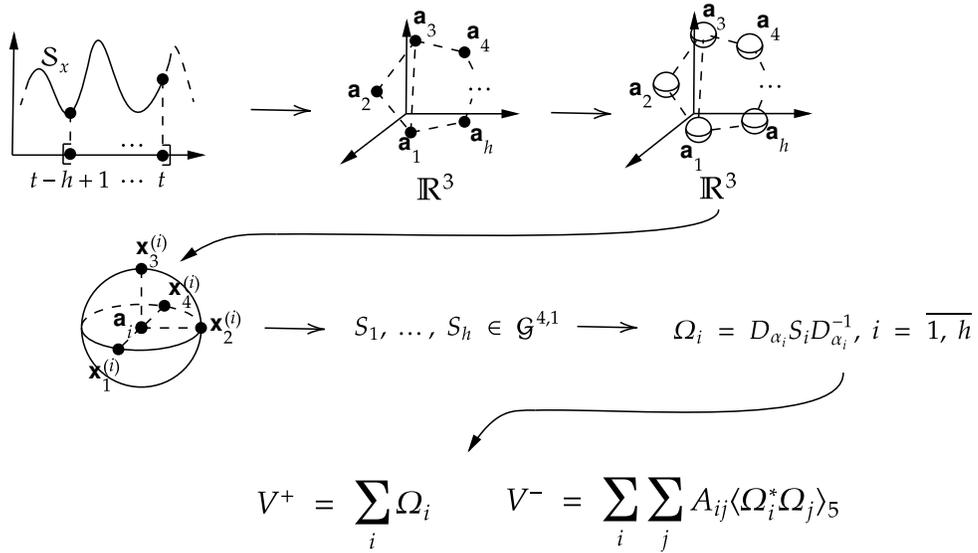


Рис. 4: Иллюстрация алгоритма, осуществляющего преобразование предыстории сигнала в его мультивекторное представление

В дальнейших подразделах опишем каждый из шагов алгоритма более подробно.

2.1 Граф пространственно-временного представления ряда

Для формирования интерпретируемого мультивектора конформной алгебры удобно сначала сформировать геометрическую структуру в пространстве \mathbb{R}^3 , которая затем отображается в $\mathcal{G}^{4,1}$. В качестве такой структуры служит граф с вершинами в \mathbb{R}^3 , и его построение становится первым шагом на пути к получению пространственно-временного представления ряда.

В соответствии с выбранным значением размерности исходного призакового описания h (т.е. длины предыстории исходного ряда) расположим h точек $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_h \in \mathbb{R}^3$. Эти точки выступают в роли узлов графа. Между построенными вершинами графа проведём ребра и обозначим за $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{h \times h}$ его матрицу смежности:

$$\mathbf{A}_{ij} = 1 \Leftrightarrow \text{ между вершинами } \mathbf{a}_i \text{ и } \mathbf{a}_j \text{ проведено ребро.}$$

Итого, получим граф пространственно-временного представления $H = (V_H, E_H)$, где

- $V_H = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_h\}$ – множество вершин графа;
- $E_H = \{(\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j) \mid i, j = 1, \dots, h, i < j, \mathbf{A}_{ij} = 1\}$ – множество рёбер графа.

Разместим также сферы одинакового радиуса r с центрами в каждом из узлов графа. Иллюстрация полученного представлена на Рис. 5.

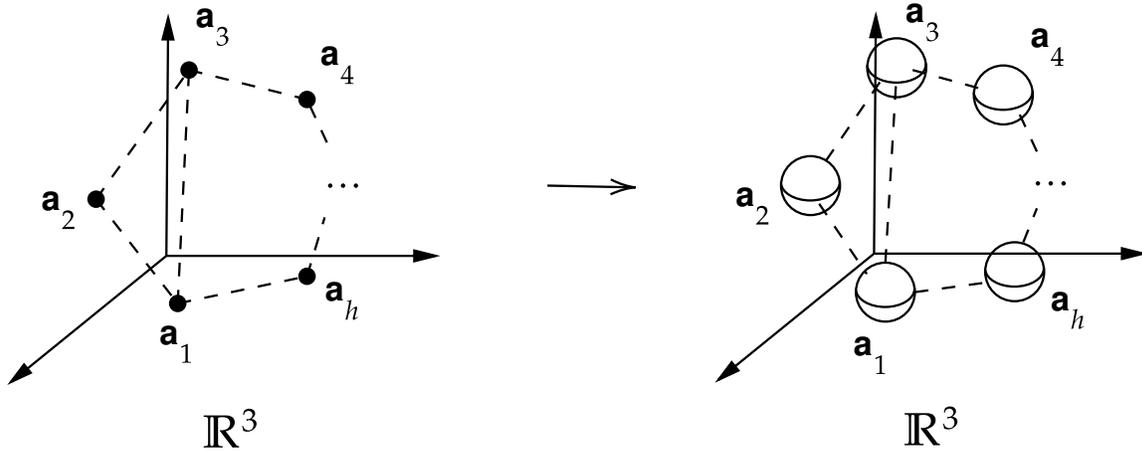


Рис. 5: Граф пространственно-временного представления ряда. Слева: размещение вершин в \mathbb{R}^3 и проведение рёбер графа. Справа: размещение сфер одинакового радиуса в каждом из узлов графа.

Радиусы сфер в дальнейшем послужат для учёта значений временного ряда в результирующем мультивекторе, в то время как координаты вершин графа определяют пространственную структуру представления.

Отметим, что координаты вершин \mathbf{a}_i , матрица смежности графа \mathbf{A} , определяющая множество его рёбер, и радиусы размещённых в узлах сфер r являются структурными параметрами пространственно-временного представления. Существует несколько подходов к выбору значений этих параметров, два из них проиллюстрируем на примере координат:

1. Координаты вершин графа могут функционально зависеть от значений предыстории временного ряда:

$$\mathbf{a}_i = (a_{i,x}, a_{i,y}, a_{i,z})^\top = \left(f_{i,x}(\mathbf{X}_{t,h}), f_{i,y}(\mathbf{X}_{t,h}), f_{i,z}(\mathbf{X}_{t,h}) \right)^\top.$$

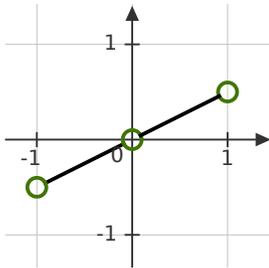
Альтернативно, координаты могут функционально зависеть от дополнительной информации, сопутствующей исходному сигналу (пространственное размещение датчиков, регистрирующих сигнал, частоты и т.п.).

2. Координаты могут выбираться согласно predetermined пространственным конфигурациям и не зависеть от значений предыстории ряда, оставаясь постоянными на всём рассматриваемом временном промежутке:

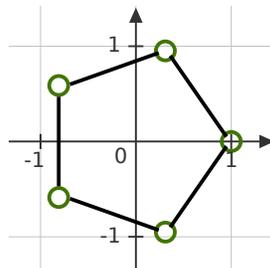
$$\mathbf{a}_i = (a_{i,x}, a_{i,y}, a_{i,z})^\top = \text{const.}$$

Для второго подхода представим некоторые частоиспользуемые predetermined конфигурации-пресеты графов. Проиллюстрируем их на Рис. 6.

(a) Простейшая линейная конфигурация, 3 узла



(b) Кольцевая конфигурация, 5 узлов



(c) Полносвязная круговая конфигурация, 10 узлов

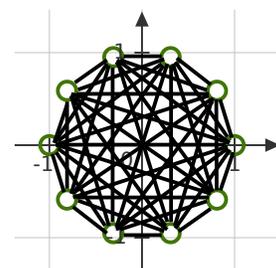


Рис. 6: Примеры конфигураций графов пространственно-временного представления ряда. Вершины графов (b) и (c) расположены на единичной окружности.

Результаты исследований [9] демонстрируют, что круговое расположение узлов графа обеспечивает больший по сравнению с линейной конфигурацией объём пересечения размещённых в узлах сфер, что в свою очередь позволяет лучше отражать периодические закономерности в значениях временного ряда. Поэтому в данной работе предпочтение отдаётся именно пресетам с расположением вершин на окружности.

2.2 Конформное вложение узлов графа

Размещение сфер в узлах графа позволит нам теперь осуществить переход от точек в \mathbb{R}^3 к мультивекторам $\mathcal{G}^{4,1}$ с помощью конформного вложения. При этом в качестве объектов, образы которых сформируют искомый мультивектор в конформной алгебре, выступают именно сферы: сферы в конформной алгебре представляются естественным образом в виде 4-векторов (раздел 1.4), следовательно, как и точки, они являются элементами пятимерного подпространства в CGA (раздел 1.2). Процедура проиллюстрирована на Рис. 7.

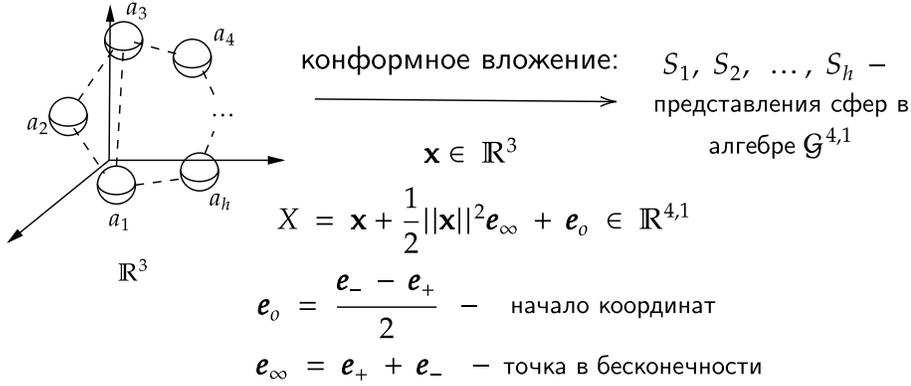


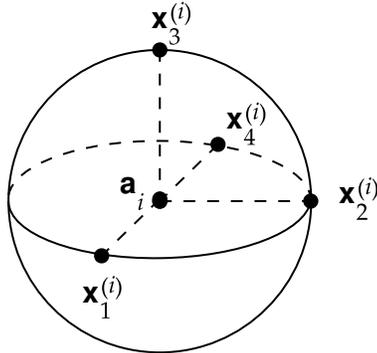
Рис. 7: Получение конформных представлений сфер в узлах графа.

Конформное представление сферы S_i формируется как внешнее произведение четырёх конформных образов точек $\mathbf{x}_1^{(i)}, \mathbf{x}_2^{(i)}, \mathbf{x}_3^{(i)}, \mathbf{x}_4^{(i)}$, лежащих на сфере в \mathbb{R}^3 и не лежащих в одной плоскости:

$$S_i = X_1^{(i)} \wedge X_2^{(i)} \wedge X_3^{(i)} \wedge X_4^{(i)},$$

где $X_1^{(i)} = F(\mathbf{x}_1^{(i)})$, $X_2^{(i)} = F(\mathbf{x}_2^{(i)})$, $X_3^{(i)} = F(\mathbf{x}_3^{(i)})$, $X_4^{(i)} = F(\mathbf{x}_4^{(i)})$ – конформные образы точек $\mathbf{x}_1^{(i)}, \mathbf{x}_2^{(i)}, \mathbf{x}_3^{(i)}, \mathbf{x}_4^{(i)}$.

Для определённости, выберем на каждой из сфер следующие точки (Рис. 8):



$$\mathbf{x}_1^{(i)} = \mathbf{a}_i + (r, 0, 0)^\top$$

$$\mathbf{x}_2^{(i)} = \mathbf{a}_i + (0, r, 0)^\top$$

$$\mathbf{x}_3^{(i)} = \mathbf{a}_i + (0, 0, r)^\top$$

$$\mathbf{x}_4^{(i)} = \mathbf{a}_i + (-r, 0, 0)^\top$$

Рис. 8: Выбор точек на сфере в \mathbb{R}^3 .

2.3 Формирование мультивекторного представления сигнала

Из полученных на предыдущем шаге конформных представлений сфер S_1, \dots, S_h получим искомый мультивектор, характеризующий отрезок временного ряда. До сих пор для построения $S_1, \dots, S_h \in \mathcal{G}^{4,1}$ было использовано лишь знание размерности предыстории исходного ряда, использующейся для предсказания целевого сигнала, но не была использована сама последовательность значений временного ряда.

Пусть зафиксирован момент времени t и имеется представление предыстории $\mathbf{X}_{t,h}$. На каждую из сфер S_1, \dots, S_h действуем оператором растяжения конформной алгебры с разными коэффициентами. В качестве коэффициентов растяжения α_i предлагается взять непосредственно сами значения временного ряда из рассматриваемой предыстории $\mathbf{X}_{t,h}$:

$$\alpha_i := x_{t-h+i}, \quad i = \overline{1, h}.$$

Сферы S_i под действием оператора приобретают вид:

$$\Omega_i := D_{\alpha_i} S_i D_{\alpha_i}^{-1},$$

где произведение элементов алгебры $D_{\alpha_i} S_i D_{\alpha_i}^{-1}$ описывает действие двухстороннего оператора растяжения:

$$D_{\alpha_i} = \cosh\left(\frac{-\log \alpha_i}{2}\right) + \sinh\left(\frac{-\log \alpha_i}{2}\right) \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_o;$$

$$D_{\alpha_i}^{-1} = \cosh\left(\frac{-\log \alpha_i}{2}\right) - \sinh\left(\frac{-\log \alpha_i}{2}\right) \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_o.$$

Из элементов Ω_i в конформной геометрической алгебре сформируем низкоразмерное представление предыстории ряда $\mathbf{X}_{t,h}$ – мультивекторы V_t^+ и V_t^- (\mathbf{A} – матрица смежности исходного графа H в \mathbb{R}^3):

$$V_t^+ = \sum_{i=1}^h \Omega_i, \quad V_t^- = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^h \mathbf{A}_{ij} \langle \Omega_i^* \Omega_j \rangle_5.$$

Мультивектор V_t^+ является элементом 5-мерного подпространства, а мультивектор V_t^- – элементом одномерного подпространства в $\mathcal{G}^{4,1}$. Действительно, по построению мультивектор V_t^+ представляет собой 4-вектор и, следовательно, лежит в линейной оболочке элементов $\{\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_+, \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_-, \dots, \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_+ \mathbf{e}_-\}$, в то время как мультивектор V_t^- пропорционален псевдоскаляру алгебры.

Совокупность из шести коэффициентов разложения V_t^+ и V_t^- по базису в $\mathcal{G}^{4,1}$ ($V_{t,1}^+, \dots, V_{t,5}^+, V_{t,1}^-$) и предлагается использовать в качестве признакового описания в задаче предсказания горизонта $\mathbf{Y}_{t,p}$.

2.4 Интерпретация полученных мультивекторов

Проинтерпретируем полученные представления.

1. Мультивектор $V_t^+ = \sum_{i=1}^h \Omega_i$ обладает следующим свойством: сумма его коэффициентов $\sum_{i=5}^5 V_{t,i}^+$ представляет собой сглаженную, незашумлённую оценку значений сигнала, если последовательность мультивекторов V_t^+ выстроить в виде временного ряда, $t = h, \dots, T$. Эффект проиллюстрирован на Рис. 9.

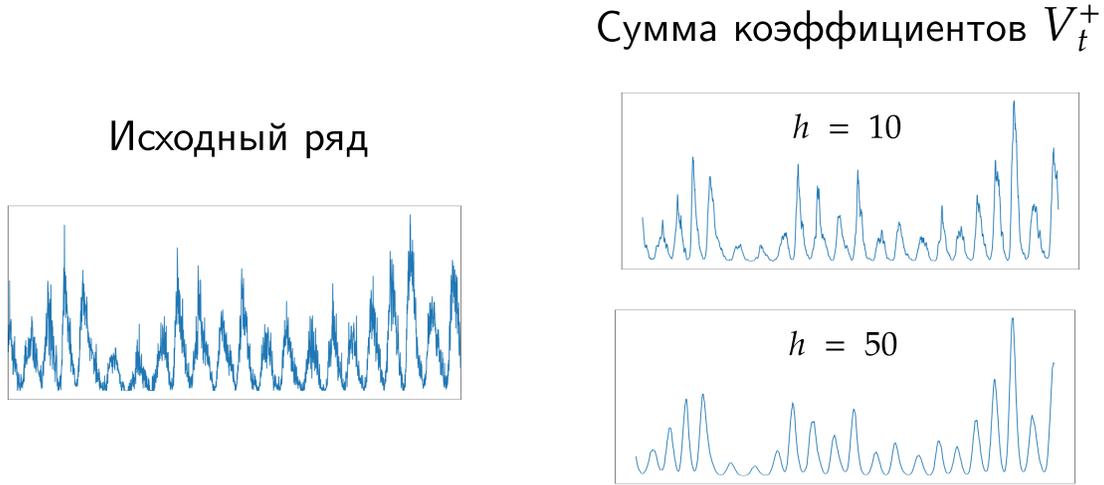


Рис. 9: Интерпретация суммы коэффициентов V^+ .

2. Коэффициент, соответствующий мультивектору $V_t^- = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^h \mathbf{A}_{ij} \langle \Omega_i^* \Omega_j \rangle_5$, характеризует суммарный объём пересечения растянутых сфер Ω_i (Рис. 10 и, как показано в [9], может являться информативным признаком при описании данных с помощью пространственно-временного представления.

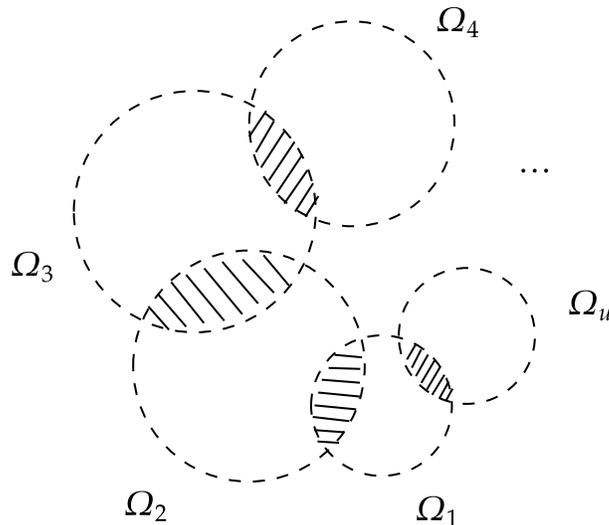


Рис. 10: Интерпретация коэффициента V^- .

2.5 Алгоритм построения мультивекторного описания

Собирая воедино результаты раздела, получаем окончательный вид алгоритма построения низкоразмерного информативного мультивектора для использования в качестве признакового описания в задаче декодирования.

Algorithm 1 Алгоритм построения мультивекторного описания сигнала

Input: предыстория ряда $\mathbf{X}_{t,h}$, её размерность h , координаты вершин графа \mathbf{a}_i , матрица смежности \mathbf{A} , радиус сфер в узлах графа r .

- 1: Построение графа пространственно-временного представления в \mathbb{R}^3 . В каждой вершине графа \mathbf{a}_i размещается сфера радиуса r .
- 2: Получение конформных представлений сфер в узлах графа:

$$S_i = X_1^{(i)} \wedge X_2^{(i)} \wedge X_3^{(i)} \wedge X_4^{(i)},$$

$$X_1^{(i)} = F(\mathbf{x}_1^{(i)}), \quad X_2^{(i)} = F(\mathbf{x}_2^{(i)}), \quad X_3^{(i)} = F(\mathbf{x}_3^{(i)}), \quad X_4^{(i)} = F(\mathbf{x}_4^{(i)}),$$

$$\mathbf{x}_1^{(i)} = \mathbf{a}_i + (r, 0, 0)^\top,$$

$$\mathbf{x}_2^{(i)} = \mathbf{a}_i + (0, r, 0)^\top,$$

$$\mathbf{x}_3^{(i)} = \mathbf{a}_i + (0, 0, r)^\top,$$

$$\mathbf{x}_4^{(i)} = \mathbf{a}_i + (-r, 0, 0)^\top.$$

- 3: Действие операторами растяжения конформной алгебры на сферы S_i :

$$\Omega_i := D_{\alpha_i} S_i D_{\alpha_i}^{-1},$$

$$\alpha_i := x_{t-h+i}, \quad i = \overline{1, h},$$

$$D_{\alpha_i} = \cosh\left(\frac{-\log \alpha_1}{2}\right) + \sinh\left(\frac{-\log \alpha_1}{2}\right) \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_o,$$

$$D_{\alpha_i}^{-1} = \cosh\left(\frac{-\log \alpha_1}{2}\right) - \sinh\left(\frac{-\log \alpha_1}{2}\right) \mathbf{e}_\infty \wedge \mathbf{e}_o.$$

- 4: Получение результирующего мультивектора

$$V^+ = \sum_{i=1}^h \Omega_i, \quad V^- = \sum_{i=1}^h \sum_{j=1}^h \mathbf{A}_{ij} \langle \Omega_i^* \Omega_j \rangle_5.$$

Output: шесть коэффициентов $(V_1^+, \dots, V_5^+, V_1^-)$ разложения мультивектора $V^+ + V^-$ по базису алгебры

3 Вычислительный эксперимент

В этом разделе приведём результаты вычислительного эксперимента на одном из датасетов базы данных [18]. Данные представляют собой сигналы электрокортикограммы, полученные с электродов в мозгу обезьяны, которая одновременно с этим осуществляет определённые движения – двигает лапами вслед за едой. Задача декодирования состоит в предсказании координат сочленений конечности обезьяны по сигналам электрокортикограмм. Исходный временной ряд кортикограммы 64-мерный (по числу электродов, регистрирующих сигналы), целевой ряд трёхмерный (3 координаты сочленения), примеры рядов проиллюстрированы на Рис. 11

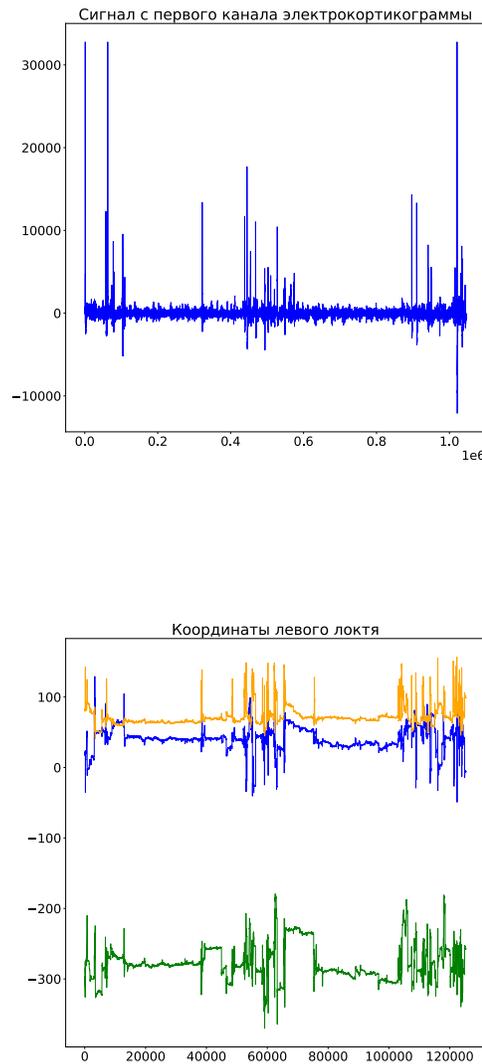


Рис. 11: Примеры временных рядов датасета.

Для многомерного исходного ряда мультивекторные представления каждого из 64 сигналов конкатенируются в признаковый вектор размерности 64×6 , который используется для построения предсказания согласно разделу 1.5. В качестве предсказательной модели используются линейные модели с регуляризаторами, полносвязные нейросети, рекуррентные нейросети и др.

Ниже приведём иллюстрации результатов решения задачи декодирования нейросетевой полносвязной моделью для двух значений ширины окна предыстории: $h = 10$ и $h = 25$. Архитектура выбранной сети предполагает пять внутренних слоёв с числом нейронов 512, 1024, 512, 256, 128 соответственно, в качестве внутреннего критерия качества выбирается MAE. Отметим, что в данном эксперименте каждая из трёх координат каждого из сочленений предсказывалась независимо отдельной моделью.

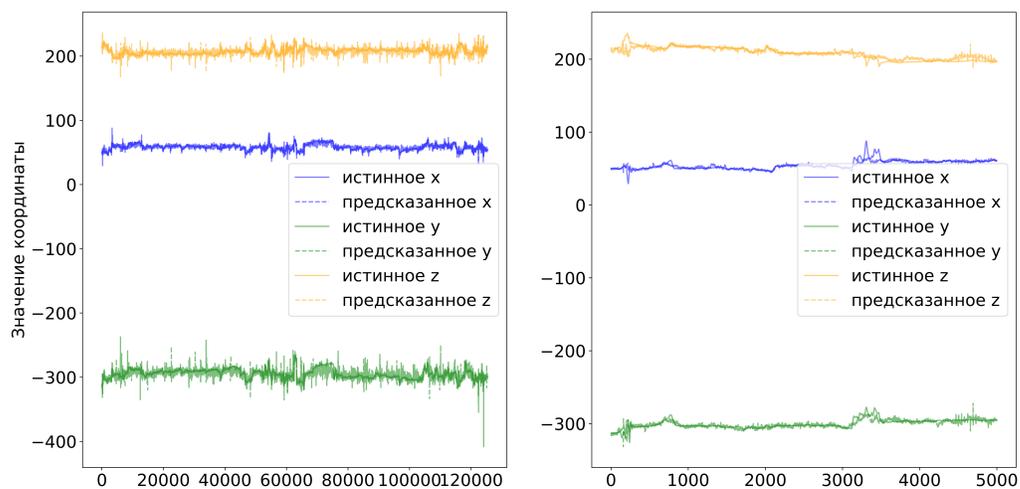
В качестве внешнего критерия оценки качества решения задачи используем коэффициент корреляции Пирсона между предсказанными и истинными значениями рядов на тестовой выборке:

$$\text{corr}\left(\hat{\mathbf{Y}}_{t,p}, \mathbf{Y}_{t,p}\right) = \frac{\text{cov}\left(\hat{\mathbf{Y}}_{t,p}, \mathbf{Y}_{t,p}\right)}{\sqrt{\text{cov}\left(\mathbf{Y}_{t,p}, \mathbf{Y}_{t,p}\right)} \sqrt{\text{cov}\left(\hat{\mathbf{Y}}_{t,p}, \hat{\mathbf{Y}}_{t,p}\right)}}$$

Значение коэффициента измеряется на кросс-валидации.

Результаты сравнения решения для двух значений размерности предыстории представлены на рисунках ниже. В среднем удалось добиться коэффициента корреляции порядка 0.9, что не уступает большинству методов решения задачи декодирования со снижением размерности в применении к данному датасету.

Декодирование сигналов ECoG: левое плечо, $\text{corr} = 0.84 \pm 0.04$



Декодирование сигналов ECoG: левое плечо, $\text{corr} = 0.8 \pm 0.05$

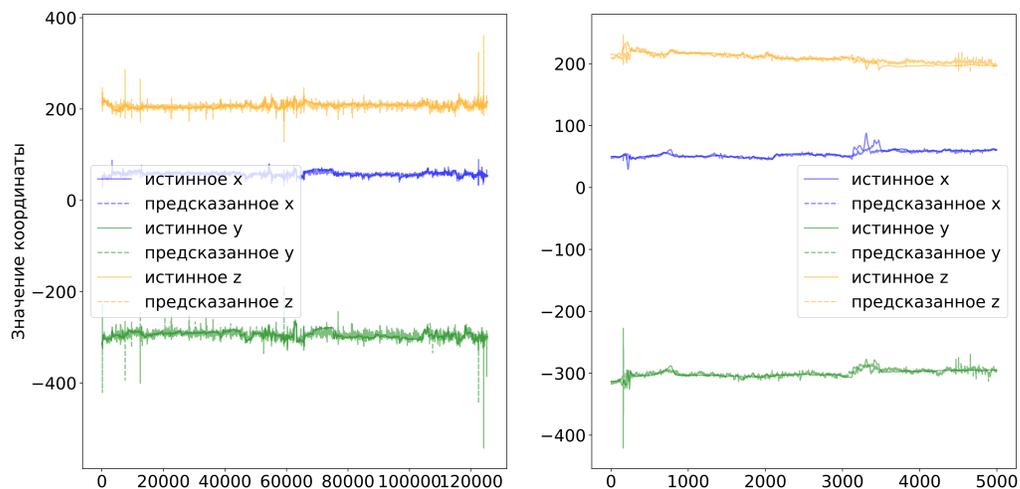
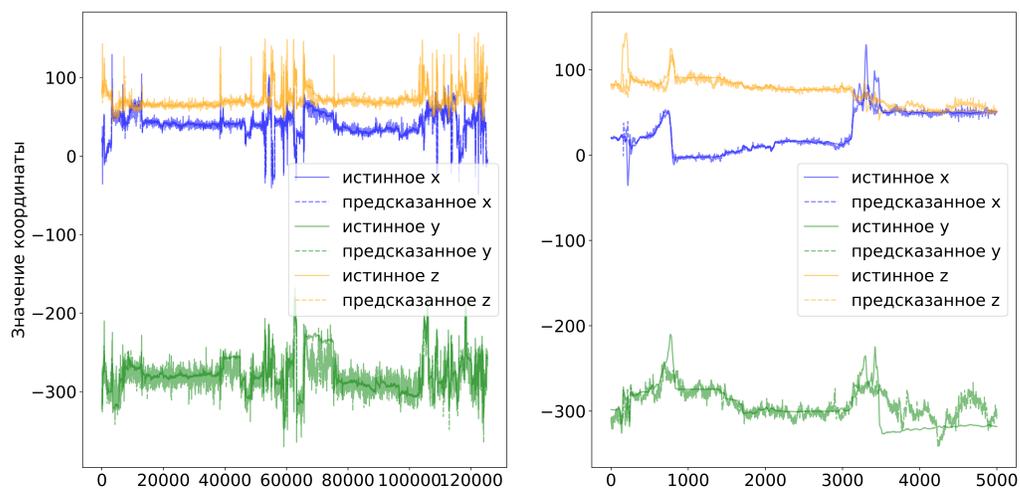


Рис. 12: Сверху: $h = 10$. Снизу: $h = 25$

Декодирование сигналов ECoG: левый локоть, corr = 0.88 ± 0.06



Декодирование сигналов ECoG: левый локоть, corr = 0.86 ± 0.07

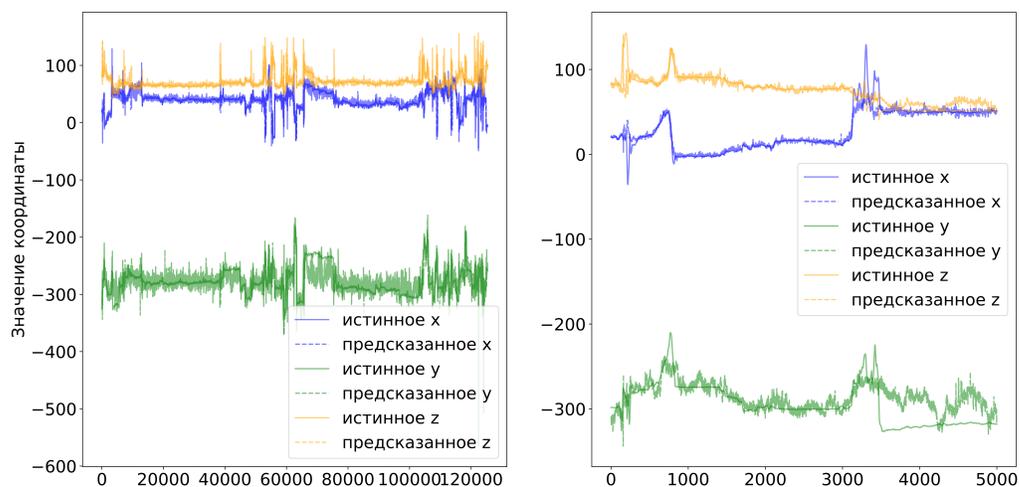
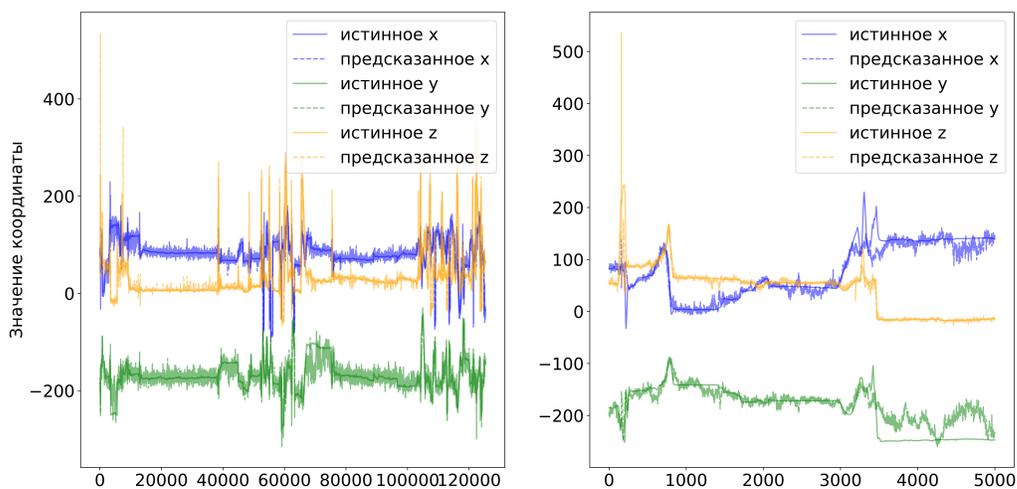


Рис. 13: Сверху: $h = 10$. Снизу: $h = 25$

Декодирование сигналов ECoG: левое запястье, $\text{corr} = 0.94 \pm 0.04$



Декодирование сигналов ECoG: левое запястье, $\text{corr} = 0.92 \pm 0.06$

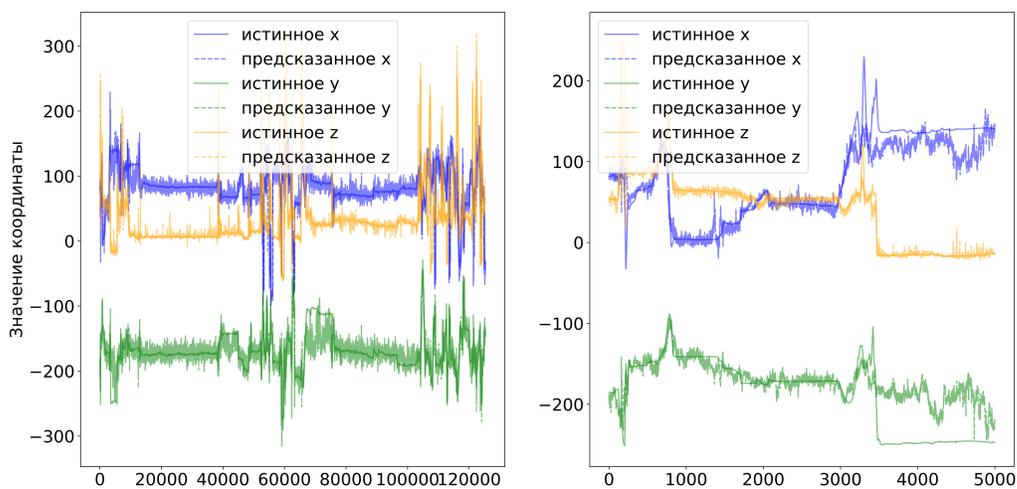


Рис. 14: Сверху: $h = 10$. Снизу: $h = 25$

Заключение

Предложен нелинейный метод снижения размерности в задаче декодирования сигналов, позволяющий построить информативное шестимерное представление элемента фазовой траектории исходного сигнала в виде мультивектора. В методе формируется пространственно-временное представление отрезка временного ряда в виде графа в трёхмерном пространстве, узлы которого затем погружаются в конформную геометрическую алгебру. Применение метода позволило восстановить траектории движения конечностей обезьяны по сигналам электрокортиграммы головного мозга, качество восстановления не уступает альтернативным методам при гораздо большей степени сжатия данных. Дальнейшее развитие работы подразумевает изучение свойств полученных мультивекторных описаний рядов под действием операторов алгебры, отказ от предопределённой пространственной конфигурации представления и подробное исследование качества решения задачи декодирования в зависимости от структурных параметров метода.

Список литературы

- [1] Tijl Grootswagers, Susan G. Wardle, and Thomas A. Carlson. Decoding dynamic brain patterns from evoked responses: A tutorial on multivariate pattern analysis applied to time series neuroimaging data. *Journal of Cognitive Neuroscience*, 29(4):677–697, April 2017.
- [2] Wei Bao, Jun Yue, and Yulei Rao. A deep learning framework for financial time series using stacked autoencoders and long-short term memory. *PLOS ONE*, 12(7):e0180944, July 2017.
- [3] Vadim Strijov Roman Isachenko, Mariia Vladimirova. Dimensionality reduction for time series decoding and forecasting problems. *DEStech Transactions on Computer Science and Engineering*, (optim), February 2019.
- [4] Anastasia Motrenko and Vadim Strijov. Multi-way feature selection for ECoG-based brain-computer interface. *Expert Systems with Applications*, 114:402–413, December 2018.
- [5] Alexandr Katrutsa and Vadim Strijov. Comprehensive study of feature selection methods to solve multicollinearity problem according to evaluation criteria. *Expert Systems with Applications*, 76:1–11, June 2017.
- [6] Michael Haenlein and Andreas M. Kaplan. A beginners guide to partial least squares analysis. *Understanding Statistics*, 3(4):283–297, November 2004.
- [7] Paul Geladi. Notes on the history and nature of partial least squares (PLS) modelling. *Journal of Chemometrics*, 2(4):231–246, August 1988.
- [8] Irene Rodríguez-Luján, Ramón Huerta, Charles Peter Elkan, and Carlos Santa Cruz. Quadratic programming feature selection. *J. Mach. Learn. Res.*, 11:1491–1516, 2010.
- [9] Sudharsan Thiruvengadam, Jei Shian Tan, and Karol Miller. Time series, hidden variables and spatio-temporal ordinality networks. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 30(3), June 2020.
- [10] Linwang Yuan, Zhaoyuan Yu, Shaofei Chen, Wen Luo, Yongjun Wang, and Guonian Lü. CAUSTA: Clifford algebra-based unified spatio-temporal analysis. *Transactions in GIS*, 14:59–83, June 2010.
- [11] Joan Lasenby and Anthony N. Lasenby. Constrained optimization using geometric algebra and its application to signal analysis. In *Signal Analysis and Prediction*, pages 79–88. Birkhäuser Boston, 1998.
- [12] Strijov V.V. Isachenko R.V. Dimensionality reduction using projection to latent structures for signal decoding. pages 86–87. TORUS PRESS, September 2018.
- [13] Eric Chisolm. Geometric algebra, 2012.
- [14] Leo Dorst, Daniel Fontijne, and Stephen Mann. Geometric algebra for computer science - an object-oriented approach to geometry. In *The Morgan Kaufmann series in computer graphics*, 2007.

- [15] Richard Allen Miller. Geometric algebra| an introduction with applications in euclidean and conformal geometry. 2013.
- [16] Jayme Vaz and Roldão da Rocha. *"An Introduction to Clifford Algebras and Spinors"*(Oxford University Press). 07 2016.
- [17] Gerald Sommer. Geometric computing with clifford algebras. In *Springer Berlin Heidelberg*, 2001.
- [18] Food-Tracking Task with ECoG. <http://neurotycho.org/epidural-ecog-food-tracking-task>.